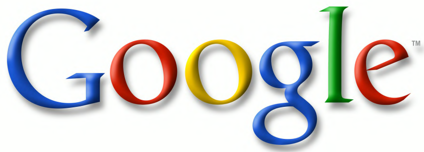
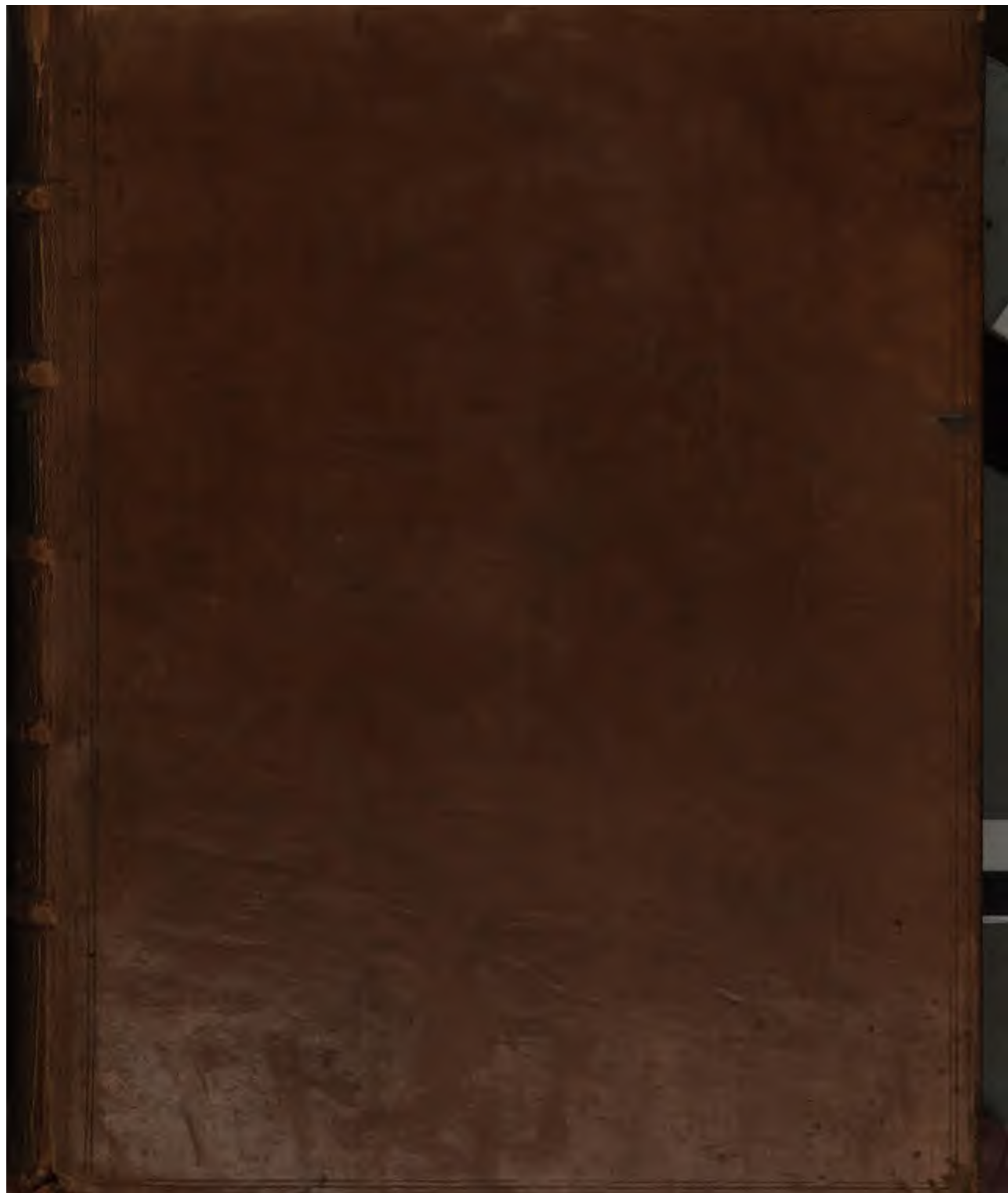










P. F.

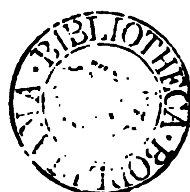
MÉMOIRES
DONNÉS
À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
NON IMPRIMÉS DANS LEUR TEMPS.

Par M. FONTAINE, de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXIV.





TABLE

Des Mémoires contenus dans ce Volume.

ſans cela, j'en donnai auſſitôt à l'Académie une ſolution par le moyen de ce Théorème; quelqu'un a fait mettre depuis peu cette ſolution dans un des Volumes des *Savans étrangers.* Comme la manière que j'ai imaginée de différencier les fonctions indéterminées, eſt d'un grand uſage, non-ſeulement ici, mais encore dans beaucoup d'autres recherches, & qu'elle peut faciliter les découvertes; pour la rendre familière tout d'un coup, je vais en mettre ici un exemple.

Soit μ une fonction de pluſieurs variables $x, y, z, u,$ &c. on aura $d\mu = \frac{d\mu}{dx}dx + \frac{d\mu}{dy}dy + \frac{d\mu}{dz}dz + \frac{d\mu}{du}du +$ &c.

$$\frac{dd\mu}{dx} = \frac{dd\mu}{dx^2}dx + \frac{dd\mu}{dxdy}dy + \frac{dd\mu}{dxdz}dz + \frac{dd\mu}{dxdu}du + \&c.$$

$$\frac{dd\mu}{dy} = \frac{dd\mu}{dxdy}dx + \frac{dd\mu}{dy^2}dy + \frac{dd\mu}{dydz}dz + \frac{dd\mu}{dydu}du + \&c.$$

$$\frac{dd\mu}{dz} = \frac{dd\mu}{dxdz}dx + \frac{dd\mu}{dydz}dy + \frac{dd\mu}{dz^2}dz + \frac{dd\mu}{dzdu}du + \&c.$$

$$\frac{dd\mu}{du} = \frac{dd\mu}{dxdu}dx + \frac{dd\mu}{dydu}dy + \frac{dd\mu}{dzdu}dz + \frac{dd\mu}{du^2}du + \&c.$$

$$\frac{ddd\mu}{dx^2} = \frac{ddd\mu}{dx^3}dx + \frac{ddd\mu}{dx^2dy}dy + \frac{ddd\mu}{dx^2dz}dz + \frac{ddd\mu}{dx^2du}du + \&c.$$

$$\frac{ddd\mu}{dxdy} = \frac{ddd\mu}{dx^2dy}dx + \frac{ddd\mu}{dxdy^2}dy + \frac{ddd\mu}{dxdydz}dz + \frac{ddd\mu}{dxdydu}du + \&c.$$

&c.

Cette expreſſion-ci $\frac{1}{dx} \cdot d\mu$ eſt donc bien différente de celle-ci $\frac{d\mu}{dx}$. La première ſignifie la différence de μ diviſée par dx; la ſeconde ſignifie le coëfficient de dx dans la différence de μ. 24

Le Calcul intégral. Seconde méthode.

L'Introduction doit être lûe avec beaucoup d'attention; on y trouvera des choſes fondamentales, qui, quoique ſimples, n'avoient encore été vues de perſonne. Les commençans feront bien de s'exercer à former des intégrales, en donnant des valeurs



EXTRAIT des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

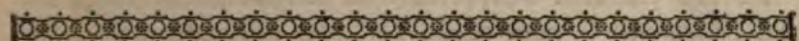
Du 20 Décembre 1763.

MESSIEURS *D'ALEMBERT* & *BEZOUT* qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. FONTAINE, intitulé : *Mémoires donnés à l'Académie, & non imprimés dans leur temps*, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, le vingt-trois Décembre mil ſept cent ſoixante-trois. *Signé* GRANDJEAN DE FOUCHY, *Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

MÉMOIRES



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.



NOUVELLE MÉTHODE pour la ſolution des Problèmes de Maximis & Minimis.



JE n'en étois encore qu'au Livre des *infiniment petits* de M. le Marquis de l'Hôpital, & je ne connoiſſois pas les méthodes de M. Jacques Bernoulli, de M. Taylor, &c. lorſque l'on me propoſa de trouver, entre deux points donnés ſur une ſurface courbe quelconque, la ligne la plus courte. Je réſolus ce problème par une méthode qui ſe trouve être plus ſimple & plus générale qu'aucune de celles qu'on a 1732.

données; je ne ſais ſi on ne l'aura pas publiée quelque part, car elle eſt très-répandue: deux ou trois exemples connus la feront auſſi bien entendre, que d'autres que je pourrois imaginer.

PREMIER EXEMPLE.

Soient A & B (*fig. 1*) deux points donnés dans un plan vertical: un corps M peut par ſa peſanteur aller de A en B par une infinité de chemins; l'on demande celui le long duquel il faut le faire deſcendre pour qu'il arrive le plus vîte de A en B.

Je mène l'horizontale AC (*fig. 2*) & la verticale AD, & je ſuppoſe que $AMm\mu B$ eſt le chemin qu'il faut faire ſuivre au corps M, pour qu'il arrive en moins de temps de A en B.

Deux petits côtés quelconques Mm, $m\mu$ de la courbe $AMm\mu B$, ſeront donc parcourus plus vîte que ne le ſeroient deux autres petits côtés quelconques Mn, $n\mu$; ſans quoi ce ne ſeroit pas $AMm\mu B$ qui ſeroit la ligne de la plus vîte deſcente, comme nous le ſuppoſons, mais ce ſeroit $AMn\mu B$.

Je vais chercher l'expreſſion du temps que le corps M met à parcourir le petit côté Mm, plus l'expreſſion de celui qu'il met à parcourir le petit côté $m\mu$, & la ſomme de ces deux expreſſions ſera un *minimum*.

Des points M, m, μ, je mène à la verticale AD les perpendiculaires MP, mp, $\mu\pi$.

Je fais $\begin{cases} AP = x,\ Ap = x',\ A\pi = x'',\ x' - x = \dot{x},\ x'' - x' = \dot{x}',\ Mm = \dot{s},\ m\mu = \dot{s}'. \\ PM = y,\ pm = y',\ \pi\mu = y'',\ y' - y = \dot{y},\ y'' - y' = \dot{y}'. \end{cases}$

Soit la force qui accélère les corps verticalement $= g$, cette force peut être regardée comme le réſultat de deux autres, l'une dans la direction MQ perpendiculaire à Mm, & qui par conſéquent n'a aucun effet le long de Mm, & l'autre dans la direction Mm que j'appelle f.

On aura $g : f :: MG : QG :: \dot{s} : \dot{x}$, donc $f = \frac{g\dot{x}}{\dot{s}}$.

Soit la vîteſſe du corps au lieu $M = v$, & ſa vîteſſe au

lieu $m = v + \dot{v}$, le temps qu'il emploiera à parcourir *Mm*, sera $= \frac{\dot{s}}{v}$; & par le principe que l'effet que produit une force qui agit continuellement, divisé par le temps qu'elle met à le produire, est sa mesure, on aura $\frac{g\dot{x}}{\dot{s}} = \frac{\dot{v}}{(\frac{\dot{s}}{v})}$ ou $g\dot{x} = v\dot{v}$; en intégrant & faisant que x & v soient $= 0$ en même temps, on aura $2gx = v^2$ ou $v = (\sqrt{2gx})$.

Par conséquent le temps de *M* en *m* est $= \frac{\dot{s}}{\sqrt{(2gx)}}$, & celui de *m* en μ est $= \frac{\dot{s}'}{\sqrt{(2gx')}}$.

On aura donc $\frac{\dot{s}}{\sqrt{(2gx)}} + \frac{\dot{s}'}{\sqrt{(2gx')}} =$ un *minimum*; donc $d\left(\frac{\dot{s}}{\sqrt{(2gx)}} + \frac{\dot{s}'}{\sqrt{(2gx')}}\right) = 0$, ou $d\left(\frac{\dot{s}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{\dot{s}'}{x'^{\frac{1}{2}}}\right) = 0$.

Pour différencier réellement & avoir l'équation à la courbe, il faut observer qu'il n'y a que *pm* ou y' qui doive varier; car en faisant mouvoir le point *m* le long de *pm*, soit à droite, soit à gauche, on aura une infinité de chemins pour arriver de *M* en μ, parmi lesquels $Mm\mu$ sera celui qui sera parcouru le plus vîte de tous.

Nous avons $\dot{s}^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$, & $\dot{s}'^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$.

En différenciant & en ne faisant varier que y', nous aurons $d\dot{s} = \frac{\dot{y}\,dy'}{\dot{s}}$, & $d\dot{s}' = -\frac{\dot{y}'\,dy'}{\dot{s}'}$.

Reprenons à présent l'expression $d\left(\frac{\dot{s}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{\dot{s}'}{x'^{\frac{1}{2}}}\right) = 0$; elle se changera en celle-ci, $\frac{\dot{y}\,dy'}{x^{\frac{1}{2}}\dot{s}} - \frac{\dot{y}'\,dy'}{x'^{\frac{1}{2}}\dot{s}'} = 0$; ou $\frac{\dot{y}'}{x'^{\frac{1}{2}}\dot{s}'} - \frac{\dot{y}}{x^{\frac{1}{2}}\dot{s}} = 0$, ou *Fluxion* $\left(\frac{\dot{y}}{x^{\frac{1}{2}}\dot{s}}\right) = 0$, dont la *Fluente* est $\frac{\dot{y}}{x^{\frac{1}{2}}\dot{s}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$, que l'on trouvera être l'équation de la cycloïde.

EXEMPLE II.

Je ſuppoſe qu'ayant fixé l'un des bouts d'un fil en A, (*fig. 3*) & l'autre bout en B, l'on propoſe de trouver la courbe qu'il faut former avec ce fil ſur le plan AMB, pour que l'eſpace qu'il renfermera avec la ligne AB, ſoit le plus grand poſſible.

Je regarde la choſe comme faite, & prenant ſur la courbe AMB, trois petits côtés quelconques conſécutifs, $M\mathsf{M}$, $\mathsf{M}m$, $m\mu$, & des points M, M, m, μ, menant à AB les perpendiculaires MP, MP, mp, $\mu\pi$, j'aurai la ſomme des trois eſpaces $MP\mathsf{PM}$, $\mathsf{MP}pm$, $mp\pi\mu$ égale à un *maximum*, & celle des trois petits côtés $M\mathsf{M}$, $\mathsf{M}m$, $m\mu$, conſtante.

Je fais $\begin{cases} AP = x,\ A\mathsf{P} = x',\ Ap = x'',\ A\pi = x''',\ x' - x = \dot{x},\ x'' - x' = \dot{x}', \\ PM = y,\ \mathsf{PM} = y',\ pm = y'',\ \pi\mu = y''',\ y' - y = \dot{y},\ y'' - y' = \dot{y}', \end{cases}$

$x''' - x'' = \dot{x}''$, $M\mathsf{M} = \dot{s}$, $\mathsf{M}m = \dot{s}'$, $m\mu = \dot{s}''$.

$y''' - y'' = \dot{y}''$.

J'aurai donc $d(y\dot{x} + y'\dot{x}' + y''\dot{x}'') = 0$, & $d(\dot{s} + \dot{s}' + \dot{s}'') = 0$.

Il faut obſerver qu'ici il n'y a que deux lignes qui doivent varier, qui ſont y', y'', & qu'en général, dans ces problèmes-ci, il faudra toûjours prendre un nombre de côtés, tel qu'il y ait autant d'ordonnées variables qu'il y aura de conditions à remplir : s'il y avoit trois conditions à remplir, il faudroit prendre quatre petits côtés ; on auroit cinq ordonnées, & par conſéquent trois variables, ſavoir, les trois du milieu, les deux extrêmes devant toûjours néceſſairement être conſtantes.

Pour remplir les deux conditions précédentes, conſidérons que $\dot{s}^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$, $\dot{s}'^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$, $\dot{s}''^2 = (x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2$, que par conſéquent $d\dot{s} = \frac{\dot{y}\,dy'}{\dot{s}}$ $d\dot{s}' = \frac{\dot{y}'\,dy''}{\dot{s}'} - \frac{\dot{y}\,dy'}{\dot{s}}$ $d\dot{s}'' = -\frac{\dot{y}''\,dy''}{\dot{s}''}$, & qu'ainſi nous aurons $\dot{x}'\,dy' + \dot{x}''\,dy'' = 0$, & $-\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)dy' - \text{flux.}\left(\frac{\dot{y}'}{\dot{s}'}\right)dy'' = 0$, ou $\frac{dy''}{dy'} = \frac{-\dot{x}'}{\dot{x}''}$,

& $\frac{dy^n}{dy} = \frac{-\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)}{\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)}$, d'où nous tirerons $\frac{\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)}{\dot{x}^n}$

$= \frac{\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)}{\dot{x}}$ ou flux. $\left(\frac{\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)}{\dot{x}}\right) = 0$, ou flux. $\left(\frac{\text{flux.}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right)}{\dot{x}}\right) = 0$;

donc en intégrant flux. $\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}}\right) = \frac{\dot{x}}{a}$, & en intégrant de rechef

$\frac{\dot{y}}{\dot{s}} = \frac{x}{a} + m.$



DÉTERMINATION
de la Courbe de la moindre action.

1732. JE suppose que je me trouve placé dans un endroit où je sois environné de corps qui fassent sur moi une impression desagréable: trouver le chemin par où je dois m'enfuir pour échapper, le plus qu'il est possible, à cette impression.

Je suppose que je suis parti du point C, & que je me trouve actuellement en M (*fig. 4*); du point M je mène à une ligne AB la perpendiculaire MP, & je fais $AP = x$ $PM = y$. Soit F une fonction de x & de y, qui exprime l'impression que je souffre au point M: si je fais un pas, $\acute{F}$ sera l'impression que je souffrirai au bout de ce pas, qui sera moindre que F; par conséquent $\acute{F} - F$ ou $\dot{F}$ sera une quantité négative, & le pas $Mm = \dot{s}$ que j'ai fait, doit avoir été dirigé de façon que cette quantité soit un *maximum*. Je suppose $\dot{F} = e\dot{x} + f\dot{y}$; j'aurai $e\dot{x} + f\dot{y}$ = un *maximum*, donc $d(e\dot{x} + f\dot{y}) = 0$.

Pour exécuter cette condition, il faut observer que x, y & $\dot{s}$ sont constans, & qu'il n'y a que $\dot{x}$ & $\dot{y}$ qui doivent varier; on aura donc $e\,d\dot{x} + f\,d\dot{y} = 0$.

Mais $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ étant constant, on aura $\dot{x}\,d\dot{x} + \dot{y}\,d\dot{y} = 0$; donc $\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} = \frac{-e}{f}$ & $\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} = \frac{-\dot{x}}{\dot{y}}$; donc l'équation de la courbe $CMmD$ sera $e\dot{y} = f\dot{x}$.

PROBLÉME.

Trouver la Courbe que doit embraſſer un angle donné, pour que ſon ſommet puiſſe gliſſer le long d'une courbe donnée.

Nous aurons beſoin, pour réſoudre ce problème, des théorèmes ſur les ſinus & coſinus, que M. Euler a mis ſi à la mode : ils ont ſans doute été démontrés en beaucoup d'endroits ; mais comme je ne les connois que par des Livres où ils ne ſont pas démontrés, voulant m'en ſervir, j'ai trouvé auſſi court de me les démontrer à moi-même, que d'aller chercher ceux où ils le ſont.

LEMME.

a & b ſont deux angles quelconques ; on peut prendre ſa ſomme de ces deux angles, on peut en prendre la différence.

Il faut trouver les équations entre les ſinus, les coſinus de ces angles, de leur ſomme & de leur différence.

Je fais deux figures ; dans la première, les angles a & b ſont ajoûtés l'un à l'autre ; dans la ſeconde, l'angle b, que je ſuppoſe le plus petit, eſt retranché de l'angle a.

Par la *(fig. 6)* où $ACB = a$, $BCD = b$, on aura $\text{coſ.}\, a : \text{ſin.}\, a :: \text{coſ.}\, (a+b) : \delta g = \frac{\text{ſin.}\, a \,.\, \text{coſ.}\, (a+b)}{\text{coſ.}\, a}$, donc $gD = \text{ſin.}\, (a+b) - \frac{\text{ſin.}\, a \,.\, \text{coſ.}\, (a+b)}{\text{coſ.}\, a}$; on aura $\text{coſ.}\, a : 1 :: \text{coſ.}\, (a+b) : cg = \frac{\text{coſ.}\, (a+b)}{\text{coſ.}\, a}$, donc $gd = \text{coſ.}\, b - \frac{\text{coſ.}\, (a+b)}{\text{coſ.}\, a}$; & à cauſe des triangles ſemblables CBb, gDd, on aura $1 : \text{ſin.}\, a :: \text{ſin.}\, (a+b) - \frac{\text{ſin.}\, a \,.\, \text{coſ.}\, (a+b)}{\text{coſ.}\, a} : \text{coſ.}\, b - \frac{\text{coſ.}\, (a+b)}{\text{coſ.}\, a}$ ou $\text{coſ.}\, b - \frac{\text{coſ.}\, (a+b)}{\text{coſ.}\, a} = \text{ſin.}\, a \,.\, \text{ſin.}\, (a+b) - \frac{(\text{ſin.}\, a)^2\, \text{coſ.}\, (a+b)}{\text{coſ.}\, a}$

ou $\text{ſin.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ (a+b) + \text{coſ.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ (a+b) = \text{coſ.}\ b$, & $1 : \text{coſ.}\ a :: \text{ſin.}\ (a+b) - \frac{\text{ſin.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ (a+b)}{\text{coſ.}\ a} : \text{ſin.}\ b$ ou $\text{coſ.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ (a+b) - \text{ſin.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ (a+b) = \text{ſin.}\ b$.

Par la (*fig. 7*) où $ACB = a$, $ACD = b$, on aura $\text{coſ.}\ b : \text{ſin.}\ b :: \text{coſ.}\ a : bf = \frac{\text{coſ.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b}{\text{coſ.}\ b}$, donc $fB = \text{ſin.}\ a - \frac{\text{coſ.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b}{\text{coſ.}\ b}$; on aura $\text{coſ.}\ b : 1 :: \text{coſ.}\ a : ef = \frac{\text{coſ.}\ a}{\text{coſ.}\ b}$, donc $f\zeta = \text{coſ.}\ (a-b) - \frac{\text{coſ.}\ a}{\text{coſ.}\ b}$;
& à cauſe des triangles ſemblables CDd, $fB\zeta$, on aura $1 : \text{ſin.}\ b :: \text{ſin.}\ a - \frac{\text{coſ.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b}{\text{coſ.}\ b} : \text{coſ.}\ (a-b) - \frac{\text{coſ.}\ a}{\text{coſ.}\ b}$ ou $\text{ſin.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b - \frac{\text{coſ.}\ a\ .\ (\text{ſin.}\ b)^2}{\text{coſ.}\ b} = \text{coſ.}\ (a-b) - \frac{\text{coſ.}\ a}{\text{coſ.}\ b}$ ou $\text{ſin.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b + \text{coſ.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ b = \text{coſ.}\ (a-b)$, & $1 : \text{coſ.}\ b :: \text{ſin.}\ a - \frac{\text{coſ.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b}{\text{coſ.}\ b} : \text{ſin.}\ (a-b)$ ou $\text{ſin.}\ a\ \text{coſ.}\ b - \text{coſ.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b = \text{ſin.}\ (a-b)$.

Nos deux premières équations peuvent ſe changer en ces deux-ci .... $\left\{\begin{array}{l}\text{coſ.}\ (a+b) = \text{coſ.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ b - \text{ſin.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b. \\ \text{ſin.}\ (a+b) = \text{ſin.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ b + \text{coſ.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b.\end{array}\right.$

Les deux dernières ſont $\left\{\begin{array}{l}\text{coſ.}\ (a-b) = \text{ſin.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b + \text{coſ.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ b. \\ \text{ſin.}\ (a-b) = \text{ſin.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ b - \text{coſ.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b.\end{array}\right.$

Au moyen de la 1.re & de la 3.me de ces quatre équations, on aura ces deux-ci, $\left\{\begin{array}{l}\text{ſin.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b = \tfrac{1}{2}\ \text{coſ.}\ (a-b) - \tfrac{1}{2}\ \text{coſ.}\ (a+b); \\ \text{coſ.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ b = \tfrac{1}{2}\ \text{coſ.}\ (a-b) + \tfrac{1}{2}\ \text{coſ.}\ (a+b);\end{array}\right.$
& au moyen de la 2.me & de la 4.me
on aura ces deux-ci, $\left\{\begin{array}{l}\text{ſin.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ b = \tfrac{1}{2}\ \text{ſin.}\ (a+b) + \tfrac{1}{2}\ \text{ſin.}\ (a-b). \\ \text{coſ.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ b = \tfrac{1}{2}\ \text{ſin.}\ (a+b) - \tfrac{1}{2}\ \text{ſin.}\ (a+b).\end{array}\right.$
C. Q. F. T.

Je ſuppoſe que l'angle a croît, & qu'il devient $a + \dot a$, l'on demande la différence de $\text{ſin.}\ a$; on aura $d\,\text{ſin.}\ a = \text{ſin.}\ (a+\dot a) - \text{ſin.}\ a$: mais par l'un des théorèmes précédens, $\text{ſin.}\ (a+\dot a) = \text{ſin.}\ a\ .\ \text{coſ.}\ \dot a + \text{coſ.}\ a\ .\ \text{ſin.}\ \dot a = \text{ſin.}\ a + \dot a\ \text{coſ.}\ a$, car $\text{coſ.}\ \dot a = 1$ & $\text{ſin.}\ \dot a = \dot a\ .\ 1$; donc

donc d sin. $a = \dot{a}$ cos. a, l'on trouvera de la même manière que d cos. $a = - \dot{a}$ sin. a.

SOLUTION.

AMmB (fig. 8) est la courbe donnée, & $sM\gamma$ l'angle donné, que je suppose avoir dans la figure, la position qu'il doit avoir lorsque son sommet est arrivé en M.

Je fais le petit côté Mm de la courbe donnée $= dz$, l'angle de contingence $Tmt = dy$, l'angle donné $sM\gamma = a$, l'angle $TMs = A$; l'angle $TM\gamma$ sera $= A + a$, l'angle $tm\sigma = A + dA$;
& on aura l'angle $M\sigma m = dy - dA$,
l'arc $MR = dz$ sin. A, $MR = dz$ cos. A;
donc $\sigma M = \frac{dz \text{ sin. } A}{dy - dA}$.

Soit le petit côté $s\sigma$ de la courbe que touche $Ms = ds$, l'angle de contingence qui lui correspond $= dx$.

Le petit côté $c\gamma = ds'$, l'angle de contingence correspondant $= dx'$,
on aura $dx = dy - dA, ds = d(\frac{dz \text{ sin. } A}{dy - dA}) - dz \text{ cos. } A$.

$$dx' = dy - dA,\ ds' = d(\frac{dz \text{ sin. } (A+a)}{dy - dA}) - dz \text{ cos. } (A+a).$$

L'équation entre dz, dy étant donnée, quelque fonction de z & de y que l'on prenne pour A, on aura l'équation entre ds, dx, comme aussi celle entre ds', dx'.

Soit, par exemple, A constant;
on aura $dx = dy$, $ds = $ sin. $A d(\frac{dz}{dy}) - dz$ cos. A;
& si de plus A est droit,
on aura $dx = dy$ $ds = d(\frac{dz}{dy})$, c'est-à-dire que l'équation d'une courbe entre dz & dy étant donnée, on aura celle de sa développée entre ds, dx, & réciproquement.

A étant toûjours constant, si l'on veut que l'équation entre dz, dy, soit telle que la courbe touchée soit un point, on

aura $ds = 0$, c'eſt-à-dire que l'équation à cette courbe ſera ſin. $A d\left(\frac{dz}{dy}\right) - dz$ coſ. $A = 0$.

Mais pour notre problème, l'équation entre dz, dy étant donnée, il faut que A ſoit tel que l'équation entre ds' dx' ſoit la même que celle entre ds, dx.

Soit $A = \alpha - \frac{1}{2}a$ & $A + a = \alpha + \frac{1}{2}a$,

on aura $\begin{cases} dx = dy - d\alpha,\ ds = d\left(\frac{dz \text{ ſin. } (\alpha - \frac{1}{2}a)}{dy - d\alpha}\right) - dz \text{ coſ. } (\alpha - \frac{1}{2}a) \\ dx' = dy - d\alpha,\ ds' = d\left(\frac{dz \text{ ſin. } (\alpha + \frac{1}{2}a)}{dy - d\alpha}\right) - dz \text{ coſ. } (\alpha + \frac{1}{2}a) \end{cases}$

ou $\begin{cases} dx = dy - d\alpha,\ ds = d\left(\frac{dz}{dy - d\alpha}\right) \text{ ſin. } (\alpha - \frac{1}{2}a) + dz\left(\frac{d\alpha}{dy - d\alpha} - 1\right) \text{ coſ. } (\alpha - \frac{1}{2}a). \\ dx' = dy - d\alpha,\ ds' = d\left(\frac{dz}{dy - d\alpha}\right) \text{ ſin. } (\alpha + \frac{1}{2}a) + dz\left(\frac{d\alpha}{dy - d\alpha} - 1\right) \text{ coſ. } (\alpha + \frac{1}{2}a). \end{cases}$

Soit $d\left(\frac{dz}{dy - d\alpha}\right) = M$, & $dz\left(\frac{2\,d\alpha - dy}{dy - d\alpha}\right) = N$,

on aura $\begin{cases} dx = dy - d\alpha,\ ds = M(\text{coſ.} \frac{1}{2}a \text{ ſin.} \alpha - \text{ſin.} \frac{1}{2}a \text{ coſ.} \alpha) + N(\text{ſin.} \frac{1}{2}a \text{ ſin.} \alpha + \text{coſ.} \frac{1}{2}a \text{ coſ.} \alpha) \\ dx' = dy - d\alpha,\ ds' = M(\text{coſ.} \frac{1}{2}a \text{ ſin.} \alpha + \text{ſin.} \frac{1}{2}a \text{ coſ.} \alpha) + N(-\text{ſin.} \frac{1}{2}a \text{ ſin.} \alpha + \text{coſ.} \frac{1}{2}a \text{ coſ.} \alpha) \end{cases}$

ou $\begin{cases} dx = dy - d\alpha,\ ds = (M \text{ ſin.} \alpha + N \text{ coſ.} \alpha) \text{ coſ.} \frac{1}{2}a + (-M \text{ coſ.} \alpha + N \text{ ſin.} \alpha) \text{ ſin.} \frac{1}{2}a. \\ dx' = dy - d\alpha,\ ds' = (M \text{ ſin.} \alpha + N \text{ coſ.} \alpha) \text{ coſ.} \frac{1}{2}a + (M \text{ coſ.} \alpha - N \text{ ſin.} \alpha) \text{ ſin.} \frac{1}{2}a. \end{cases}$

Déterminez α tellement que $- M$ coſ. $\alpha + N$ ſin. $\alpha = 0$, ou que $- M$ coſ. $\alpha + N$ ſin. α ſoit un radical, & les deux courbes touchées auront évidemment la même équation. *C. Q. F. T.*

Au reſte, l'équation entre l'abſciſſe & l'ordonnée d'une courbe étant donnée, il ſera facile de trouver l'équation entre un arc de cette courbe & ſa courbure, & réciproquement.

Soit $Mm = dz$ (*fig. 9*) $Tmt = dy$, $MR = dx$, $Rm = du$; on aura, 1.° $dz^2 = dx^2 + du^2$; 2.° on aura $dx : du :: dx' : du' + \mu l$, ou $dx : dx' :: du : du' + \mu l$, ou $dx : ddx :: du : ddu + \mu l$, donc $\mu l = \frac{du\,ddx - dx\,ddu}{dx}$;

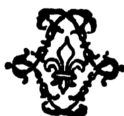
du centre m & du rayon $m\mu$ soit décrit le petit arc μn, on aura $dz : dx :: \frac{du\, ddx - dx\, ddu}{dx} : \mu n = \frac{du\, ddx - dx\, ddu}{dz}$; donc $dz dy = \frac{du\, ddx - dx\, ddu}{dz}$.

L'équation entre x, u étant donnée, on aura par le moyen des deux équations précédentes celle entre z, y; & réciproquement l'équation entre z, y étant donnée, on aura celle entre x, u.

L'équation entre le rayon vecteur d'une courbe & l'angle que fait ce rayon vecteur avec une ligne donnée de position, étant donnée, il sera facile de trouver l'équation entre un arc de cette courbe & sa courbure, & réciproquement.

Soit $Mm = dz$ (*fig. 10*) $Tmt = dy$, $DCM = x$, $CM = v$; on aura $MR = vdx$, $RM = dv$; donc 1.° $dz^2 = v^2\, dx^2 + dv^2$;
2.° $vdx : dv :: v'dx' : dv' + \mu l$,
ou $vdx : v'dx' :: dv : dv' + \mu l$,
ou $vdx : vddx + dvdx :: dv : ddv + \mu l$;
donc $\mu l = \frac{vdv\, ddx + dv^2 dx - vdx\, ddv}{vdx}$; du centre m & du rayon $m\mu$ soit décrit le petit arc μn, on aura $dz : vdx :: \frac{vdv\, ddx + dv^2 dx - vdx\, ddv}{vdx} : \mu n = \frac{vdv\, ddx + dv^2 dx - vdx\, ddv}{dz}$;
donc $dz\, dy = \frac{vdv\, ddx + dv^2 dx - vdx\, ddv}{dz}$.

L'équation entre x & v étant donnée, on aura par le moyen de ces deux équations celle entre z & y; & réciproquement l'équation entre z & y étant donnée, on aura celle entre x & v.



PROBLÉME.

Trouver les Courbes qui ſe développent elles-mêmes.

L'ÉQUATION à un point quelconque d'une courbe entre l'arc z & la courbure y de cet arc étant donnée, en allant, par exemple, de gauche à droite, trouver quelle ſera l'équation de cette même courbe, en allant de droite à gauche.

Je mène une tangente ATC (*fig. 11*) à la courbe à ſon origine A, enſuite je prends ſur cette courbe un arc quelconque AB, & je mène une autre tangente BD à l'extrémité B de cet arc, que je ſuppoſe rencontrer la première en T; l'angle BTC eſt ce que j'appelle la courbure de l'arc AB.

Soit $AB = a$, $BTC = c$, je marque un point quelconque M ſur l'arc AB, & faiſant $AM = z$, la courbure de $AM = y$, $BM = s$, la courbure de $BM = x$, j'aurai $s + z = a$, $x + y = c$; & par conſéquent $z = a - s$, $y = c - x$, $dz = -ds$, $dy = -dx$.

Il n'y aura donc qu'à ſubſtituer pour z, y, ces valeurs dans l'équation entre z & y, & on aura celle entre s, x.

Si l'équation entre z, y eſt ſans z & ſans y, on aura la même équation entre s, x, qu'entre z & y.

Si la développée eſt la même que la développante, l'équation à la développée ſera entièrement la même que celle de la développante, de quelque manière que la développée ſoit placée par rapport à la développante, pourvû qu'il n'entre que des différences dans l'équation à la développante.

Le problème où il s'agit de trouver les courbes qui ſe développent elles-mêmes, ſe réduit donc à trouver l'équation la plus générale qu'il ſoit poſſible d'avoir entre dz, dy & leurs différences, tellement que celle qu'on en déduira par le

moyen de ces deux équations-ci, $dx = dy$, $ds = d(\frac{dz}{dy})$ entre ds, dx, ſoit la même que celle entre dz, dy.

Je ſuppoſe que *AMB* (*fig. 12*) eſt une courbe qui ſe développe elle-même; à un point quelconque *M* de cette courbe je mène le rayon de la développée *MN*, & au point *N* de la développée je mène le rayon de la ſeconde développée *NQ*; ou la courbe *AMB* ſe développe dans le même ſens, c'eſt-à-dire, de manière que chaque point *M* ſe produit lui-même, ou elle ſe développe en ſens contraire, c'eſt-à-dire, de manière que le point *A* donne le point *B*, le point *B* donne le point *A*, & qu'il n'y a que le point du milieu qui ſe donne lui-même.

Dans le premier cas, on aura $NQ = MN$; dans le ſecond cas, toutes les lignes *MQ* ſeront égales & parallèles.

En général, $MN = \frac{dz}{dy}$, $NQ = \frac{d(\frac{dz}{dy})}{dy}$; par conſéquent, l'équation à la courbe qui ſe développe elle-même dans le même ſens, eſt $\frac{dz}{dy} = \frac{d(\frac{dz}{dy})}{dy}$ ou, en faiſant dy conſtant, $dy\,dz = ddz$.

Pour avoir celle de la courbe qui ſe développe elle-même en ſens contraire, je mène la petite ligne *MR* perpendiculaire à *MQ*, & *Rm* parallèle à *MQ*; & faiſant $MR = dx$, $Rm = du$, j'aurai $dx : dz :: \frac{dz}{dy} : MQ = \frac{dz^2}{dx\,dy}$; par conſéquent l'équation à cette courbe ſera $\frac{dz^2}{dx\,dy} = m$.

Au lieu de cette équation, je veux en avoir une entre z & y ſeulement, & je me ſers pour cet effet de ces deux équations-ci, $dz^2 = dx^2 + du^2$, $dz^2\,dy = du\,ddx - dx\,ddu$; j'aurai $dx = \frac{dz^2}{m\,dy}$, & en faiſant dy conſtant, j'aurai $ddx = \frac{2\,dz\,ddz}{m\,dy}$; en ſubſtituant pour dx & ddx ces valeurs,

j'aurai $dz^2 = \frac{dz^4}{m^2 dy^2} + du^2$, & $dz^2 dy = \frac{2dz\,ddz}{m dy} du - \frac{dz^2}{m dy} ddu$; en chaſſant du, j'aurai $dy^2 dz^2 + ddz^2 = m^2 dy^4$ pour l'équation à la courbe qui ſe développe elle-même en ſens contraire.

Maintenant, puiſque les courbes qu'expriment ces deux équations-ci, $dydz = ddz$, $dy^2 dz^2 + ddz^2 = m^2 dy^4$, réſolvent le même problème, elles doivent avoir une équation commune qu'il s'agit de trouver.

En différenciant la ſeconde, j'aurai $dy^2 dz + dddz = 0$.

En différenciant la première, j'aurai $dyddz = dddz$, ou, en ſubſtituant pour ddz ſa valeur, $dy^2 dz = dddz$.

Par conſéquent l'équation commune à nos deux courbes ſera $ndy^2 dz = dddz$.

Vérifions ſi cette équation a la propriété que nous avons dit que devoit avoir celle de la courbe qui ſe développe elle-même, d'être telle que l'équation entre ds, dx ſera la même.

Il faut chaſſer dz, dy de ces trois équations-ci,

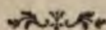
$$ndy^2 dz = dddz,\ dx = dy,\ ds = \frac{ddz}{dy}.$$

En chaſſant d'abord dy, nous aurons $ndx^2 dz = dddz$ & $dxds = ddz$.

Je différencie cette dernière équation pour avoir $dddz$ à ſubſtituer dans l'autre ; j'aurai $dddz = dxdds$, donc $ndxdz = dds$.

Je différencie cette dernière équation pour avoir une ſeconde valeur de ddz, j'aurai $ddz = \frac{ddds}{ndx}$.

En égalant les deux valeurs de ddz, j'aurai $ndx^2 ds = ddds$, c'eſt-à-dire, la même équation entre s & x, que celle entre z, y ; par conſéquent cette équation-ci $ndy^2 dz = dddz$ exprime toutes les courbes qui ſe développent elles-mêmes.



SUR LES COURBES TAUTOCHRONES.

LORSQUE j'entrai à l'Académie, l'Ouvrage que M. Jean Bernoulli lui avoit envoyé en 1730, qui eſt un chef-d'œuvre, venoit de paroître: cet Ouvrage avoit tourné l'eſprit de tous les Géomètres de ce côté-là, on ne parloit que du problème des Tautochrones; j'en donnai la ſolution que voici, & on n'en parla plus. 17 Février 1734.

Quoique cette ſolution ait été inſérée dans le volume de 1734, j'ai cru devoir la remettre ici, parce que tous les théorèmes qui vont me ſervir pour le calcul intégral y ſont cachés, & qu'elle eſt fort courte; l'on verra comment les idées ſe ſuccèdent les unes aux autres.

Par courbe tautochrone l'on entend une courbe dont tous les arcs, pris du point le plus bas, ſont deſcendus ou remontés dans des temps égaux.

Je diſtingue deux manières d'être tautochrone, parce que quoique dans quelques hypothèſes une même courbe le ſoit en même temps des deux, il doit y en avoir une infinité d'autres où elle ne pourra l'être que d'une ſeule.

On a la détermination de ces courbes pour quelques cas particuliers, mais on n'a point encore de méthode générale pour toutes les hypothèſes de peſanteur & de réſiſtance, & voici en quoi conſiſte la difficulté. Soit la courbe *AMM'B*, Fig. 13. on veut que cette courbe ſoit telle que tous ſes arcs *AM*, *AM'*, &c. ſoient parcourus en temps égaux, ſoit en montant, ſoit en deſcendant, ou plus généralement on veut que les temps ſoient comme une fonction donnée des arcs & des abſciſſes correſpondantes.

On voit d'abord que pour donner une origine fixe aux abſciſſes, il faut toûjours concevoir le corps partant de *A*, & que pour repréſenter la deſcente, au lieu que le milieu

retarde, il n'y a qu'à imaginer qu'il accélère; du reste, naturellement on s'y prendroit ainsi : on commenceroit par déterminer la vîtesse dans un point quelconque m de l'arc AM, pour avoir le petit temps de m en μ; ayant ce temps, on en prendroit la FLuente, & on auroit le temps de A en m, on substitueroit pour les lignes Am, Ap, les lignes AM, AP, & on auroit généralement pour toute courbe le temps de A en M, on égaleroit ce temps à la fonction donnée, & cette équation détermineroit la courbe $AMM'B$. Mais 1.° il n'y a que quelques hypothèses où l'on puisse avoir l'expression de la vîtesse; 2.° quand bien même on auroit cette expression, l'on ne pourroit pas intégrer l'élément du temps. Dans les cas où l'on peut avoir l'expression de la vîtesse, voyons ce que M.rs Newton & Bernoulli nous ont donné.

Soit, en premier lieu, le milieu sans résistance, & soit la force telle qu'on voudra; décrivez une courbe telle que la partie de cette force qui retardera le long de ses petits côtés soit toûjours comme l'arc parcouru, cette courbe sera tautochrone.

Car soit l'arc à parcourir $AM = X$, l'arc parcouru $Am = x$, l'arc que le corps parcourt actuellement $= \dot{x}$, la vîtesse qu'a le corps en $m = y$, celle qu'il perd de m en $\mu = \dot{y}$, le temps total de A en $M = T$, le temps écoulé de A en $m = t$, le temps présent $= \dot{t}$, & soit la force $= nx$, on aura $(-nx) \cdot \frac{\dot{x}}{y} = \dot{y}$, ou $nx\dot{x} + y\dot{y} = 0$; en intégrant & faisant que y soit $= 0$, lorsque x deviendra $= X$, on aura $nx^2 + y^2 = nX^2$, donc $y = n^{\frac{1}{2}} (X^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, donc $\dot{t} = \frac{n^{-\frac{1}{2}}\dot{x}}{\sqrt{(X^2 - x^2)}}$ & $t = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} FL \left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{(X^2 - x^2)}}\right]$; mais $FL \left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{(X^2 - x^2)}}\right]$ est une fonction de dimension nulle de X & de x; donc si on avoit

avoit cette FLuente, & qu'on y ſubſtituât X au lieu de x, on auroit T égal à une fonction de dimenſion nulle de X, c'eſt-à-dire, à un nombre conſtant.

Soit en ſecond lieu la réſiſtance du milieu $= \frac{y^2}{n}$, & ſoit la force égale à la gravité ordinaire $= g$, l'abſciſſe verticale $Ap = z$, on aura $(-\frac{g\dot{z}}{\dot{x}} \pm \frac{y^2}{n}) \cdot \frac{\dot{x}}{y} = \dot{y}$

$$\text{ou } g\dot{z} \mp \frac{1}{n} y^2 \dot{x} + y\dot{y} = 0,$$

$$\text{ou } gC^{\mp\frac{2}{n}x} \cdot \dot{z} \mp \frac{1}{n} C^{\mp\frac{2}{n}x} \cdot y^2 \dot{x} + C^{\mp\frac{2}{n}x} y\dot{y} = 0,$$

(par C j'entends le nombre dont le logarithme eſt 1) ou

$$gFL(C^{\mp\frac{2}{n}x}\dot{z}) + \frac{1}{2} C^{\mp\frac{2}{n}x} \cdot y^2 = gFL(C^{\mp\frac{2}{n}X}\dot{Z});$$

donc

$$y = \sqrt{(2g)} \cdot C^{\pm\frac{1}{n}x} \cdot \sqrt{[FL(C^{\mp\frac{2}{n}X}\dot{Z}) - FL(C^{\mp\frac{2}{n}x}\dot{z})]}$$

$$\& \ \dot{t} = \frac{C^{\mp\frac{1}{n}x}\dot{x}}{\sqrt{(2g)} \cdot \sqrt{[FL(C^{\mp\frac{2}{n}X} \cdot \dot{Z}) - FL(C^{\mp\frac{2}{n}x}\dot{z})]}}.$$

Pour que T ſoit un nombre conſtant, je vais tâcher de ramener cette expreſſion de $\dot{t}$ à celle de $\dot{t}$ dans la ſolution de M. Newton; pour cet effet, je fais $C^{\mp\frac{1}{n}x}\dot{x} = m\dot{a}$ & $FL(C^{\mp\frac{2}{n}x}\dot{z}) = a^2$. J'intègre la première de ces deux équations en faiſant que x & a ſoient $= 0$ en même temps, j'aurai $\mp nC^{\mp\frac{1}{n}x} \pm n = ma$; donc $a^2 = (\mp\frac{n}{m}C^{\mp\frac{1}{n}x} \pm \frac{n}{m})^2$.

Je mets pour a^2 ſa valeur dans la ſeconde, j'aurai

$$FL(C^{\mp\frac{2}{n}x}\dot{z}) = (\mp\frac{n}{m}C^{\mp\frac{1}{n}x} \pm \frac{n}{m})^2;$$

& en prenant les fluxions, j'aurai

$$C^{\mp\frac{2}{n}x}\cdot\dot{z} = 2\left(\mp\frac{n}{m}C^{\mp\frac{1}{n}x} \pm \frac{}{m}\right)\cdot \mp\frac{n}{m}\cdot\mp\frac{1}{n}C^{\mp\frac{1}{n}x}\cdot\dot{x};$$

donc $\dot{z} = \pm\frac{2n}{m^2}C^{\mp\frac{1}{n}x}\cdot\dot{x} \mp \frac{2n}{m^2}\dot{x}$.

Maintenant voici une méthode qui ne demande point qu'on ait l'expreſſion de la vîteſſe, & qui paroît générale pour tous les problèmes de ce genre; mais avant tout je dois avertir que comme j'ai été obligé, dans mes calculs, de faire varier les mêmes lignes de deux manières différentes, il a fallu que je déſigne leurs variations différemment: j'ai marqué les unes à la façon des Géomètres Anglois par des *fluxions*, les autres par des *différences*, à notre manière, en ſorte qu'ici dx ne ſera pas la même choſe que $\dot{x}$, $d\dot{x}$ que $\ddot{x}$, &c.

EXEMPLE I.

Dans l'hypothèſe de la gravité ordinaire & d'un milieu ſans réſiſtance, on demande que $T = \frac{X^m}{A^n}$. Soient ici les mêmes dénominations que précédemment, & ſoit de plus $\dot{z} = p\dot{x}$, $\dot{p} = q\dot{x}$, $\dot{q} = r\dot{x}$, &c. on aura

$$(-gp)\cdot\frac{\dot{x}}{y} = \dot{y}, \text{ ou } gp\dot{x} + y\dot{y} = 0.$$

Il faut à préſent faire en ſorte que lorſque x deviendra $= X$, $FL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right)$ devienne $= \frac{X^m}{A^n}$.

Fig. 14. Pour cet effet, je prends ſur la courbe $AMM'B$ un autre arc AM' infiniment peu différent du premier, & je fais ce nouvel arc à parcourir $AM' = X'$, le temps pour le parcourir $T' = \frac{X'^m}{A^n}$, l'arc parcouru $Am' = x'$, la vîteſſe au point $m' = y'$, le petit arc $m'\mu' = \dot{x}'$, la vîteſſe que le corps perd de m' en $\mu' = \dot{y}'$, & on aura ici, comme

dans l'autre arc, $gp'\dot{x}' + y'\dot{y}' = 0$. Soit $X' - X = dX$, $x' - x = dx$, $y' - y = dy$, $\dot{x}' - \dot{x} = d\dot{x}$, $\dot{y}' - \dot{y} = d\dot{y}$, on aura $(gp'\dot{x}' + y'\dot{y}') - (gp\dot{x} + y\dot{y}) = d(gp\dot{x} + y\dot{y}) = 0$; donc $gpd\dot{x} + gq\dot{x}dx + yd\dot{y} + \dot{y}dy = 0$. Je suppose $dx = \varphi dX$, & par φ j'entends une fonction de X & de $\dot{x}$. Soit $\dot{\varphi} = \gamma\dot{x}$, $\dot{\gamma} = \lambda\dot{x}$, $\dot{\lambda} = \mu\dot{x}$, &c. donc $d\dot{x} = \gamma\dot{x}dX$. Pour avoir dy, je fais la proportion suivante, qui renferme les conditions du problème,

$FL\left(\frac{\dot{x}'}{y'}\right) : FL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) :: T'$, ou $\left(\frac{X'^m}{A^m}\right) : T$, ou $\left(\frac{X^m}{A^m}\right)$, ou, en divisant, $dFL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) : FL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) :: mdX : X$; donc $dFL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) = \frac{mdX}{X}FL\left(\frac{\dot{x}}{y}\right)$; donc $d\left(\frac{\dot{x}}{y}\right) = \frac{mdX}{X}\left(\frac{\dot{x}}{y}\right)$; donc $yd\dot{x} - \dot{x}dy = \frac{mdX}{X}y\dot{x}$; donc $dy = \gamma ydX - \frac{mydX}{X}$ & $d\dot{y} = \gamma\dot{y}dX + \lambda y\dot{x}dX - \frac{m\dot{y}dX}{X}$. Substituons ces valeurs dans notre équation fluxio-différencielle, & elle deviendra $gp\gamma\dot{x} + gq\varphi\dot{x} + 2\gamma y\dot{y} + \lambda y^2\dot{x} - \frac{2my\dot{y}}{X} = 0$, ou $g\left(\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma - \frac{2m}{X}}\right)\dot{x} + \frac{\lambda}{2\gamma - \frac{2m}{X}}y^2\dot{x} + y\dot{y} = 0$. Faisons que cette équation soit la même, terme à terme, que celle-ci, $gp\dot{x} + y\dot{y} = 0$, & par-là nous aurons les deux équations suivantes, $\lambda = 0$, $\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma - \frac{2m}{X}} = p$; donc $\lambda\dot{x} = 0$;

donc $\gamma = M$; donc $\gamma\dot{x} = M\dot{x}$; donc $\varphi = M\dot{x} + N$. Mais φ doit être $= 0$ lorsque $\dot{x} = 0$, & $= 1$ lorsque $\dot{x} = X$; car au commencement du mouvement, la différence des arcs parcourus en temps proportionnels est nulle, & à la fin elle est égale à la différence totale des deux arcs; donc $N = 0$ & $M = \frac{1}{X}$; donc $\varphi = \frac{\dot{x}}{X}$ & $\gamma = \frac{1}{X}$. Je substitue ces

valeurs dans la ſeconde équation, & elle devient $\frac{p+qx}{2-2m} = p$, ou $(1-2m)\,p = qx$; donc $(1-2m)\,\frac{\dot{x}}{x} = \frac{q\dot{x}}{p}$, & par conſéquent $(1-2m)\,lx - (1-2m)\,lb = lp$; donc $b^{2m-1}\,x^{1-2m} = p$; donc $p\dot{x} = \dot{z} = b^{2m-1}\,x^{1-2m}\,\dot{x}$; donc enfin $z = e^{2m-1}\,x^{2-2m}$. Si $m = 0$, on aura $ez = x^2$, comme on le ſait depuis long temps; ſi $m = \frac{1}{2}$, on aura $z = x$, ou en général, ſi nous euſſions pris la FLuente autrement, $z = nx$.

EXEMPLE II.

Suppoſons à préſent que le mouvement ſe faſſe dans un milieu qui réſiſte en raiſon de la vîteſſe, & qu'on veuille une courbe où tous les temps ſoient égaux, l'équation ſera $(-gp \pm ny)\,\frac{\dot{x}}{y} = \dot{y}$, ou $gp\dot{x} \mp ny\dot{x} + y\dot{y} = 0$, & ſa différence $gpd\dot{x} + gq\dot{x}dx \mp nyd\dot{x} \mp n\dot{x}dy + yd\dot{y} + \dot{y}dy = 0$. Subſtituons pour dx & $d\dot{x}$, dy & $d\dot{y}$ leurs valeurs, & nous aurons cette équation-ci

$$gp\gamma\dot{x} + gq\varphi\dot{x} \mp 2n\gamma y\dot{x} + 2\gamma y\dot{y} + \lambda y^2\dot{x} = 0,$$

ou $g\,.\left(\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma}\right)\dot{x} \mp ny\dot{x} + \frac{\lambda}{2\gamma}\,y^2\dot{x} + y\dot{y} = 0$, dont les termes, comparés avec ceux de la première, donneront $\lambda = 0$ & $\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma} = p$.

Si on ſuit ces deux équations, comme dans l'exemple précédent, on trouvera $z = e^{-1}\,x^2$.

EXEMPLE III.

Soit la réſiſtance $= \frac{y^2}{a}$, & qu'on veuille la Tautochrone de cette hypothèſe, l'équation ſera $(-gp \pm \frac{1}{a}\,y^2)\,\frac{\dot{x}}{y} = \dot{y}$, ou $gp\dot{x} \mp \frac{1}{a}\,y^2\,\dot{x} + y\dot{y} = 0$; ſa différence ſera $gpd\dot{x}$

$+ gq\dot{x}dx \mp \frac{1}{n} y^2 d\dot{x} \mp \frac{2}{n} y\dot{x}dy + yd\dot{y} + \dot{y}dy = 0,$
& après la substitution l'on aura

$$gp\gamma\dot{x} + gq\varphi\dot{x} \mp \frac{3}{n}\gamma y^2 \dot{x} + 2\gamma y\dot{y} + \lambda y^2 \dot{x} = 0;$$

ou $g\left(\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma}\right)\dot{x} + \left(\frac{\mp\frac{3}{n}\gamma + \lambda}{2\gamma}\right) y^2 \dot{x} + y\dot{y} = 0;$

& en comparant $\frac{\mp\frac{3}{n}\gamma + \lambda}{2\gamma} = \mp\frac{1}{n}$ & $\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma} = p,$
donc 1.° $\mp\frac{1}{n}\gamma\dot{x} + \lambda\dot{x} = 0$, donc $\mp\frac{1}{n}\varphi + \gamma = M,$
ou $\pm\frac{1}{n}\dot{x} = \frac{\gamma\dot{x}}{\varphi \pm nM}$, donc $\pm\frac{1}{n}x = l(\varphi \pm nM)$
$+ lN$, & par conséquent $N\varphi \pm nNM = C^{\pm\frac{1}{n}x};$
& en remplissant les conditions que φ soit $= 0$ au commencement & $= 1$ à la fin, on aura $\pm nNM = 1$
& $N \pm nMN = C^{\pm\frac{1}{n}X}$, d'où l'on tirera

$$M = \pm\left(\frac{1}{nC^{\pm\frac{1}{n}X} - n}\right) \text{ \& } N = C^{\pm\frac{1}{n}X} - 1;$$

donc $\varphi = \frac{C^{\pm\frac{1}{n}x} - 1}{C^{\pm\frac{1}{n}X} - 1}$ & $\gamma = \frac{\pm\frac{1}{n}C^{\pm\frac{1}{n}x}}{C^{\pm\frac{1}{n}X} - 1}$. Donc

2.° $\frac{\pm\frac{1}{n}C^{\pm\frac{1}{n}x}\dot{x}}{C^{\pm\frac{1}{n}x} - 1} = \frac{q\dot{x}}{p}$, donc $l(C^{\pm\frac{1}{n}x} - 1)$
$= lp + lm$, & par conséquent $mp = C^{\pm\frac{1}{n}x} - 1$;
donc $mpx = mz = C^{\pm\frac{1}{n}x}x - x$, donc $mz = \pm nC^{\pm\frac{1}{n}x} - x \mp n$; & si l'on veut avoir une équation

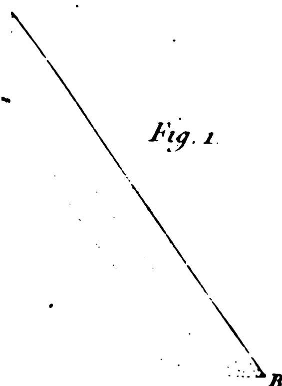
ſans quantité exponentielle, il n'y aura qu'à faire $\pm nC^{\pm\frac{1}{n}x} = mz \pm n + x$ & $\pm nC^{\pm\frac{1}{n}\dot{x}} = \frac{\pm mn\dot{z} \pm n\dot{x}}{\dot{x}}$, & on tirera $\pm mn\dot{z} = mz\dot{x} + x\dot{x}$.

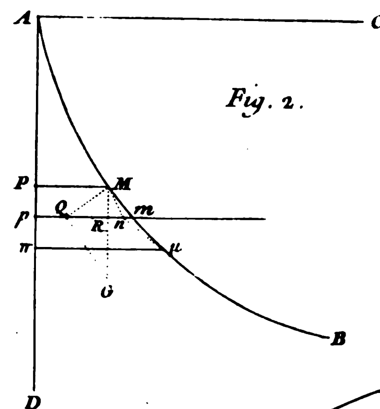
EXEMPLE IV.

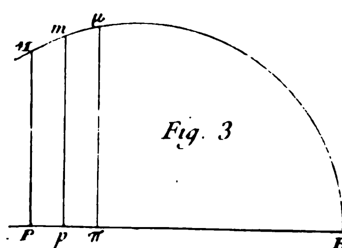
Soit la réſiſtance $= \frac{y^2 + my}{n}$, & trouvons encore la Tautochrone de cette hypothèſe, qui eſt celle de la nature, quoiqu'apparemment cette courbe ne puiſſe être d'aucun uſage, attendu que ſi les oſcillations de gauche à droite ſont iſochrones, celles de droite à gauche ne le ſeront pas. Dans ce cas-ci, nous aurons $(-gp \pm \frac{1}{n}y^2 \pm \frac{m}{n}y)\frac{\dot{x}}{y} = \dot{y}$, ou $gp\dot{x} \mp \frac{1}{n}y^2\dot{x} \mp \frac{m}{n}y\dot{x} + y\dot{y} = 0$. Prenons la différence $gpd\dot{x} + gq\dot{x}dx \mp \frac{1}{n}y^2 d\dot{x} \mp \frac{2}{n}y\dot{x}dy \mp \frac{m}{n}yd\dot{x} \mp \frac{m}{n}\dot{x}dy + yd\dot{y} + \dot{y}dy = 0$. Subſtituons, & elle deviendra $gp\gamma\dot{x} + gq\varphi\dot{x} \mp \frac{3}{n}\gamma y^2\dot{x} \mp \frac{2m}{n}\gamma y\dot{x} + 2\gamma y\dot{y} + \lambda y^2\dot{x} = 0$, ou $g(\frac{p\gamma + q\varphi}{2\gamma})\dot{x} + (\frac{\mp\frac{3}{n}\gamma + \lambda}{2\gamma})y^2\dot{x} \mp \frac{m}{n}y\dot{x} + y\dot{y} = 0$. Comparons, & nous trouverons les mêmes équations que dans l'hypothèſe précédente, ce qui prouve que ſa Tautochrone l'eſt auſſi de celle-ci.

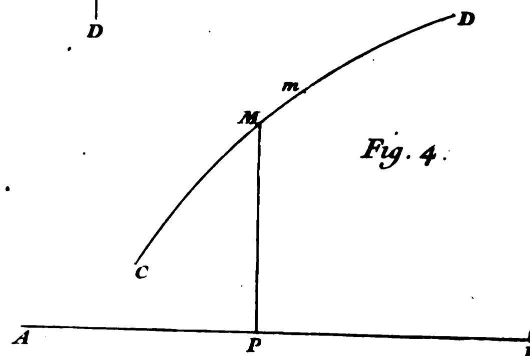
PREMIÈRE REMARQUE.

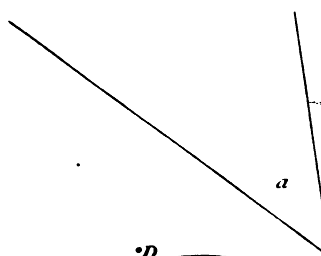
Soit en général la force le long des petits côtés de la courbe $= f$, la réſiſtance $= \rho$, le temps $= T$, & $dT = SdX$, & on aura $(-f \pm \rho)\frac{\dot{x}}{y} = \dot{y}$, ou $f\dot{x} \mp \rho\dot{x} + y\dot{y} = 0$, & $dy = \gamma y - \frac{S}{T}y$; mais il arrivera très-ſouvent que les deux équations fluxionnelles, qui dans les

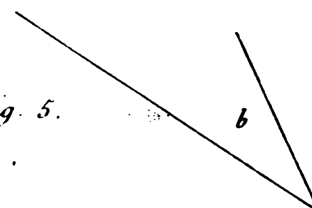

Fig. 1.
B

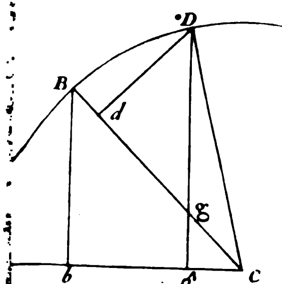

A
C
Fig. 2.
P
M
p
Q
m
R
n
π
μ
O
B
D

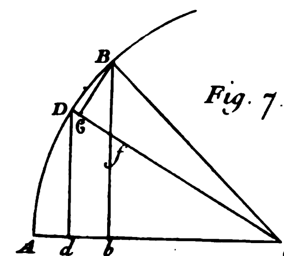

m
μ
Fig. 3
P
p
π
B

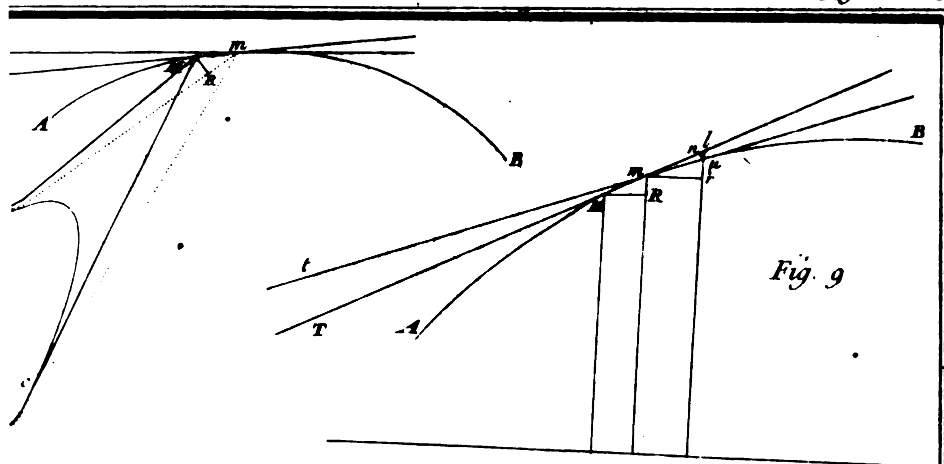

D
m
M
Fig. 4.
C
A
P
B

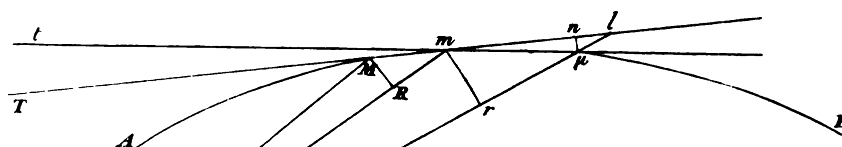

Fig. 5.
a

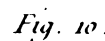

b

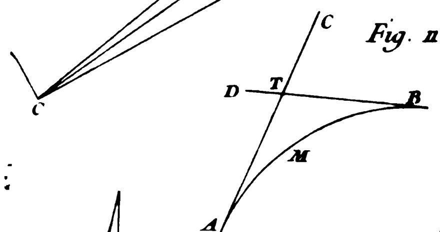

D
B
d
g
b
C

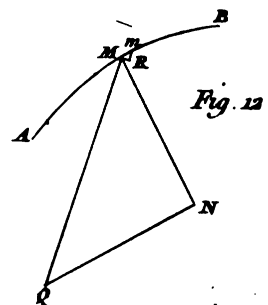

B
Fig. 7.
D
f
A
d
b
C

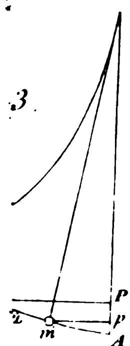

m
M
R
A
B
n
l
B
μ
r
R
t
T
A
Fig. 9

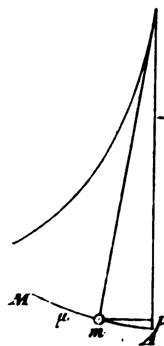

t
m
n
l
M
μ
T
R
r
A
B

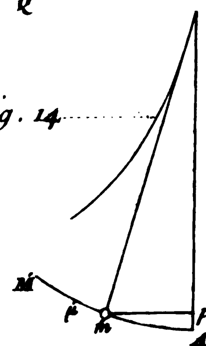

Fig. 10.


C
Fig. 11
D
T
B
M
A


B
m
M
R
Fig. 12.
A
N
Q


P
p
m
A


M
μ
m
p
A


Fig. 14.
M
μ
m
p
A

exemples précédens ont toûjours été comparables, ne le feront pas; alors il faudra, par le moyen de ces deux équations, faire disparoître les y, & ensuite, T ou z étant donné, tâcher de déterminer l'autre par les méthodes ordinaires, & en remplissant les deux conditions de φ.

Seconde Remarque.

Il est évident que si au lieu de l'équation des forces on avoit toute autre équation entre le paramètre A de la courbe AB, l'abscisse totale X, l'abscisse partiale x & l'ordonnée y, en termes finis ou en fluxions, la méthode précédente pourroit également servir à trouver non seulement ce que deviendroit $FL\ (\frac{\dot{x}}{y})$, mais toute autre fonction donnée de ces lignes (comme $FL\ (y\dot{x})$ ou $FL\ (\dot{x} + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$ ou, &c.) lorsque x deviendroit $= X$, ou réciproquement à faire que cette fonction devînt une quantité donnée, x devenant $= X$, & qu'ainsi il peut y avoir une infinité de problèmes qui dépendent de cette méthode fluxio-différencielle.



LE CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÉRE MÉTHODE.

Définitions & Propositions fondamentales.

THÉOREME I.

19 Nov. 1738. SOIT F une fonction quelconque de p, de x, de y, de z, *&c.* & soit la dimension de $F = e$, prenez la différence de cette fonction en faisant varier toutes les lignes qui la composent, vous aurez $dF = Adp + Bdx + Cdy + Ddz +$ *&c.* Je dis que $Ap + Bx + Cy + Dz +$ *&c.* $= eF$.

DÉMONSTRATION.

F & F' étoient deux fonctions pareilles, la première des lignes p, x, y, z, *&c.* la seconde des lignes infiniment peu, plus ou moins grandes p', x', y', z', &c. ou $p + dp, x + dx, y + dy, z + dz$, &c. on a pris la différence de ces deux fonctions, & on a eu

$F' - F$ ou $dF = Adp + Bdx + Cdy + Ddz +$ &c.

Nous pouvons supposer que les fonctions F', F étoient semblables, nous aurons par la propriété des fonctions semblables $F' : F :: p'^e : p^e$ ou $F' - F : F :: p'^e - p^e : p^e$ ou $dF : F :: edp : p$; donc $dF = eF\frac{dp}{p}$: par l'hypothèse, $x' : x :: p' : p$, ou $dx : x :: dp : p$; donc $dx = \frac{xdp}{p}$, par la même raison $dy = \frac{ydp}{p}$, $dz = \frac{zdp}{p}$, &c.

En substituant pour dF, dx, dy, dz, &c. ces valeurs $\frac{eFdp}{p} = Adp + Bx\frac{dp}{p} + Cy\frac{dp}{p} + Dz\frac{dp}{p} +$ &c.

ou

ou $eF = Ap + Bx + Cy + Dz +$ &c. C. Q. F. D.

Outre le grand usage que nous ferons de ce théorème dans la suite, voici un corollaire que j'en tirai dès que je l'eus trouvé.

COROLLAIRE.

Soit l'élément ydx, & que y soit une fonction quelconque de a & de x, dont la dimension soit $= e - 1$ (s'il entroit d'autres lignes constantes dans la fonction y, on les exprimeroit par ma, na, &c.): je suppose que F est l'intégrale de l'élément ydx; avant de prendre la différence de F, l'on pouvoit diviser cette fonction par a^e, & faire ensuite varier a de même que x, on auroit eu $\frac{ydx}{a^e} + fda = d\left(\frac{F}{a^e}\right)$, f est une fonction de a & de x qui est inconnue; mais par le théoreme on aura $\frac{yx}{a^e} + fa = 0$, donc $f = \frac{-xy}{a^{e+1}}$; on auroit donc eu $\frac{y}{a^e}dx + \frac{-xy}{a^{e+1}}da = d\left(\frac{F}{a^e}\right)$; donc $\int \frac{y}{a^e}dx = \int \frac{-xy}{a^{e+1}}da$, donc $\int ydx = - a^e x \int \frac{y}{a^{e+1}}da$.

AVERTISSEMENT.

Comme nous allons avoir à différencier un grand nombre de fonctions indéterminées, voici une manière d'exprimer les fonctions qui naîtront de ces différenciations, laquelle nous sera d'un grand secours.

Soit μ une fonction de plusieurs quantités p, x, y, z, &c. pour désigner le coëfficient de dx dans la différence de μ, j'écrirai $\frac{d\mu}{dx}$; pour désigner celui de dy, j'écrirai $\frac{d\mu}{dy}$, &c.

Par la même raison, pour désigner le coëfficient de dx dans la différence de $\frac{d\mu}{dx}$, j'écrirai $\frac{dd\mu}{dx^2}$; pour désigner

celui de dy, j'écrirai $\frac{dd\mu}{dxdy}$ ou $\frac{dd\mu}{dydx}$; car, comme nous le démontrerons bien-tôt, ces deux expressions ne sont qu'une même chose, & j'en userai toûjours de même.

THÉORÉME II.

Soit toûjours μ une fonction de p, de x, de y, de z, &c. le coëfficient de dx dans la différence de $\int \mu dx$ est μ; mais quel est, par exemple, celui de dy?

Je dis que $\frac{d\int \mu dx}{dy} = \int \frac{d\mu}{dy} dx$.

DÉMONSTRATION.

Car en général $d\int \mu dx = \int \mu' dx' - \int \mu dx = \int (\mu' dx' - \mu dx) = \int d(\mu dx) =$ (en ne faisant varier que y) $\int \frac{d\mu}{dy} dy dx$; donc $\frac{d\int \mu dx}{dy} = \int \frac{d\mu}{dy} dx$. C. Q. F. D.

THÉORÉME III.

Je suppose que Adx & Bdy soient deux termes de la différence d'une même fonction φ de p, de x, de y, de z, &c. & je dis que $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$.

DÉMONSTRATION.

On aura $\int Adx + a = \varphi$, $\int Bdy + b = \varphi$ (a est une fonction de p, y, z, &c. & b est une fonction de p, x, z, &c.); donc $\int Adx + a = \int Bdy + b$. Je différencie cette dernière équation en faisant varier x; j'aurai $A = \int \frac{dB}{dx} dy + \frac{db}{dx}$. Je différencie derechef en faisant varier y; j'aurai $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Si on avoit exprimé A par $\frac{d\varphi}{dx}$ & B par $\frac{d\varphi}{dy}$, on auroit

ou $\frac{dd\varphi}{dx\,dy} = \frac{dd\varphi}{dy\,dx}$, ce que nous avions promis de démontrer.

THÉORÉME IV.

Je suppose que Mdx, $AMdy$ & $BMdz$ soient trois termes de la différence d'une même fonction F, de p, de x, de y, de z, de u, &c.

je dis que $A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0$.

DÉMONSTRATION.

Par le théorème précédent on aura $\frac{dM}{dy} = A\frac{dM}{dx} + M\frac{dA}{dx}$, $\frac{dM}{dz} = B\frac{dM}{dx} + M\frac{dB}{dx}$, & $A\frac{dM}{dz} + M\frac{dA}{dz} = B\frac{dM}{dy} + M\frac{dB}{dy}$.

En égalant les deux valeurs de $\frac{dM}{dz}$, on aura

$$M\left(A\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy}\right) + B\left(A\frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy}\right) = 0;$$

& en substituant $- M\frac{dA}{dx}$ au lieu de $A\frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy}$, on aura $A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Si Mdx, $AMdy$, $BMdz$, $CMdu$ sont quatre termes de la différence de F,

on aura $A\frac{dB}{dx} - B\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} - \frac{dB}{dy} = 0$,

$A\frac{dC}{dx} - C\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{du} - \frac{dC}{dy} = 0$,

& $B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{du} - \frac{dC}{dz} = 0$;

l'on trouvera de même les conditions pour cinq termes de la différence de F, pour six, &c.

Les théorèmes précédens (excepté le théorème II, qui n'eſt de moi que par la manière générale de le propoſer & de le démontrer), les démonſtrations de ces théorèmes, leurs corollaires, & les problèmes ſuivans, étoient nouveaux & n'étoient connus d'aucuns Géomètres au 19 Novembre 1738, lorſque je les publiois à Paris par écrit & verbalement, d'où on les envoyoit à M.[rs] Bernoulli, à M. Euler, &c.



LE CALCUL DES ÉQUATIONS
AUX PREMIÉRES DIFFÉRENCES.

PROBLÉME I.

Soit $dx + \alpha dy = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α étant une fonction de dimension nulle de x & de y; la question se réduit à trouver une fonction φ de x & de y, dont la différence divisée par le coëfficient de dx soit $dx + \alpha dy$. Si on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit dx, on auroit eu $\mu dx + \alpha \mu dy = d\varphi$; μ est une fonction de x & de y qui est inconnue.

Je suppose que la dimension de φ étoit $= e$, j'aurai $\mu x + \alpha \mu y = e\varphi$;

donc $\frac{\frac{1}{e} d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{x + \alpha y} dx + \frac{\alpha}{x + \alpha y} dy.$

Lorsqu'on aura la fonction φ, on la fera $= ap^e$, & le nombre a servira à remplir une des conditions du problème auquel appartiendra l'équation proposée.

Si e étoit $= 0$, α seroit $= \frac{-x}{y}$, & dans ce cas, toute fonction de dimension nulle de x & de y seroit $= \varphi$.

PROBLÉME II.

Soit $dx + \alpha dy = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α étant une fonction de dimension nulle de x, de y & de p; la question se réduit à trouver une fonction φ de p, de x & de y, dont la différence, en faisant p constant, divisée par le coëfficient de dx, soit $dx + \alpha dy$. Si l'on n'eût pas fait $dp = 0$, on auroit eu $dx + \alpha dy + \pi dp = 0$; π est une fonction de dimension nulle de p, de x & de y, qui est inconnue; & si l'on n'eût pas divisé par la fonction qui

multiplioit dx, on auroit eu $\mu dx + \alpha\mu dy + \pi\mu dp = d\varphi$; μ est une fonction de p, de x & de y, qui est aussi inconnue.

Je suppose que la dimension de φ étoit $= e$, j'aurai $\mu x + \alpha\mu y + \pi\mu p = e\varphi$;

donc $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{x + y\alpha + p\pi}dx + \frac{\alpha}{x + y\alpha + p\pi}dy + \frac{\pi}{x + y\alpha + p\pi}dp$.

Il ne s'agit donc plus que d'avoir la fonction π, & nous savons *(Théorème IV)* que cette fonction doit être telle que $\alpha\frac{d\pi}{dx} - \pi\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dp} - \frac{d\pi}{dy} = 0$.

Si l'on suppose que la dimension de φ étoit $= 0$ (ce qui se peut toûjours, sans rien changer à la fonction donnée α; car de quelque dimension que fût φ, l'on pouvoit, avant d'en prendre la différence, multiplier ou diviser cette fonction par une puissance de p qui l'auroit rendue de dimension nulle, & on auroit toûjours eu le même α) on aura $\pi = \frac{-x - y\alpha}{p}$. Mais parmi toutes les valeurs possibles de π, celle-là est la seule qui ne peut nous servir, & il faut nécessairement en trouver quelqu'autre valeur.

Pour cet effet, considérons plus particulièrement que nous n'avons encore fait de quelle manière on peut concevoir qu'on est arrivé de la fonction φ à l'équation $dx + \alpha dy = 0$; on avoit $\varphi =$ fonction de p, de x & de y.

On a différencié en faisant tout varier, & on a eu $Adx + Bdy + Cdp = d\varphi$; on a réduit les trois fonctions A, B, C au même dénominateur, & on a eu $\frac{I}{D}(Edx + Fdy + Gdp) = d\varphi$; on a divisé les fonctions E, F, G par leur plus grand facteur commun, & on a eu $\frac{H}{D}(Idx + Kdy + Ldp) = d\varphi$; on a encore divisé les fonctions I & K par leur plus grand facteur commun, & on a eu $\frac{H}{D}(MQdx + NQdy + Ldp) = d\varphi$; on

a fait $d\varphi = 0$, & on a eu $dx + \frac{N}{M} dy + \frac{L}{QM} dp = 0$; enfin on a fait $dp = 0$, & on a eu $dx + \frac{N}{M} dy = 0$; donc $\alpha = \frac{N}{M}$, & $\pi = \frac{L}{QM}$.

Je substitue ces valeurs de α & de π dans l'équation $\alpha \frac{d\pi}{dx} - \pi \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dp} - \frac{d\pi}{dy} = 0$; j'aurai

$$NQ\frac{dL}{dx} - NL\frac{dQ}{dx} - QL\frac{dN}{dx} + Q^2\left(M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp}\right) - MQ\frac{dL}{dy} + ML\frac{dQ}{dy} + QL\frac{dM}{dy} = 0.$$

La fonction α étant donnée, on aura les fonctions N & M; si de plus la fonction Q étoit donnée, on auroit très-aisément la fonction L par la méthode des indéterminées; l'on prendroit pour L une fonction de p, x, y, de même dimension que QM, la plus générale qu'il seroit possible, l'on substitueroit cette valeur de L dans l'équation entre M, N, L, Q, & l'on détermineroit les coëfficiens de L par des équations du premier degré, en satisfaisant à cette équation. Mais comme la fonction Q est inconnue de même que L, l'on fera 1.° $Q = 1$; on aura

$$N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp} - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = 0.$$

2.° $Q = p$, on aura

$$N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + p\left(M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp}\right) - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = 0.$$

3.° S'il n'entre aucun radical dans N ni dans M, l'on fera $Q = ap + bx + cy$.

4.° $Q = ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy + fy^2$.

5.° $Q =$, &c. & l'on déterminera les coëfficiens de L comme si ceux de Q étoient donnés; ensuite l'on verra quels doivent être les coëfficiens de Q, pour qu'il n'y ait pas de contradiction dans ceux de L.

S'il entre des radicaux dans les fonctions N, M (après avoir essayé les hypothèses de $Q = 1$ & de $Q = p$, qui sont très-générales) l'on fera entrer ces mêmes radicaux dans les valeurs successives de Q & de L, comme autant de lignes, & de la manière la plus générale qu'il sera possible.

Ayant π, on aura $\frac{1}{c} l\varphi = \int \frac{1}{x + y\alpha + p\pi} dx + yp$,

$$\frac{1}{c} l\varphi = \int \frac{\alpha}{x + y\alpha + p\pi} dy + px,$$

$$\frac{1}{c} l\varphi = \int \frac{\pi}{x + y\alpha + p\pi} dp + xy.$$

Par yp, j'entends une fonction de y & de p, par px une une fonction de p & de x, & par xy une fonction de x & de y: ma manière est d'employer des signes parlans, autant que cela se peut.

Ces trois fonctions doivent être telles que les trois valeurs de $\frac{1}{c} l\varphi$ ne soient qu'une même chose.

Soit, par exemple, l'équation $dx + \frac{ap + bx + cy}{\alpha p + \beta x + \gamma y} dy = 0$; je suppose $Q = 1$; j'aurai $N = ap + bx + cy$, $M = \alpha p + \beta x + \gamma y$, $L = Ap + Bx + Cy$, $\frac{dN}{dx} = b$, $\frac{dN}{dp} = a$, $\frac{dM}{dy} = \gamma$, $\frac{dM}{dp} = \alpha$, $\frac{dL}{dx} = B$, $\frac{dL}{dy} = C$; & en substituant dans l'équation

$$N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + M\frac{dN}{dp} - N\frac{dM}{dp} - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = 0,$$

j'aurai $(aB - \alpha C - bA + \gamma A)\, p + (-b\alpha + \beta a - \beta C + \gamma B)\, x + (cB - c\alpha + a\gamma - bC)\, y = 0$; donc $aB - \alpha C - (b - \gamma) A = 0$, $-\beta C + \gamma B = b\alpha - a\beta$, $cB - bC = c\alpha - a\gamma$; donc $A = \frac{-a(b\alpha - a\beta)}{c\beta - b\gamma}$, $B = \frac{\beta(c\alpha - a\gamma) - b(b\alpha - a\beta)}{c\beta - b\gamma}$, $C = \frac{\gamma(c\alpha - a\gamma) - c(b\alpha - a\beta)}{c\beta - b\gamma}$;

donc

donc $\pi = \frac{-a(b\alpha - a\beta)p + [\beta.(c\alpha - a\gamma) - b.(b\alpha - a\beta)]x + [\gamma.(c\alpha - a\gamma) - c.(b\alpha - a\beta)]y}{(c\beta - b\gamma(\alpha p + \beta x + \gamma y)}$.

Soit l'équation $dx + \frac{ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy}{\alpha p^2 + \beta px + \gamma py - dxy - ey^2} dy = 0$, je suppose $Q = p$; j'aurai $N = ap^2 + bpx + cpy + dx^2 + exy$, $M = \alpha p^2 + \beta px + \gamma py - dxy - ey^2$, $L = Ap^3 + Bp^2x + Cp^2y + Dpx^2 + Epxy + Fpy^2 + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3$;
$\frac{dN}{dx} = bp + 2dx + ey$, $\frac{dN}{dp} = 2ap + bx + cy$,
$\frac{dM}{dy} = \gamma p - dx - 2ey$, $\frac{dM}{dp} = 2\alpha p + \beta x + \gamma y$,
$\frac{dL}{dx} = Bp^2 + 2Dpx + Epy + 3Gx^2 + 2Hxy + Iy^2$,
$\frac{dL}{dy} = Cp^2 + Epx + 2Fpy + Hx^2 + 2Ixy + 3Ky^2$;
& en substituant ces valeurs dans l'équation
$N\frac{dL}{dx} - L\frac{dN}{dx} + pM\frac{dN}{dp} - pN\frac{dM}{dp} - M\frac{dL}{dy} + L\frac{dM}{dy} = 0$,
j'aurai $(aB - bA + 2a\alpha - 2a\alpha - \alpha C + \gamma A)p^4 + (2aD + bB - bB - 3dA + 2a\beta + b\alpha - 2b\alpha - \beta a - \alpha E - \beta C + \gamma B - dA)p^3x + (aE + cB - bC - eA + 2a\gamma + c\alpha - 2c\alpha - a\gamma - 2\alpha F - \gamma C + \gamma C - 3eA)p^3y + (3aG + 2bD + dB - bD - 2dB + b\beta - 2d\alpha - b\beta - \alpha H - \beta E + \gamma D - dB)p^2x^2 + (2aH + bE + 2cD + eB - bE - 2dC - eB - 2aD + b\gamma + c\beta - 2e\alpha - c\beta - b\gamma - 2\alpha I - 2\beta F - \gamma E + dC + \gamma E - dC - 2eB)p^2xy + (aI + CE - bF - eC - 2ae + c\gamma - c\gamma - 3\alpha K - 2\gamma F + eC + \gamma F - 2eC)p^2y^2 + (3bG + 2dD - bG - 2dD - d\beta - \beta H + \gamma G - dD)px^3$

$+ (2bH + 3cG + dE + 2eD - bH - 2dE - eD - bd - e\beta - d\gamma - 2\beta I - \gamma H + dE + \gamma H - dE - 2eD)\, px^2y + (bI + 2cH + eE - bI - 2dF - eE - be - cd - e\gamma - 3\beta K - 2\gamma I + 2dF + eE + \gamma I - dF - 2eE)\, pxy^2 + (cI - bK - eF - ce - 3\gamma K + 2eF + \gamma K - 2eF)\, py^3 + (3dG - 2dG - dG)\, x^4 + (2dH + 3eG - 2dH - eG + dH - dH - 2eG)\, x^3y + (dI + 2eH - 2dI - eH + 2dI + eH - dI - 2eH)\, x^2y^2 + (eI - 2dK - eI + 3dK + 2eI - dK - 2eI)\, xy^3 - (eK + 3eK - 2eK)\, y^4 = 0.$

Donc $aB - (b - \gamma)\, A - \alpha C = 0$, $2aD + \gamma B - 3dA - aE - \beta C = b\alpha - a\beta$, $aE + cB - bC - 3eA - 2\alpha F = c\alpha - a\gamma$, $3aG + (b + \gamma) . D - 2dB - \alpha H - \beta E = 2d\alpha$, $aH + cD - eB - dC - \alpha I - \beta F = e\alpha + ad$, $aI + cE - (b + \gamma) . F - 2eC - 3\alpha K = 2ae$, $(2b + \gamma) . G - dD - \beta H = d\beta$, $bH + 3cG - dE - 2\beta I = d\gamma + e\beta + bd$, $- \gamma I + 2cH - eE - dF - 3\beta K = e\gamma + cd + be$, $CI - (b + 2\gamma) . K - eF = ce$; & au moyen de ces équations, lorſque les coëfficiens $a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma$, ſeront donnés, l'on déterminera les coëfficiens $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$; par conſéquent on aura π.

Remarque I.

Nous avons vû que l'on pouvoit toûjours prendre

$\pi = \frac{-x-y\alpha}{p}$, & avoir $dx + \alpha dy + \frac{-x-y\alpha}{p} dp = 0$; par conſéquent, au lieu de l'équation propoſée $dx + \alpha dy = 0$, l'on pourra ſe propoſer celle-ci, $dx + \frac{-x-y\alpha}{p} dp = 0$ à intégrer, ou celle-ci, $dy + \frac{-x-y\alpha}{p\alpha} dp = 0$.

Remarque II.

Lorſqu'il entre des radicaux dans α, & que l'on veut avoir une équation où il n'y ait pas de radicaux, au lieu de transformer cette équation-ci, $dx + \alpha dy = 0$, l'on pourra transformer celle-ci, $dx + \alpha dy + \frac{-x-y\alpha}{p} dp = 0$. L'on égalera le radical que l'on voudra faire diſparoître, à une fonction rationelle & homogène de p, de x, de y, & d'une nouvelle ligne z, & l'on choiſira cette fonction telle que l'on puiſſe avoir p ou x ou y par une équation du premier degré. Je ſuppoſe que ce ſoit p que l'on ait ainſi; en différenciant & faiſant varier x, y, z, on aura dp; on ſubſtituera pour p & dp leurs valeurs, & à la place de l'équation entre p, x, y, dp, dx, dy, on en aura une entre x, y, z, dx, dy, dz, dans laquelle il y aura un radical de moins, & où l'on ſera maître de faire dx ou dy ou dz égal à o, comme on l'étoit dans l'autre de faire dx ou dy ou dp égal à o: lorſqu'on aura intégré cette équation, l'on chaſſera z, & on aura la vraie intégrale entre p, x, y.

Remarque III.

Lorſqu'on a l'élément ydx, y étant une fonction de a & de x, dont la dimenſion eſt $= e - 1$, dans laquelle il entre des radicaux, & que l'on veut faire diſparoître ces radicaux, c'eſt-à-dire, avoir à la place de l'élément ydx, un autre élément à intégrer, dans lequel il n'y ait aucun radical, au lieu de transformer l'élément ydx,

comme l'on tâche de faire, l'on pourra transformer l'équation
$\frac{y}{a^e}\,dx + \frac{-xy}{a^{e+1}}\,da = d\,(\frac{F}{a^e})$.

PROBLÉME III.

Soit $dx + \alpha dy + \beta dz = o$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α & β étant des fonctions de dimension nulle de x, de y & de z; je suppose que les fonctions α & β sont telles que $\alpha\,\frac{d\beta}{dx} - \beta\,\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\beta}{dy} = o$, sans quoi le problème seroit absurde.

La question se réduit à trouver une fonction φ de x, de y & de z, dont la différence, divisée par le coëfficient de dx, soit $dx + \alpha dy + \beta dz$. Si l'on n'avoit pas divisé par la fonction qui multiplioit dx, on auroit eu $\mu dx + \alpha\mu dy + \beta\mu dz = d\varphi$.

μ est une fonction de x, de y & de z, qui est inconnue.

Je suppose que la dimension de φ étoit $= e$, on aura $\mu x + \alpha\mu y + \beta\mu z = e\varphi$; donc

$$\frac{\frac{1}{e}\,d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{x+\alpha y+\beta z}\,dx + \frac{\alpha}{x+\alpha y+\beta z}\,dy + \frac{\beta}{x+\alpha y+\beta z}\,dz.$$

Lorsqu'on aura la fonction φ, on la fera $= ap^e$, & le problème sera résolu.

Si e étoit $= o$, on auroit $\beta = \frac{-x-y\alpha}{z}$; dans ce cas, il faudroit trouver une autre valeur de β qui satisfît à l'équation $\alpha\,\frac{d\beta}{dx}$ — &c. $= o$, & lorsqu'on auroit φ, on feroit cette fonction $= az^e$.

PROBLÉME IV.

Soit $dx + \alpha dy + \beta dz = o$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α & β étant des fonctions de dimension nulle de x, de y, de z & de p; je suppose toûjours que les fonctions

α & β sont telles que $\alpha \frac{d\beta}{dx} - \beta \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\beta}{dy} = 0$, sans quoi elles ne pourroient pas appartenir à la même intégrale.

La question se réduit à trouver une fonction φ de p, de x, de y & de z, dont la différence, en faisant $dp = 0$, divisée par le coëfficient de dx, soit $dx + \alpha dy + \beta dz$. Si l'on n'avoit pas fait $dp = 0$, on auroit eu $dx + \alpha dy + \beta dz + \pi dp = 0$.

π est une fonction de dimension nulle de p, de x, de y & de z, qui est inconnue, mais qui doit être telle que $\alpha \frac{d\pi}{dx} - \pi \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dp} - \frac{d\pi}{dy} = 0$, & $\beta \frac{d\pi}{dx} - \pi \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{dp} - \frac{d\pi}{dz} = 0$; & si l'on n'avoit pas divisé par la fonction qui multiplioit dx, on auroit eu $\mu dx + \alpha\mu dy + \beta\mu dz + \pi\mu dp = d\varphi$.

Je suppose que la dimension de φ étoit $= e$, j'aurai $\mu x + \alpha\mu y + \beta\mu z + \pi\mu p = e\varphi$; donc $\frac{\frac{1}{e} d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{x + \alpha y + \beta z + \pi p} dx + \frac{\alpha}{x + \alpha y + \beta z + \pi p} dy + \frac{\beta}{x + \alpha y + \beta z + \pi p} dz + \frac{\pi}{x + \alpha y + \beta z + \pi p} dp$. Tout se réduit donc à trouver, par le moyen des deux équations entre α, β & π, une valeur de π autre que $\frac{-x - \alpha y - \beta z}{p}$.

Soit $\alpha = \frac{N}{M}$, $\beta = \frac{P}{M}$, on aura $\pi = \frac{L}{QM}$, & il ne s'agira que d'avoir Q, qui fort souvent sera $= 1$ ou $= p$; car ayant Q, on aura L par la méthode des indéterminées, comme dans le problème II.



CALCUL DES ÉQUATIONS
AUX SECONDES DIFFÉRENCES.
PROBLÉME I.

SOIT $ddx + \alpha ddy + A = 0$, l'équation que l'on propoſe d'intégrer, α & A étant des fonctions de x, de y, de dx & dé dy, dont la dimenſion eſt, ſavoir, celle de $\alpha = 0$, & celle de $A = 1$.

La queſtion ſe réduit à trouver une fonction φ de x, de y, de dx & de dy, dont la différence, en faiſant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, diviſée par le coëfficient de ddx, ſoit $ddx + \alpha ddy + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, on avoit fait la différence de $x = \partial x$ & celle de $y = \partial y$, on auroit eu $ddx + \alpha ddy + \beta \partial x + \gamma \partial y = 0$.

β & γ ſont des fonctions de x, de y, de dx & de dy, qui ſont inconnues, mais qui doivent être telles que $\beta dx + \gamma dy = A$; & ſi l'on n'avoit pas diviſé par la fonction qui multiplioit ddx, on auroit eu $\mu ddx + \alpha\mu ddy + \beta\mu\partial x + \gamma\mu\partial y = d\varphi$.

μ eſt une fonction de x, de y, de dx & de dy qui eſt auſſi inconnue.

Je ſuppoſe que φ étoit une fonction infiniment petite d'un ordre $= e$, & que ſa dimenſion en x & y étoit $= f$, j'aurai $\mu dx + \alpha\mu dy = e\varphi$, & $\beta\mu x + \gamma\mu y = f\varphi$; donc $\frac{f}{e}(dx + \alpha dy) = \beta x + \gamma y$, donc $\beta = \frac{-\frac{f}{e}dy(dx + \alpha dy) + yA}{ydx - xdy}$, $\gamma = \frac{\frac{f}{e}dx(dx + \alpha dy) - xA}{ydx - xdy}$;

donc $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{dx + \alpha dy}ddx + \frac{\alpha}{dx + \alpha dy}ddy + \frac{-\frac{f}{e}dy(dx + \alpha dy) + yA}{(ydx - xdy)(dx + \alpha dy)}\partial x + \frac{\frac{f}{e}dx(dx + \alpha dy) - xA}{(ydx - xdy)(dx + \alpha dy)}\partial y$;

& les fonctions données α & A, pour pouvoir appartenir à la même fonction φ, devront être telles que

$$\frac{d\left(\frac{1}{dx+\alpha dy}\right)}{\partial x} = \frac{d\left[\frac{-\frac{f}{e}dy(dx+\alpha dy)+yA}{(ydx-xdy):(dx+\alpha dy)}\right]}{ddx}$$, ou, ce qui revient au même, telles que $\frac{f}{e}(dx+\alpha dy)^2 = (xdy-ydx)\left(dx\frac{d\alpha}{\partial x}+dy\frac{d\alpha}{\partial y}\right)+(dx+\alpha dy)\left(x\frac{dA}{ddx}+y\frac{dA}{ddy}\right)-A\left[x.\left(1+dy\frac{d\alpha}{ddx}\right)+y.\left(\alpha+dy\frac{d\alpha}{ddy}\right)\right]$.

Lorsqu'on aura la fonction φ, on la fera $= ap^f dq^e$, & le nombre a servira à remplir une des conditions du problème auquel appartiendra l'équation proposée.

Examinons présentement les différens cas particuliers qui peuvent arriver.

Il peut se faire que e étoit $= 0$, f ne l'étant pas; on aura $\alpha = \frac{-dx}{dy}$, & l'équation proposée sera $ddx + \frac{-dx}{dy}ddy + A = 0$; on aura $\frac{\frac{1}{f}d\varphi}{\varphi} = \frac{dy}{yA-(ydx-xdy)\mathfrak{C}}ddx + \frac{-dx}{yA-(ydx-xdy)\mathfrak{C}}ddy + \frac{\mathfrak{C}dy}{yA-(ydx-xdy)\mathfrak{C}}\partial x + \frac{A-\mathfrak{C}dx}{yA-(ydx-xdy)\mathfrak{C}}\partial y$, & la fonction $\mathfrak{C}$ devra être telle que

$$-dx\frac{d\mathfrak{C}}{\partial x}-dy\frac{d\mathfrak{C}}{\partial y}+\mathfrak{C}^2+A\frac{d\mathfrak{C}}{ddx}-\mathfrak{C}\frac{dA}{ddx}+\frac{dA}{\partial x}=0.$$

Ayant $\mathfrak{C}$, on aura φ, & on fera cette fonction $= ap^f$. Le cas de $f = 0$, e ne l'étant pas, est compris dans le cas général.

Il peut se faire que e & f étoient tous les deux en même temps $= 0$; on aura $\mathfrak{C} = \frac{yA}{ydx-xdy}$, $\gamma = \frac{-xA}{ydx-xdy}$, donc $\mu ddx + \frac{-\mu dx}{dy}ddy + \mu.\frac{yA}{ydx-xdy}\partial x + \mu.\frac{-xA}{ydx-xdy}\partial y = d\varphi$,

& la fonction μ devra être telle que

$$\frac{d\mu}{\partial x} = \mu \frac{d\left(\frac{yA}{ydx - xdy}\right)}{ddx} + \left(\frac{yA}{ydx - xdy}\right)\frac{d\mu}{ddx}.$$

Ayant μ, on aura φ, & l'on fera cette fonction $= a$. Enfin il peut se faire qu'on ait fait dy constant, & que l'équation proposée soit $ddx + A = 0$; dans ce cas, toute fonction finie de dimension nulle qui satisfera à l'équation $\frac{f}{e}(dx + \alpha dy)^{2} = \&c.$ pourra être prise pour α; & comme $\frac{-dx}{dy}$ satisfait généralement à cette équation, au lieu de l'équation $ddx + A = 0$, on pourra toûjours prendre celle-ci, $ddx + \frac{-dx}{dy}ddy + A = 0$; mais si l'on pouvoit trouver quelqu'autre valeur de α, lorsqu'on auroit φ, l'on feroit cette fonction $= ap^{f}\, dy^{e}$.

PROBLÉME II.

Soit $ddx + \alpha ddy + A = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α & A étant des fonctions de x, de y, de dx, de dy & de p, dont la dimension est, savoir, celle de $\alpha = 0$, & celle de $A = 1$.

La question se réduit à trouver une fonction φ de p, de x, de y, de dx & de dy, dont la différence, en faisant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, & différence de $p = 0$, divisée par le coëfficient de ddx, soit $ddx + \alpha ddy + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, & celle de $p = 0$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, & celle de $p = dp$, on auroit eu $ddx + \alpha ddy + \beta\partial x + \gamma\partial y + \pi dp = 0$.

β, γ & π sont des fonctions de p, de x, de y, de dx & de dy, qui sont inconnues; mais les fonctions β, γ doivent être telles que $\beta dx + \gamma dy = A$; & si on n'avoit pas

pas divisé par la fonction qui multiplioit ddx, on auroit eu $\mu ddx + \alpha\mu ddy + \beta\mu\partial x + \gamma\mu\partial y + \pi\mu dp = d\varphi$.

Je suppose que la dimension de φ en dx & dy étoit $= e$, & qu'en p, x, y, elle étoit $= f$; j'aurai $\mu dx + \alpha\mu dy = e\varphi$, & $\beta\mu x + \gamma\mu y + \pi\mu p = f\varphi$; donc $\frac{f}{e}(dx + \alpha dy) = \beta x + \gamma y + \pi p$, &

$$\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{dx + \alpha dy}ddx + \frac{\alpha}{dx + \alpha dy}ddy + \frac{\beta}{dx + \alpha dy}\partial x + \frac{A - \beta dx}{dy(dx + \alpha dy)}\partial y + \frac{\frac{f}{e}dy(dx + \alpha dy) - yA + (ydx - xdy)\beta}{p\,dy\,(dx + \alpha dy)}dp.$$

J'ai substitué dans cette équation pour γ sa valeur $\frac{A - dx\beta}{dy}$, je fais $\frac{d\left(\frac{1}{dx + \alpha dy}\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{\beta}{dx + \alpha dy}\right)}{ddx}$, & $\frac{d\left(\frac{1}{dx + \alpha dy}\right)}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{A - dx\beta}{dy(dx + \alpha dy)}\right)}{ddx}$, ou $-dy\frac{d\alpha}{\partial x} = (dx + \alpha dy)\frac{d\beta}{ddx} - \beta\left(1 + dy\frac{d\alpha}{ddx}\right)$ & $-dy^2\frac{d\alpha}{\partial y} = (dx + \alpha dy)\frac{dA}{ddx} - A\left(1 + dy\frac{d\alpha}{ddx}\right) - \beta(dx + \alpha dy) - dx(dx + \alpha dy)\frac{d\beta}{ddx} + dx\beta\left(1 + dy\frac{d\alpha}{ddx}\right)$; d'où je tire $\beta = \frac{dy\left(dx\frac{d\alpha}{\partial x} + dy\frac{d\alpha}{\partial y}\right) + (dx + \alpha dy)\frac{dA}{ddx} - \left(1 + dy\frac{d\alpha}{ddx}\right)A}{dx + \alpha dy}$;

$$\& \frac{d\beta}{ddx} = \frac{\left\{\begin{matrix} dy^2\left[\left(1 + dy\frac{d\alpha}{ddx}\right).\frac{d\alpha}{\partial y} - \left(\alpha + dy\frac{d\alpha}{ddy}\right).\frac{d\alpha}{\partial x}\right)\right] + \\ (dx + \alpha dy)\left(1 + dy\frac{d\alpha}{ddx}\right)\frac{dA}{ddx} - \left(1 + dy\frac{d\alpha}{ddx}\right)^2 A \end{matrix}\right\}}{(dx + \alpha dy)^2}.$$

Si on prend la différence de la valeur de β, en faisant varier dx, on aura deux expressions de $\frac{d\beta}{ddx}$, qui étant égalées ensemble, donneront $-2dy\left[\left(1 + dy\frac{d\alpha}{ddx}\right).\frac{d\alpha}{\partial y} -\right.$

F

$$(\alpha + dy \frac{d\alpha}{ddy}) \cdot \frac{d\alpha}{\partial x}] + dy\,(dx + \alpha dy)\,(dx \frac{dd\alpha}{\partial x ddx} + dy \frac{dd\alpha}{\partial y ddx})$$

$$+ (dx + \alpha dy)^2 \frac{ddA}{ddx^2} - 2\,(dx + \alpha dy)\,(1 + dy \frac{d\alpha}{ddx}) \frac{dA}{ddx} -$$

$$[dy \frac{dd\alpha}{ddx^2} \cdot (dx + \alpha dy) - 2 \cdot (1 + dy \frac{d\alpha}{ddx})^2]\,A = 0.$$

En subſtituant la valeur de $\mathfrak{C}$ dans $\mathfrak{C}dx + \gamma dy = A$, on aura

$$\gamma = \frac{-dx\,(dx \frac{d\alpha}{\partial x} + dy \frac{d\alpha}{\partial y}) + (dx + \alpha dy) \frac{dA}{ddy} - (\alpha + dy \frac{d\alpha}{ddy})\,A}{dx + \alpha dy},$$

& en mettant les valeurs de $\mathfrak{C}$ & de γ dans $\frac{f}{e}(dx + \alpha dy)$ $= \mathfrak{C}x + \gamma y + \pi p$, on aura

$$\pi = \frac{\left\{\begin{array}{l}(ydx - xdy)\,(dx \frac{d\alpha}{\partial x} + dy \frac{d\alpha}{\partial y}) - (dx + \alpha dy)\,(x \frac{dA}{ddx} + y \frac{dA}{ddy}) \\ + A\,[x \cdot (1 + dy \frac{d\alpha}{ddx}) + y \cdot (\alpha + dy \frac{d\alpha}{ddy})] + \frac{f}{e}(dx + \alpha dy)^2\end{array}\right\}}{p\,(dx + \alpha dy)};$$

donc

$$\frac{\frac{1}{e} d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{dx + \alpha dy}\,ddx + \frac{\alpha}{dx + \alpha dy}\,ddy +$$

$$\frac{dy\,(dx \frac{d\alpha}{\partial x} + dy \frac{d\alpha}{\partial y}) + (dx + \alpha dy) \frac{dA}{ddx} - (1 + dy \frac{d\alpha}{ddx})\,A}{(dx + \alpha dy)^2}\,\partial x +$$

$$\frac{-dx\,(dx \frac{d\alpha}{\partial x} + dy \frac{d\alpha}{\partial y}) + (dx + \alpha dy) \frac{dA}{ddy} - (\alpha + dy \frac{d\alpha}{ddy})\,A}{(dx + \alpha dy)^2}\,\partial y +$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}(ydx - xdy)\,(dx \frac{d\alpha}{\partial x} + dy \frac{d\alpha}{\partial y}) - (dx + \alpha dy)\,(x \frac{dA}{ddx} + y \frac{dA}{ddy}) \\ + [x \cdot (1 + dy \frac{d\alpha}{ddx}) + y \cdot (\alpha + dy \frac{d\alpha}{ddy})]\,A + \frac{f}{e}(dx + \alpha dy)^2\end{array}\right\}}{p\,(dx + \alpha dy)^2}\,dp.$$

Lorſque par la méthode des quadratures on aura φ, on fera cette fonction $= ap^f dq^f$, & le nombre a ſervira à remplir l'une des conditions du problème auquel appartiendra l'équation propoſée.

Je ſuppoſe que la fonction α ſoit donnée, & qu'elle ne ſoit pas $= \frac{-dx}{dy}$, ſans quoi il faudroit, par le moyen de

l'équation entre α & A, trouver une autre valeur de α, & faire ensuite $\varphi = ap^f dy^e$.

PROBLÉME III.

Soit $ddx + \alpha ddy + \beta ddz + A = 0$, l'équation qu'il faut intégrer, α & β étant des fonctions de dimension nulle des quantités x, y, z, dx, dy, dz, & A étant une fonction de ces mêmes quantités dont la dimension est $= 1$; la question se réduit à trouver une fonction φ de x, y, z, dx, dy, dz, dont la différence, en faisant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, & différence de $z = dz$, divisée par le coëfficient de ddx, soit $ddx + \alpha ddy + \beta ddz + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, & celle de $z = dz$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, & celle de $z = \partial z$, on auroit eu $ddx + \alpha ddy + \beta ddz + \gamma \partial x + \delta \partial y + \varepsilon \partial z = 0$. γ, δ & ε sont des fonctions de x, y, z, dx, dy, dz, qui doivent être telles que $\gamma dx + \delta dy + \varepsilon dz = A$; & si on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit ddx, on auroit eu $\mu ddx + \alpha\mu ddy + \beta\mu ddz + \gamma\mu\partial x + \delta\mu\partial y + \varepsilon\mu\partial z = d\varphi$. μ est une fonction de x, y, z, dx, dy, dz, qui est inconnue: Je suppose que la dimension de φ en dx, dy, dz étoit $= e$, & qu'en x, y, z elle étoit $= f$, j'aurai $\mu dx + \alpha\mu dy + \beta\mu dz = e\varphi$, & $\gamma\mu x + \delta\mu y + \varepsilon\mu z = f\varphi$;
donc $f(dx + \alpha dy + \beta dz) = e(\gamma x + \delta y + \varepsilon z)$,

& $\frac{\frac{1}{e} d\varphi}{\varphi} = \frac{ddx + \alpha ddy + \beta ddz + \gamma\partial x + \delta\partial y + \varepsilon\partial z}{dx + \alpha dy + \beta dz}$. Je substitue dans cette équation pour ε sa valeur $\frac{A - dx\gamma - dy\delta}{dz}$,

& pour avoir γ, je fais $\frac{d\left(\frac{1}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{\gamma}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{ddx}$,

$$\frac{d\left(\frac{1}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{\delta}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{ddx}.$$

$$\& \; dz \, . \, \frac{d\left(\frac{1}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{\partial z} = \frac{d\left(\frac{A - dx\,\gamma - dy\,\delta}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{ddx}$$

$$= \frac{d\left(\frac{A}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{ddx} - dx \, . \, \frac{d\left(\frac{\gamma}{dx + \alpha dy + \beta dx}\right)}{ddx}$$

$$- \frac{\gamma}{dx + \alpha dy + \beta dz} - dy \, . \, \frac{d\left(\frac{\delta}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{ddx}$$

j'aurai

$$\frac{\gamma}{dx + \alpha dy + \beta dz} = \frac{d\left(\frac{A}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{ddx} - dx \, . \, \frac{d\left(\frac{1}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{\partial x}$$

$$- dy \, . \, \frac{d\left(\frac{1}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{\partial y} - dz \, . \, \frac{d\left(\frac{1}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{\partial z},$$

$$\text{ou } \gamma = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (dx + \alpha dy + \beta dz) \frac{dA}{ddx} - A \left(1 + dy \frac{d\alpha}{ddx} + dz \frac{d\beta}{ddx}\right) \\ + dx \left(dy \frac{d\alpha}{\partial x} + dz \frac{d\beta}{\partial x}\right) + dy \left(dy \frac{d\alpha}{\partial y} + dz \frac{d\beta}{\partial y}\right) \\ + dz \left(dy \frac{d\alpha}{\partial z} + dz \frac{d\beta}{\partial z}\right) \end{array} \right\}}{dx + \alpha dy + \beta dz}.$$

Pour avoir δ, je fais $\frac{d\left(\frac{\alpha}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{\gamma}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{ddy}$,

$$\frac{d\left(\frac{\alpha}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{\delta}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{ddy}, \; \&$$

$$dz \, . \, \frac{d\left(\frac{\alpha}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{\partial z} = \frac{d\left(\frac{A - dx\gamma - dy\delta}{dx + \alpha dy + \beta dz}\right)}{ddy};$$

j'aurai

$$\delta = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (dx + \alpha dy + \beta dz) \frac{dA}{ddy} - A \left(\alpha + dy \frac{d\alpha}{ddy} + dz \frac{d\beta}{ddy}\right) + \alpha \, . \\ \left[dx \, . \left(dy \frac{d\alpha}{\partial x} + dz \frac{d\beta}{\partial x}\right) + dy \, . \left(dy \frac{d\alpha}{\partial y} + dz \frac{d\beta}{\partial y}\right) + dz \, . \left(dy \frac{d\alpha}{\partial z} + \right.\right. \\ \left.\left. dz \frac{d\beta}{\partial z}\right)\right] - (dx + \alpha dy + \beta dz) \left(dx \frac{d\alpha}{\partial x} + dy \frac{d\alpha}{\partial y} + dz \frac{d\alpha}{\partial z}\right) \end{array} \right\}}{dx \pm \alpha dy \pm \beta dz}:$$

& par analogie,

$$\varepsilon = \frac{\left\{\begin{array}{l}(dx + \alpha dy + \beta dz)\frac{dA}{ddz} - A\,(dy\frac{d\alpha}{ddz} + \beta + dz\frac{d\beta}{ddz}) + \beta\,. \\ {[dx\,.\,(dy\frac{d\alpha}{\partial x} + dz\frac{d\beta}{\partial x}) + dy\,.\,(dy\frac{d\alpha}{\partial y} + dz\frac{d\beta}{\partial y}) + dz\,.\,(dy\frac{d\alpha}{\partial z} +} \\ dz\frac{d\beta}{\partial z})] - (dx + \alpha dy + \beta dz)\,(dx\frac{d\beta}{\partial x} + dy\frac{d\beta}{\partial y} + dz\frac{d\beta}{\partial z})\end{array}\right\}}{dx + \alpha dy + \beta dz}.$$

Je substitue les valeurs de γ, δ, ε dans $\frac{f}{e}(dx + \alpha dy + \beta dz) = \gamma x + \delta y + \varepsilon z$; j'aurai

$$\frac{f}{e}(dx + \alpha dy + \beta dz)^2 = (x + y\alpha + z\beta)\,[dx\,.\,(dy\frac{d\alpha}{\partial x} + dz\frac{d\beta}{\partial x}) + dy\,.\,(dy\frac{d\alpha}{\partial y} + dz\frac{d\alpha}{\partial y}) + dz\,.\,(dy\frac{d\alpha}{\partial z} + dz\frac{d\beta}{\partial z})] - (dx + \alpha dy + \beta dz)\,[y\,.\,(dx\frac{d\alpha}{\partial x} + dy\frac{d\alpha}{\partial y} + dz\frac{d\alpha}{\partial z}) + z\,.\,(dx\frac{d\beta}{\partial x} + dy\frac{d\beta}{\partial y} + dz\frac{d\beta}{\partial z})] + (dx + \alpha dy + \beta dz)\,(x\frac{dA}{ddx} + y\frac{dA}{ddy} + z\frac{dA}{ddz}) - A\,[x\,.\,(1 + dz\frac{d\beta}{ddx} + dy\frac{d\alpha}{ddx}) + y\,.\,(\alpha + dy\frac{d\alpha}{ddy} + dz\frac{d\beta}{ddy}) + z\,.\,(dy\frac{d\alpha}{ddz} + \beta + dz\frac{d\beta}{ddz})],$$

& cette équation contiendra les conditions entre α, β & A: on sait d'ailleurs que les fonctions α, β, doivent être telles que

$$\alpha\frac{d\beta}{ddx} - \beta\frac{d\alpha}{ddx} + \frac{d\alpha}{ddz} - \frac{d\beta}{ddy} = 0.$$

Les fonctions γ, δ, ε étant connues, on aura φ par les quadratures, & on fera cette fonction $= ap^f\,dq^e$.

On peut avoir fait dy constant, & par conséquent la fonction α peut n'être pas donnée; dans ce cas, il faudra trouver pour α une fonction de x, de y, de z, de dx, de dy & de dz, qui satisfasse aux deux équations précédentes entre

α, β & A; & comme $\frac{-dx - dz\beta}{dy}$ satisfait généralement à ces deux équations, il s'ensuit que l'équation proposée étant $ddx + \beta ddz + A = 0$, on peut toûjours prendre $ddx + \frac{-dx - dz\beta}{dy} ddy + \beta ddz + A = 0$. Mais cette valeur de α est de toutes celles qui sont possibles, la seule qui ne puisse nous servir; ainsi, soit que α ne fût pas donnée, soit que l'étant, elle fût $= \frac{-dx - dz\beta}{dy}$, il faudroit en trouver quelqu'autre valeur qui satisfit également aux deux équations entre α, β & A; & lorsqu'on auroit la fonction φ, on la feroit $= ap^f\, dy^e$. Mais voyons si on ne pourroit pas résoudre de quelqu'autre manière l'équation $ddx + \frac{-dx - dz\beta}{dy} ddy + \beta ddz + A = 0$.

Si on avoit fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, & celle de $z = \partial z$, on auroit eu $ddx + \frac{-dx - dz\beta}{dy} ddy + \beta ddz + \gamma\partial x + \delta\partial y + \varepsilon\partial z = 0$.

Les fonctions γ, δ, ε doivent être telles que $\gamma dx + \delta dy + \varepsilon dz = A$; & si on n'avoit pas divisé par la fonction qui multiplioit ddx, on auroit eu $\mu ddx + \mu . \frac{-dx - dz\beta}{dy} ddy + \beta\mu ddz + \gamma\mu\partial x + \delta\mu\partial y + \varepsilon\mu\partial z = d\varphi$.

Je suppose que la dimension de φ en x, y, z étoit $= f$, j'aurai $\gamma\mu x + \delta\mu y + \varepsilon\mu z = f\varphi$; donc

$$\frac{\frac{1}{f} d\varphi}{\varphi} = \frac{ddx + \frac{-dx - dz\beta}{dy} ddy + \beta ddz + \gamma\partial x + \delta\partial y + \varepsilon\partial z}{\gamma x + \delta y + \varepsilon z}.$$

Il s'agit d'avoir les fonctions γ, δ & ε; pour cet effet, je prends $dy\,\delta = A - dx\gamma - dz\varepsilon$,

$$dy \frac{d\delta}{ddx} = \frac{dA}{ddx} - \gamma - dx \frac{d\gamma}{ddx} - dz \frac{d\varepsilon}{ddx},$$

$dy \frac{d\delta}{ddz} = \frac{dA}{ddz} - dx\beta \frac{d\gamma}{ddx} + dx\gamma \frac{d\beta}{ddx} - dx \frac{d\beta}{\partial x} - \varepsilon - dz\beta \frac{d\varepsilon}{ddx} + dz\varepsilon \frac{d\beta}{ddx} - dz \frac{d\beta}{\partial z}$, & je substitue ces valeurs dans l'équation

$$dy\beta \frac{d\delta}{ddx} - dy\delta \frac{d\beta}{ddx} + dy \frac{d\beta}{\partial y} - dy \frac{d\delta}{ddz} = 0;$$

j'aurai $\varepsilon = - dx \frac{d\beta}{\partial x} - dy \frac{d\beta}{\partial y} - dz \frac{d\beta}{\partial z} + A \frac{d\beta}{ddx} - \beta \frac{dA}{ddx} + \frac{dA}{ddz} + \beta\gamma$.

Soit, pour abréger, $- dx \frac{d\beta}{\partial x} - dy \frac{d\beta}{\partial y} - dz \frac{d\beta}{\partial z} + A \frac{d\beta}{ddx} - \beta \frac{dA}{ddx} + \frac{dA}{ddz} = B$, on aura $\varepsilon = B + \beta\gamma$, $\frac{d\varepsilon}{ddx} = \frac{dB}{ddx} + \beta \frac{d\gamma}{ddx} + \gamma \frac{d\beta}{ddx}$, $\frac{d\varepsilon}{ddz} = \frac{dB}{ddz} + \gamma \frac{d\beta}{ddz} + \beta^2 \frac{d\gamma}{ddx} - \beta\gamma \frac{d\beta}{ddx} + \beta \frac{d\beta}{\partial x}$.

Je substitue ces valeurs dans l'équation

$$\beta \frac{d\varepsilon}{ddx} - \varepsilon \frac{d\beta}{ddx} + \frac{d\beta}{\partial z} - \frac{d\varepsilon}{ddz} = 0;$$

j'aurai $\gamma = \dfrac{B \frac{d\beta}{ddx} - \beta \frac{dB}{ddx} + \frac{dB}{ddz} + \beta \frac{d\beta}{\partial x} - \frac{d\beta}{\partial z}}{\beta \frac{d\beta}{ddx} - \frac{d\beta}{ddz}}$,

& par conséquent

$$\varepsilon = \frac{2\left(\beta \frac{d\beta}{ddx} - \frac{d\beta}{ddz}\right) B - \beta^2 \frac{dB}{ddx} + \beta \frac{dB}{ddz} + \beta^2 \frac{d\beta}{\partial x} - \beta \frac{d\beta}{\partial z}}{\beta \frac{d\beta}{ddx} - \frac{d\beta}{ddz}};$$

& en substituant pour γ & ε leurs valeurs dans $dy\delta = A - dx\gamma - dz\varepsilon$, j'aurai $\delta =$ &c.

Les fonctions γ, δ & ε étant connues, on aura φ par les quadratures, & on fera cette fonction $= ap^f$.

Il peut se faire que f étoit $= 0$, auquel cas on aura

$\mu ddx + \mu . \frac{-dx - dz\beta}{dy} ddy + \beta \mu ddz + \gamma \mu \partial x + \delta \mu \partial y + \varepsilon \mu \partial z = d\phi$, & il n'y aura que la fonction μ d'inconnue, laquelle devra être telle que $\frac{d\mu}{ddz} = \beta \frac{d\mu}{ddx} + \mu \frac{d\beta}{ddx}$, $\frac{d\mu}{\partial x} = \gamma \frac{d\mu}{ddx} + \mu \frac{d\gamma}{ddx}$ & $\frac{d\mu}{\partial y} = \delta \frac{d\mu}{ddx} + \mu \frac{d\delta}{ddx}$.

Ayant μ, on aura ϕ, & on fera cette fonction $= a$.



LE

LE CALCUL DES ÉQUATIONS *AUX TROISIÉMES DIFFÉRENCES.*

PROBLÉME I.

Soit $dddx + \alpha dddy + A = 0$, l'équation qu'il faut intégrer, α étant une fonction de dimension nulle des quantités x, y, dx, dy, ddx & ddy, & A étant une fonction de ces mêmes quantités, dont la dimension est $= 1$.

La question se réduit à trouver une fonction φ de x, y, dx, dy, ddx & ddy, dont la différence, en faisant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, différence de $dx = ddx$, & différence de $dy = ddy$, divisée par le coëfficient de $dddx$, soit $dddx + \alpha dddy + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, celle de $dx = ddx$, & celle de $dy = ddy$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, celle de $dx = \partial dx$, & celle de $dy = \partial dy$, on auroit eu $dddx + \alpha dddy + \beta \partial dx + \gamma \partial dy + \delta \partial x + \epsilon \partial y = 0$.

$\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ sont des fonctions de x, y, dx, dy, ddx & ddy, qui doivent être telles que $\beta ddx + \gamma ddy + \delta dx + \epsilon dy = A$; & si on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit $dddx$, on auroit eu $\mu dddx + \alpha \mu dddy + \beta \mu \partial dx + \gamma \mu \partial dy + \delta \mu \partial x + \epsilon \mu \partial y = d\varphi$.

μ est une fonction de x, y, dx, dy, ddx & ddy, qui est inconnue.

Si avant de prendre la différence de φ au lieu de ddx & de ddy, on eût mis dans cette fonction $\frac{dx\,dr}{x}$ & $\frac{dx\,ds}{x}$, & si après en avoir pris la différence au lieu de dr & de ds, on eût remis dans cette différence $\frac{x\,ddx}{dx}$ & $\frac{x\,ddy}{dx}$, on auroit

eu $\mu d\left(\frac{dx\,dr}{x}\right) + \alpha\mu d\left(\frac{dx\,ds}{x}\right) + \beta\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$.

Mais $d\left(\frac{dx\,dr}{x}\right) = \frac{dx}{x}ddr + \frac{ddx}{dx}\partial dx - \frac{ddx}{x}\partial x$ & $d\left(\frac{dx\,ds}{x}\right) = \frac{dx}{x}dds + \frac{ddy}{dx}\partial dx + \frac{-ddy}{x}\partial x$; on auroit donc eu $\mu\frac{dx}{x}ddr + \alpha\mu\frac{dx}{x}dds + \left(\beta\mu + \frac{\mu ddx}{dx} + \alpha\frac{\mu ddy}{dx}\right)\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \left(\delta\mu - \frac{\mu ddx}{x} - \alpha\frac{\mu ddy}{x}\right)\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$.

Je ſuppoſe préſentement que la dimenſion de φ en dx, dy, dr & ds, étoit $= e$, & qu'en x & y elle étoit $= f$; j'aurai $2\mu ddx + 2\alpha\mu ddy + \beta\mu dx + \gamma\mu dy = e\varphi$, & $\delta\mu x + \varepsilon\mu y - \mu ddx - \alpha\mu ddy = f\varphi$; donc $f(2ddx + 2\alpha ddy + \beta dx + \gamma dy) = e(\delta x + \varepsilon y - ddx - \alpha ddy)$,

& $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \beta\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{2ddx + 2\alpha ddy + \beta dx + \gamma dy}$.

Il s'agit maintenant d'avoir les fonctions β, γ, δ & ε; pour cet effet je prends $dy\varepsilon = A - ddx\beta - ddy\gamma - dx\delta$, $dy\frac{d\varepsilon}{dddx} = \frac{dA}{dddx} - \beta - ddx\frac{d\beta}{dddx} - ddy\frac{d\gamma}{dddx} - dx\frac{d\delta}{dddx}$, $dy\frac{d\varepsilon}{dddy} = \frac{dA}{dddy} - ddx\alpha\frac{d\beta}{dddx} + ddx\beta\frac{d\alpha}{dddx} - ddx\frac{d\alpha}{\partial dx} - \gamma - ddy\alpha\frac{d\gamma}{dddx} + ddy\gamma\frac{d\alpha}{dddx} - ddy\frac{d\alpha}{\partial dy} - dx\alpha\frac{d\delta}{dddx} + dx\delta\frac{d\alpha}{dddx} - dx\frac{d\alpha}{\partial x}$, & je ſubſtitue ces valeurs dans l'équation

$dy\alpha\frac{d\varepsilon}{dddx} - dy\varepsilon\frac{d\alpha}{dddx} + dy\frac{d\alpha}{\partial dy} - dy\frac{d\varepsilon}{dddy} = 0$;

j'aurai $\gamma = -dx\frac{d\alpha}{\partial x} - dy\frac{d\alpha}{\partial y} - ddx\frac{d\alpha}{\partial dx} - ddy\frac{d\alpha}{\partial dy} + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\beta$,

ou $\gamma = -\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\beta$.

(Par $\tilde{d}\alpha$ j'entends la différence de α prise à l'ordinaire en faisant tout varier, excepté ddx & ddy.

Soit, pour abréger, $-\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} = B$,

on aura $\gamma = B + \alpha\beta$, $\frac{d\gamma}{dddx} = \frac{dB}{dddx} + \alpha\frac{d\beta}{dddx} + \beta\frac{d\alpha}{dddx}$;

$\frac{d\gamma}{dddy} = \frac{dB}{dddy} + \beta\frac{d\alpha}{dddy} + \alpha^2\frac{d\beta}{dddx} - \alpha\beta\frac{d\alpha}{dddx} + \alpha\frac{d\alpha}{\partial dx}$;

& en substituant ces valeurs dans l'équation

$\alpha\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{\partial dy} - \frac{d\gamma}{dddy} = 0$, on aura

$\beta = \frac{B\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dB}{dddx} + \frac{dB}{dddy} + \alpha\frac{d\alpha}{\partial dx} - \frac{d\alpha}{\partial dy}}{\alpha\frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddy}}$, & par conséquent $\gamma = \frac{\left(2\alpha\frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddy}\right)B - \alpha^2\frac{dB}{dddx} + \alpha\frac{dB}{dddy} + \alpha^2\frac{d\alpha}{\partial dx} - \alpha\frac{d\alpha}{\partial dy}}{\alpha\frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddy}}$.

Les fonctions β, γ étant connues, pour avoir δ, je prends

$dy\frac{d\epsilon}{\partial dx} = \frac{dA}{\partial dx} - ddx\frac{d\beta}{\partial dx} - ddy\,\beta\frac{d\gamma}{dddx} + ddy\,\gamma\frac{d\beta}{dddx} - ddy\frac{d\beta}{\partial dy} + \delta - dx\,\beta\frac{d\delta}{dddx} + dx\,\delta\frac{d\beta}{dddx} - dx\frac{d\beta}{\partial y}$,

& je substitue pour $dy\epsilon$, $dy\frac{d\epsilon}{dddx}$ & $dy\frac{d\epsilon}{\partial dx}$ leurs valeurs dans l'équation $dy\,\beta\frac{d\epsilon}{dddx} - dy\epsilon\frac{d\beta}{dddx} + dy\frac{d\beta}{\partial dy} - dy\frac{d\epsilon}{\partial dx} = 0$:

j'aurai $\delta = -dx\frac{d\beta}{\partial x} - dy\frac{d\beta}{\partial y} - ddx\frac{d\beta}{\partial dx} - ddy\frac{d\beta}{\partial dy} + A\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \beta^2$, ou

$$\delta = - \bar{\delta}\beta + A\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \beta^2.$$

Pour avoir ε, je prends $dx\delta = A - \beta ddx - \gamma ddy - dy\varepsilon$,

$$dx\frac{d\delta}{dddx} = \frac{dA}{dddx} - \beta - ddx\frac{d\beta}{dddx} - ddy\frac{d\gamma}{dddx} - dy\frac{d\varepsilon}{dddx},$$

$$dx\frac{d\delta}{\partial dy} = \frac{dA}{\partial dy} + ddx\beta\frac{d\gamma}{dddx} - ddx\gamma\frac{d\beta}{dddx} - ddx\frac{d\gamma}{\partial dx}$$

$$- ddy\frac{d\gamma}{\partial dy} - \varepsilon - dy\gamma\frac{d\varepsilon}{dddx} + dy\varepsilon\frac{d\gamma}{dddx} - dy\frac{d\gamma}{\partial y},$$

& je ſubſtitue ces valeurs dans l'équation

$$dx\gamma\frac{d\delta}{dddx} - dx\delta\frac{d\gamma}{dddx} + dx\frac{d\gamma}{\partial x} - dx\frac{d\delta}{\partial dy} = 0;$$

j'aurai $\varepsilon = - \bar{\delta}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \beta\gamma.$

Les fonctions β, γ, δ & ε étant connues, on mettra leurs valeurs dans $f\,(2\,ddx + 2\alpha ddy + \beta dx + \gamma dy)$ $= e\,(\delta x + \varepsilon y - ddx - \alpha ddy)$, & on aura les conditions entre α & A, pour qu'il ſoit poſſible que ces deux fonctions appartiennent à une même fonction φ: on ſubſtituera auſſi ces fonctions dans

$$\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \beta\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{2\,ddx + 2\,\alpha ddy + \beta dx + \gamma dy};$$

& on aura φ par le moyen de cette équation; on fera cette fonction $= ap^f dq^e$, & le problème ſera réſolu.

Voilà en général de quelle manière il faudroit s'y prendre pour retrouver la fonction qui auroit produit $dddx + \alpha dddy + A$. Il nous reſte à parcourir les différens cas qui peuvent arriver.

PREMIER CAS. $\alpha =$ ni $\frac{-dx}{dy}$ ni $\frac{-ddx}{ddy}$.

Ce cas-ci & les ſuivans ſe diviſent en pluſieurs autres.

1.° Il peut ſe faire que ni e ni f ne fuſſent $= 0$, & ce ſera le cas général que nous venons de réſoudre, pourvû que

$\alpha \frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddy}$ & par conſéquent $B \frac{d\alpha}{dddx} - \alpha \frac{dB}{dddx} + \frac{dB}{dddy} + \alpha \frac{d\alpha}{\partial dx} - \frac{d\alpha}{\partial dy}$ ne ſoient pas $= 0$; car dans ce cas il faudroit trouver la valeur de β par le moyen de l'équation $\alpha \frac{d\beta}{dddx} - \beta \frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{\partial dx} - \frac{d\beta}{dddy} = 0$.

2.° Il peut ſe faire que e fût $= 0$, f ne l'étant pas; on aura

$$\beta = \frac{-dyB - 2(ddx + \alpha ddy)}{dx + \alpha dy}, \gamma = \frac{dxB - 2\alpha(ddx + \alpha ddy)}{dx + \alpha dy},$$

$$\delta = -\tilde{d}\beta + A\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \beta^2,$$

$$\varepsilon = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \beta\gamma,$$

$$\& \frac{\frac{1}{f}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \beta\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{\delta x + \varepsilon y - ddx - \alpha ddy},$$

on fera $\varphi = ap^f$.

3.° Il peut ſe faire que f étoit $= 0$, e ne l'étant pas; on aura β & γ ainſi que dans le cas général, enſuite δ & ε par le moyen des équations $\delta x + \varepsilon y - ddx - \alpha ddy = 0$, $\beta ddx + \gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy = A$, & on fera $\varphi = adq^e$.

4.° Il peut ſe faire que les nombres e & f étoient tous les deux en même temps $= 0$; on aura

$$\beta = \frac{-dyB - 2(ddx + \alpha ddy)}{dx + \alpha dy}, \gamma = \frac{dxB - 2\alpha(ddx + \alpha ddy)}{dx + \alpha dy},$$

$$\delta = \frac{\left\{\begin{array}{l} -dy(dx + \alpha dy)(ddx + \alpha ddy) + y(dx + \alpha dy) \\ A - y(dxddy - dyddx)B + 2y(ddx + \alpha ddy)^2 \end{array}\right\}}{(ydx - xdy)(dx + \alpha dy)},$$

$$\varepsilon = \frac{\left\{\begin{array}{l} dx(dx + \alpha dy)(ddx + \alpha ddy) - x(dx + \alpha dy) \\ A + x(dxddy - dyddx)B - 2x(ddx + \alpha ddy)^2 \end{array}\right\}}{(ydx - xdy)(dx + \alpha dy)},$$

& $\mu dddx + \alpha\mu dddy + \beta\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$. On tâchera de trouver une fonction μ telle que $\frac{d\mu}{dddy} = \frac{d(\alpha\mu)}{dddx}$, $\frac{d\mu}{\partial dx} = \frac{d(\beta\mu)}{dddx}$ &

$\frac{d\mu}{\partial x} = \frac{d(\delta\mu)}{dddx}$, & lorſqu'on aura φ, on fera cette fonction $= a$.

DEUXIÈME CAS. $\alpha = \frac{-dx}{dy}$.

On aura $\gamma = \frac{-(dx\,ddy - dy\,ddx) + dy\,(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy}) - dx\,dy\,\mathfrak{C}}{dy^2}$,

$$\delta dx + \varepsilon dy = \frac{\left\{\begin{matrix} dy^2 A - dy\,ddy\,(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy}) + ddy \\ (dx\,ddy - dy\,ddx) + dy\,(dx\,ddy - dy\,ddx)\,\mathfrak{C} \end{matrix}\right\}}{dy^2},$$

$$\mu \cdot \frac{-3\,(dx\,ddy - dy\,ddx) + dy\,(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy})}{dy} = e\varphi,$$

$$\mu \cdot \frac{x\,dy\,\delta + y\,dy\,\varepsilon + dx\,ddy - dy\,ddx}{dy} = f\varphi.$$

1.° Il peut ſe faire que ni e ni f n'étoient $= 0$:

Soit, pour abréger, $-3\,(dx\,ddy - dy\,ddx) + dy\,(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy}) = F$, & $dy^2 A - dy\,ddy\,(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy}) + ddy\,(dx\,ddy - dy\,ddx) = C$, on aura

$$\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dy}{F}dddx + \frac{-dx}{F}dddy + \frac{dy\,\mathfrak{C}}{F}\partial dx + \frac{dy\,\gamma}{F}\partial dy + \frac{dy\,\delta}{F}\partial x + \frac{C + dy\,(dx\,ddy - dy\,ddx)\,\mathfrak{C} - dx\,dy^2\delta}{dy^2 F}\partial y.$$

Pour avoir $\mathfrak{C}$, je fais $\frac{d(\frac{1}{F})}{\partial dx} = \frac{d(\frac{\mathfrak{C}}{F})}{dddx}$, $\frac{d(\frac{1}{F})}{\partial x} = \frac{d(\frac{\delta}{F})}{dddx}$,

$$\& \; dy^3 \cdot \frac{d(\frac{1}{F})}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{C + dy\,(dx\,ddy - dy\,ddx)\,\mathfrak{C} - dx\,dy^2\delta}{F}\right)}{dddx} = \frac{d(\frac{C}{F})}{dddx} + dy\,(dx\,ddy - dy\,ddx) \cdot \frac{d(\frac{\mathfrak{C}}{F})}{dddx} - \frac{dy^2\mathfrak{C}}{F} - dx\,dy^2 \cdot \frac{d(\frac{\delta}{F})}{dddx},$$

j'aurai $\beta = \dfrac{dy^2\left(dx\frac{dF}{\partial x} + dy\frac{dF}{\partial y}\right) - dy\,(dxddy - dyddx)\frac{dF}{\partial dx} + F\frac{dC}{dddx} - C\frac{dF}{dddx}}{dy^2 F}$;

Les fonctions β, γ, étant connues, on aura

$$\delta = -\tilde{d}\beta + A\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \beta^2,$$

$$\epsilon = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \beta\gamma;$$

& en substituant les valeurs de ces fonctions dans l'équation $\frac{f}{e}F = xdy\delta + ydy\epsilon + dxddy - dyddx$, on aura les conditions de A, pour que l'équation $dddx + \frac{-dx}{dy}dddy + A = 0$, soit possible.

2.° Il peut se faire que e fût $= 0$, f ne l'étant pas; on aura $dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} = 3\left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right)$, $\gamma = \frac{2\,(dxddy - dyddx) - dxdy\beta}{dy^2}$, $\delta dx + \epsilon dy = \frac{dy^2 A - 2\,ddy\,(dxddy - dyddx) + dy\,(dxddy - dyddx)\,\beta}{dy^2}$,

$\mu dddx + \frac{-\mu dx}{dy}dddy + \beta\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \epsilon\mu\partial y = d\varphi$, $\mu.\frac{xdy\delta + ydy\epsilon + dxddy - dyddx}{dy} = f\varphi$.

La fonction β devra être telle que $dx\frac{d\beta}{dddx} + dy\frac{d\beta}{dddy} + 1 = 0$. β devra, par exemple, être $= \frac{dxddy - 2dyddx}{dxdy}$.

Les fonctions β & γ étant données, on aura

$$\delta = -\tilde{d}\beta + A\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \beta^2,$$

$$\epsilon = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \beta\gamma \;\&$$

$$\frac{\frac{1}{f}d\varphi}{\varphi} = \frac{dydddx - dxdddy + dy\beta\partial dx + dy\gamma\partial dy + dy\delta\partial x + dy\epsilon\partial y}{xdy\delta + ydy\epsilon + dxddy - dyddx}.$$

Lorsqu'on aura la fonction φ, on la fera $= ap^f$.

3.° Il peut ſe faire que f fût $= 0$, e ne l'étant pas; on aura δ & ε par le moyen des équations

$$x\delta + y\varepsilon = -\left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right),$$

$$\delta dx + \varepsilon dy = \frac{\left\{\begin{array}{l} dy^2 A - dyddy\left(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy}\right) + ddy \\ (dxddy - dyddx) + dy(dxddy - dyddx)\beta \end{array}\right\}}{dy^2};$$

& on aura β, ainſi que dans le cas 1.°

4.° Il peut ſe faire que les nombres e & f étoient tous les deux en même-temps $= 0$, on aura $dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} = 3\left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right)$, $\gamma = \frac{2(dxddy - dyddx) - dxdy\beta}{dy^2}$,

$$\delta = \frac{ydy(dxddy - dyddx)\beta + ydy^2 A - (2yddy - dy^2)(dxddy - dyddx)}{dy^2(ydx - xdy)};$$

$$\varepsilon = \frac{-xdy(dxddy - dyddx)\beta - xdy^2 A + (2xddy - dxdy)(dxddy - dyddx)}{dy^2(ydx - xdy)};$$

& $\mu dddx + \frac{-\mu dx}{dy} dddy + \beta\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$.

La fonction β devra, ainſi que dans le cas 2.°, être telle que $dx\frac{d\beta}{dddx} + dy\frac{d\beta}{dddy} + 1 = 0$.

Les fonctions β, γ, δ, ε étant données, on tâchera de trouver une fonction μ de x, de y, de dx, de dy & de $\frac{dyddx - dxddy}{dy}$, qui ſoit telle que $\frac{d\mu}{\partial dx} = \frac{d(\beta\mu)}{dddx}$ & $\frac{d\mu}{\partial x} = \frac{d(\delta\mu)}{dddx}$.

Ayant μ, on aura φ, & on fera cette fonction $= a$.

TROISIÈME CAS. $a = \frac{-ddx}{ddy}$.

On aura $\gamma = \frac{-ddx\beta - A + ddx\frac{dA}{dddx} + ddy\frac{dA}{dddy}}{ddy}$,

δdx

$$\delta dx + \varepsilon dy = 2A - ddx \frac{dA}{dddx} - ddy \frac{dA}{dddy},$$

$$\mu . \frac{(dxddy - dyddx)\beta + dy\left(-A + ddx \frac{dA}{dddx} + ddy \frac{dA}{dddy}\right)}{ddy} = e\varphi,$$

$\mu(\delta x + \varepsilon y) = f\varphi$, & $\mu\, dddx + \frac{-\mu ddx}{ddy} dddy + \beta\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$.

Soit $- A + ddx \frac{dA}{dddx} + ddy \frac{dA}{dddy} = B$, on aura $\beta ddx + \gamma ddy = B$, $\delta dx + \varepsilon dy = A - B$; $\mu(\beta dx + \gamma dy) = e\varphi$, $\mu(\delta x + \varepsilon y) = f\varphi$, & $\mu dddx + \frac{-\mu ddx}{ddy} dddy + \beta\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$; donc

$$\frac{\frac{1}{e} d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \frac{-ddx}{ddy} dddy + \beta\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{\beta dx + \gamma dy};$$

1.° Je ſuppoſe que ni e ni f n'étoient $= 0$; en ſubſtituant pour γ ſa valeur $\frac{-\beta ddx + B}{ddy}$ dans $\beta \frac{d\gamma}{dddx} - \gamma \frac{d\beta}{dddx} + \frac{d\beta}{\partial dy} - \frac{d\gamma}{\partial dx} = 0$, on trouvera que β doit être telle que

$$ddx \frac{d\beta}{\partial dx} + ddy \frac{d\beta}{\partial dy} - \beta^2 + \beta \frac{dB}{dddx} - B \frac{d\beta}{dddx} - \frac{dB}{\partial dx} = 0:$$

On voit de plus que la dimenſion de β en ddx & ddy doit être $= 1$, en dx & $dy = -1$, en x & $y = 0$. Lorſqu'on aura β & γ, il ſera facile d'avoir δ & ε, & en ſubſtituant les valeurs de toutes ces fonctions dans $f(\beta dx + \gamma dy) = e(\delta x + \varepsilon y)$, on aura les conditions de A.

2.° Je ſuppoſe que e étoit $= 0$, f ne l'étant pas; on aura $\beta = \frac{-dyB}{dxddy - dyddx}$, $\gamma = \frac{dxB}{dxddy - dyddx}$, &

H

$$\frac{\frac{1}{f}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \frac{-ddx}{ddy}dddy + \beta\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{\delta x + \varepsilon y}.$$

On connoît les valeurs de δ & de ε en β & γ.

3.° $f = 0$, e ne l'étant pas : ce cas-là est compris dans le premier.

4.° e & $f = 0$, on aura β, γ, δ & ε, & la fonction μ devra être telle que $\frac{d\mu}{\partial dx} = \frac{d(\beta\mu)}{dddx}$ & $\frac{d\mu}{\partial x} = \frac{d(\delta\mu)}{dddx}$.

QUATRIÈME CAS.

φ, fonction dont la dimension en ddx & $ddy = e$, en dx & $dy = f$, en x & $y = g$.

Le cas de $e = 0$, est celui qui précède ; on aura $dddx + \alpha dddy + A = 0$, $dddx + \alpha dddy + \beta\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y = 0$, $\beta ddx + \gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy = A$, $\mu dddx + \alpha\mu dddy + \beta\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \varepsilon\mu\partial y = d\varphi$, $\mu(ddx + \alpha ddy) = e\varphi$, $\mu(\beta dx + \gamma dy) = f\varphi$ & $\mu(\delta x + \varepsilon y) = g\varphi$;

donc $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{dddx + \alpha dddy + \beta\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \varepsilon\partial y}{ddx + \alpha ddy}$.

Je substitue dans cette équation pour γ sa valeur $\frac{A - \beta ddx - \delta dx - \varepsilon dy}{ddy}$, & je fais $\frac{d\left(\frac{1}{ddx + \alpha ddy}\right)}{\partial dx} = \frac{d\left(\frac{\beta}{ddx + \alpha ddy}\right)}{dddx}$; $ddy \,.\, \frac{d\left(\frac{1}{ddx + \alpha ddy}\right)}{\partial dy} = \frac{d\left(\frac{A - ddx\beta - dx\delta - dy\varepsilon}{ddx + \alpha ddy}\right)}{dddx} = \frac{d\left(\frac{A}{ddx + \alpha ddy}\right)}{dddx}$ —

$$ddx.\frac{d\left(\frac{\beta}{ddx+\alpha ddy}\right)}{dddx} - \frac{\beta}{ddx+\alpha ddy} - dx.\frac{d\left(\frac{\delta}{ddx+\alpha ddy}\right)}{dddx}$$

$$- dy.\frac{d\left(\frac{\varepsilon}{ddx+\alpha ddy}\right)}{dddx}, \quad \frac{d\left(\frac{1}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{\delta}{ddx+\alpha ddy}\right)}{dddx}$$

$$\& \quad \frac{d\left(\frac{1}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{\varepsilon}{ddx+\alpha ddy}\right)}{dddx}; \text{ d'où je tire}$$

$$\beta = \frac{(ddx+\alpha ddy)\frac{dA}{dddx} - \left(1 + ddy\frac{d\alpha}{dddx}\right)A + ddy\,\partial\alpha}{ddx+\alpha ddy}.$$

J'aurai de même

$$\gamma = \frac{(ddx+\alpha ddy)\frac{dA}{dddy} - \left(\alpha + ddy\frac{d\alpha}{dddy}\right)A - dddx\,\partial\alpha}{ddx+\alpha ddy}.$$

Les fonctions β, γ, étant connues, on substituera dans l'équation $\frac{\frac{1}{\varepsilon}d\varphi}{\varphi} =$ &c. pour ε sa valeur $\frac{A - \beta ddx - \gamma ddy - \delta dx}{dy}$;

$$\& \text{ en faisant } \frac{d\left(\frac{\beta}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{\delta}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx} \; \&$$

$$dy.\frac{d\left(\frac{\beta}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial y} = \frac{d\left(\frac{A - \beta ddx - \gamma ddy - \delta dx}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx}$$

$$= \frac{d\left(\frac{A}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx} - ddx.\frac{d\left(\frac{\beta}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx} -$$

$$ddy.\frac{d\left(\frac{\gamma}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx} - dx.\frac{d\left(\frac{\delta}{ddx+\alpha ddy}\right)}{\partial dx} - \frac{\delta}{ddx+\alpha ddy},$$

on aura $\delta =$ &c. & par conséquent $\varepsilon =$ &c.

Les fonctions β, γ, δ & ε étant connues, on mettra leurs valeurs dans $f(ddx + \alpha ddy) = e(\beta dx + \gamma dy)$ & dans $g(ddx + \alpha ddy) = e(\delta x + \varepsilon y)$, & on aura les conditions des fonctions α & A.

CINQUIÈME CAS.

dy conſtante, ou ddy & $dddy = 0$.

L'équation à intégrer ſera $dddx + B = 0$, B étant une fonction de x, de y, de dx, de dy, & de ddx.

Je réduis la queſtion à trouver l'équation $dddx + \alpha dddy + A = 0$, que l'on auroit eue ſi on n'eût pas fait dy conſtante.

α & A ſont des fonctions des quantités x, y, dx, dy, ddx & ddy, qui ſont inconnues. A doit être telle que ddy devenant $= 0$, elle devienne $= B$, & les fonctions α & A doivent avoir entr'elles les conditions néceſſaires pour pouvoir appartenir à une même fonction φ. L'on voit donc que ce problème-ci eſt très-indéterminé, mais qu'il ſuffira d'en avoir une ſeule ſolution générale.

A l'article 2.° du ſecond cas, où $\alpha = \frac{-dx}{dy}$, nous avons trouvé $dx \frac{dA}{dddx} + dy \frac{dA}{dddy} = 3 \left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right)$; ainſi, ſi nous voulons réſoudre notre problème par ce cas-ci, il faut que nous trouvions une fonction A qui ſatisfaſſe à l'équation précédente, & qui devienne $= B$, ddy devenant $= 0$.

Je mets $\frac{dyddx - dxddy}{dy}$ au lieu de ddx dans B, je ſuppoſe que B devienne C, & je fais $A = C + \frac{3ddy}{dy^2}(dxddy - dyddx)$; j'aurai $dddx + \frac{-dx}{dy} dddy + C + \frac{3ddy}{dy^2}(dxddy - dyddx) = 0$.

Il eſt évident, 1.° que cette équation deviendra l'équation propoſée, ddy & $dddy$ devenant $= 0$.

2.° $dx \frac{dC}{dddx} + dy \frac{dC}{dddy}$ étant $= 0$,

on aura $dx \cdot \frac{d\left[C + \frac{3ddy}{dy^2} \cdot (dxddy - dyddx)\right]}{dddx}$ +

$dy \cdot \frac{d\left[C + \frac{3ddy}{dy^2} \cdot (dxddy - dyddx)\right]}{dddy} = 3\left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right)$;

donc le problème est résolu.

PROBLÉME II.

Soit $dddx + \alpha dddy + A = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer, α étant une fonction de dimension nulle des quantités p, x, y, dx, dy, ddx & ddy, & A étant une fonction de ces mêmes quantités, dont la dimension est $= 1$.

La question se réduit à trouver une fonction φ des quantités p, x, y, dx, dy, ddx & ddy, dont la différence, en faisant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, différence de $dx = ddx$, différence de $dy = ddy$, & différence de $p = 0$, divisée par le coëfficient de $dddx$, soit $dddx + \alpha dddy + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, celle de $dx = ddx$, celle de $dy = ddy$, & celle de $p = 0$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, celle de $dx = \partial dx$, celle de $dy = \partial dy$, & celle de $p = dp$, on auroit eu $dddx + \alpha dddy + \beta \partial dx + \gamma \partial dy + \delta \partial x + \epsilon \partial y + \pi dp = 0$.

β, γ, δ & ϵ sont des fonctions des quantités p, x, y, dx, dy, ddx & ddy, qui doivent être telles que $\beta ddx + \gamma ddy + \delta dx + \epsilon dy = A$. π est une fonction de ces mêmes quantités, qui est inconnue; & si on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit $dddx$, on auroit eu $\mu dddx + \alpha \mu dddy + \beta \mu \partial dx + \gamma \mu \partial dy + \delta \mu \partial x + \epsilon \mu \partial y + \pi \mu dp = d\varphi$.

μ est une fonction des quantités p, x, y, dx, dy, ddx & ddy, qui est inconnue.

Si avant de prendre la différence de φ, au lieu de ddx & de ddy, on eût mis dans cette fonction $\frac{dx\,dr}{x}$ & $\frac{dx\,ds}{x}$, & si après en avoir pris la différence, au lieu de dr & de ds, on eût remis dans cette différence $\frac{x\,ddx}{dx}$ & $\frac{x\,ddy}{dx}$, on auroit eu $\mu d(\frac{dx\,dr}{x}) + \alpha\mu d(\frac{dx\,ds}{x}) + \beta\mu\partial dx + \gamma\mu\partial dy + \delta\mu\partial x + \epsilon\mu\partial y + \pi\mu dp = d\varphi$.

Mais $d(\frac{dx\,dr}{x}) = \frac{dx}{x}ddr + \frac{ddx}{dx}\partial dx - \frac{ddx}{x}\partial x$, & $d(\frac{dx\,ds}{x}) = \frac{dx}{x}dds + \frac{ddy}{dx}\partial dx - \frac{ddy}{x}\partial x$; on auroit donc eu $\mu\frac{dx}{x}ddr + \alpha\mu\frac{dx}{x}dds + (\beta\mu + \frac{\mu ddx}{dx} + \alpha\mu\frac{ddy}{dx})\partial dx + \gamma\mu\partial dy + (\delta\mu - \frac{\mu ddx}{x} - \alpha\mu\frac{ddy}{x})\partial x + \epsilon\mu\partial y + \pi\mu dp = d\varphi$.

Je suppose présentement que φ étoit une fonction infiniment petite, d'un ordre $= e$, & que sa dimension en p, x, y, étoit $= f$; j'aurai

$2\mu ddx + 2\alpha\mu ddy + \beta\mu dx + \gamma\mu dy = e\varphi$, & $\delta\mu x + \epsilon\mu y + \pi\mu p - \mu ddx - \alpha\mu ddy = f\varphi$; donc $f(2ddx + 2\alpha ddy + \beta dx + \gamma dy) = e(\delta x + \epsilon y + \pi p - ddx - \alpha ddy)$, & $\frac{\frac{1}{\mu}d\varphi}{\varphi}$

$$= \frac{dddx + \alpha dddy + \beta\partial dx + \gamma\partial dy + \delta\partial x + \epsilon dy + \pi dp}{2ddx + 2\alpha ddy + \beta dx + \gamma dy}.$$

Il s'agit d'avoir les fonctions β, γ, δ, ϵ & π. Par les mêmes calculs que dans le problème précédent, on aura $\gamma = -\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\beta$; & en substituant pour γ, $\frac{d\gamma}{dddx}$ & $\frac{d\gamma}{dddy}$ leurs valeurs dans

l'équation $\alpha \frac{d\gamma}{dddx} - \gamma \frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{\partial dy} - \frac{d\gamma}{dddy} = 0$, on aura β & ensuite γ.

Les fonctions β & γ étant connues, on aura

$$\delta = -\tilde{d}\beta + A\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \beta^2,$$

$$\varepsilon = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \beta\gamma.$$

(Le signe $\tilde{d}$ signifie ici la différence de la fonction qu'il précède, prise à l'ordinaire, en faisant tout varier, excepté p, ddx & ddy).

On substituera les valeurs de toutes ces fonctions dans $f(2ddx + 2\alpha ddy + \beta dx + \gamma dy) = \varepsilon(\delta x + \varepsilon y + \pi dp - ddx - \alpha ddy)$, & on aura π.

Les fonctions β, γ, δ, ε & π étant connues, on aura φ par les quadratures, & on fera cette fonction $= ap^f dq^e$.

Il peut arriver plusieurs cas dans ce problème-ci, mais nous ne nous arrêterons point à les examiner; l'analyse que nous avons faite de ceux du problème précédent, servira d'exemple pour celui-ci & pour les suivans.

Si on a fait dy constante, & que l'équation proposée soit $dddx + B = 0$, B étant une fonction de p, x, y, dx, dy & ddx, dont la dimension $= 1$, en substituant, de même que dans le problème précédent, $\frac{dyddx - dxddy}{dy}$ au lieu de ddx dans B, & en faisant ensuite $\alpha = \frac{-dx}{dy}$, $A = C + \frac{3ddy}{dy^2}(dxddy - dyddx)$ (C est ce que devient B) on aura $dddx + \frac{-dx}{dy}dddy + C + \frac{3ddy}{dy^2}(dxddy - dyddx) = 0$, qui est une des équations qu'on auroit pû avoir si on n'avoit pas fait dy constante.

PROBLÉME III.

Soit $dddx + \alpha dddy + \beta dddz + A = 0$; l'équation qu'il faut intégrer, α, β étant des fonctions de dimension nulle des quantités x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy & ddz, telles que $\alpha \frac{d\beta}{dddx} - \beta \frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{dddz} - \frac{d\beta}{dddy} = 0$, & A étant une fonction de ces mêmes quantités, dont la dimension est $= 1$.

La question se réduit à trouver une fonction φ de $x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy$ & ddz, dont la différence, en faisant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, différence de $z = dz$, différence de $dx = ddx$, différence de $dy = ddy$, & différence de $dz = ddz$, divisée par le coëfficient de $dddx$, soit $dddx + \alpha dddy + \beta dddz + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, celle de $z = dz$, celle de $dx = ddx$, celle de $dy = ddy$, & celle de $dz = ddz$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, celle de $z = \partial z$, celle de $dx = \partial dx$, celle de $dy = \partial dy$, & celle de $dz = \partial dz$, on auroit eu $dddx + \alpha dddy + \beta dddz + \gamma \partial dx + \delta \partial dy + \epsilon \partial dz + \zeta \partial x + \eta \partial y + \theta \partial z = 0$.

$\gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$ & θ sont des fonctions de dimension nulle de $x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy$ & ddz, qui doivent être telles que $\gamma ddx + \delta ddy + \epsilon ddz + \zeta dx + \eta dy + \theta dz = A$; & si on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit $dddx$, on auroit eu $\mu dddx + \alpha\mu dddy + \beta\mu dddz + \gamma\mu\partial dx + \delta\mu\partial dy + \epsilon\mu\partial dz + \zeta\mu\partial x + \eta\mu\partial y + \theta\mu\partial z = d\varphi$.

μ est une fonction des quantités x, y, z, dx, dy, dz; ddx, ddy & ddz, qui est inconnue.

Si avant de prendre la différence de φ au lieu de ddx, de

de ddy & de ddz, on eût mis dans cette fonction $\frac{dxdr}{x}$, $\frac{dxds}{x}$ & $\frac{dxdt}{x}$; & si après en avoir pris la différence, au lieu de dr, de ds & de dt, on eût remis dans cette différence $\frac{xddx}{dx}$, $\frac{xddy}{dx}$ & $\frac{xddz}{dx}$, on auroit eu $\mu d(\frac{dxdr}{x}) + \alpha\mu d(\frac{dxds}{x}) + \beta\mu d(\frac{dxdt}{x}) + \gamma\mu\partial dx + \delta\mu\partial dy$ $\varepsilon\mu\partial dz + \zeta\mu\partial x + \eta\mu\partial y + \theta\mu\partial z = d\varphi$; mais $d(\frac{dxdr}{x}) = \frac{dx}{x}ddr + \frac{ddx}{dx}\partial dx - \frac{ddx}{x}\partial x$, $d(\frac{dxds}{x}) = \frac{dx}{x}dds + \frac{ddy}{dx}\partial dx - \frac{ddy}{x}\partial x$, & $d(\frac{dxdt}{x}) = \frac{dx}{x}ddt + \frac{ddz}{dx}\partial dx - \frac{ddz}{x}\partial x$. On auroit donc eu $\mu\frac{dx}{x}ddr + \alpha\mu\frac{dx}{x}dds + \beta\mu\frac{dx}{x}ddt + (\gamma\mu + \frac{\mu ddx}{dx} + \alpha\mu\frac{ddy}{dx} + \beta\mu\frac{ddz}{dx})\partial dx + \delta\mu\partial dy + \varepsilon\mu\partial dz + (\zeta\mu - \mu\frac{ddx}{x} - \alpha\mu\frac{ddy}{x} - \beta\mu\frac{ddz}{x})\partial x + \eta\mu\partial y + \theta\mu\partial z = d\varphi$.

Je suppose présentement que la dimension de φ en dx, dy, dz, dr, ds & dt étoit $= e$, & qu'en x, y, z elle étoit $= f$; j'aurai $2\mu ddx + 2\alpha\mu ddy + 2\beta\mu ddz + \gamma\mu dx + \delta\mu dy + \varepsilon\mu dz = e\varphi$, & $\zeta\mu x + \eta\mu y + \theta\mu z - \mu ddx - \alpha\mu ddy - \beta\mu ddz = f\varphi$; donc $f(2ddx + 2\alpha ddy + 2\beta ddz + \gamma dx + \delta dy + \varepsilon dz) = e(\zeta x + \eta y + \theta z - ddx - \alpha ddy - \beta ddz$, & $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} =$

$$\frac{dddx + \alpha dddy + \beta dddz + \gamma\partial dx + \delta\partial dy + \varepsilon\partial dz + \zeta\partial x + \eta\partial y + \theta\partial z}{2ddx + 2\alpha ddy + 2\beta ddz + \gamma dx + \delta dy + \varepsilon dz}.$$

Il s'agit d'avoir les fonctions γ, δ, ε, ζ, η & θ. Je prends $dz\theta = A - ddx\gamma - ddy\delta - ddz\varepsilon - dx\zeta - dy\eta$, $dz\frac{d\theta}{dddx} = \frac{dA}{dddx} - \gamma - ddx\frac{d\gamma}{dddx} - ddy\frac{d\delta}{dddx} - ddz\frac{d\varepsilon}{dddx} - dx\frac{d\zeta}{dddx} - dy\frac{d\eta}{dddx}$, $dz\frac{d\theta}{dddy} = \frac{dA}{dddy} - ddx\alpha\frac{d\gamma}{dddx} + ddx\gamma\frac{d\alpha}{dddx} - ddx\frac{d\alpha}{\partial dx} - \delta - ddy\alpha\frac{d\delta}{dddx} + ddy\delta\frac{d\alpha}{dddx} - ddy\frac{d\alpha}{\partial dy} - ddz\alpha\frac{d\varepsilon}{dddx} + ddz\varepsilon\frac{d\alpha}{dddx} - ddz\frac{d\alpha}{\partial dz} - dx\alpha\frac{d\zeta}{dddx} + dx\zeta\frac{d\alpha}{dddx} - dx\frac{d\alpha}{\partial x} - dy\alpha\frac{d\eta}{dddx} + dy\eta\frac{d\alpha}{dddx} - dy\frac{d\alpha}{\partial y}$, $dz\frac{d\theta}{dddz} = \frac{dA}{dddz} - ddx\beta\frac{d\gamma}{dddx} + ddx\gamma\frac{d\beta}{dddx} - ddx\frac{d\beta}{\partial dx} - ddy\beta\frac{d\delta}{dddx} + ddy\delta\frac{d\beta}{dddx} - ddy\frac{d\beta}{\partial dy} - \varepsilon - ddz\beta\frac{d\varepsilon}{dddx} + ddz\varepsilon\frac{d\beta}{dddx} - ddz\frac{d\beta}{\partial dz} - dx\beta\frac{d\zeta}{dddx} + dx\zeta\frac{d\beta}{dddx} - dx\frac{d\beta}{\partial x} - dy\beta\frac{d\eta}{ddax} + dy\eta\frac{d\beta}{dddx} - dy\frac{d\beta}{\partial y}$, & je substitue ces valeurs dans les équations $dz\alpha\frac{d\theta}{dddx} - dz\theta\frac{d\alpha}{dddx} + dz\frac{d\alpha}{\partial z} - dz\frac{d\theta}{dddy} = 0$, & $dz\beta\frac{d\theta}{dddx} - dz\theta\frac{d\beta}{dddx} + dz\frac{d\beta}{\partial z} - dz\frac{d\theta}{dddz} = 0$; j'aurai $\delta = - dx\frac{d\alpha}{\partial x} - dy\frac{d\alpha}{\partial y} - dz\frac{d\alpha}{\partial z} - ddx\frac{d\alpha}{\partial dx} - ddy\frac{d\alpha}{\partial dy} - ddz\frac{d\alpha}{\partial dz} + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\gamma$, & $\varepsilon = - dx\frac{d\beta}{\partial x} - dy\frac{d\beta}{\partial y} - dz\frac{d\beta}{\partial z} - ddx\frac{d\beta}{\partial dx} - ddy\frac{d\beta}{\partial dy} - ddz\frac{d\beta}{\partial dz} + A\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddz} + \beta\gamma$,

ou $\delta = -\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\gamma$,

& $\varepsilon = -\tilde{d}\beta + A\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddz} + \beta\gamma$.

Soit, pour simplifier, $-\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} = B$, & $-\tilde{d}\beta + A\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddz} = C$, on aura $\delta = B + \alpha\gamma$, $\varepsilon = C + \beta\gamma$;

$\frac{d\delta}{dddx} = \frac{d\beta}{dddx} + \alpha\frac{d\gamma}{dddx} + \gamma\frac{d\alpha}{dddx}$, $\frac{d\delta}{dddy} = \frac{dB}{dddy} + \gamma\frac{d\alpha}{dddy} + \alpha^2\frac{d\gamma}{dddx} - \alpha\gamma\frac{d\alpha}{dddx} + \alpha\frac{d\alpha}{\partial dx}$,

$$\frac{d\delta}{dddz} = \frac{dB}{dddz} \begin{matrix} -\alpha\gamma\frac{d\beta}{dddx} \\ -\alpha\gamma\frac{d\beta}{dddx} \end{matrix} + \beta\gamma\frac{d\alpha}{dddx} + \gamma\frac{d\beta}{dddy} + \alpha\beta\frac{d\gamma}{dddx} + \alpha\frac{d\beta}{\partial dx},$$

$\frac{d\varepsilon}{dddx} = \frac{dC}{dddx} + \beta\frac{d\gamma}{dddx} + \gamma\frac{d\beta}{dddx}$, $\frac{d\varepsilon}{dddy} = \frac{dC}{dddy} + \gamma\frac{d\alpha}{dddz} +$

$$\alpha\gamma\frac{d\beta}{dddx} \begin{matrix} -\beta\gamma\frac{d\alpha}{dddx} \\ -\beta\gamma\frac{d\alpha}{dddx} \end{matrix} + \alpha\beta\frac{d\gamma}{dddx} + \beta\frac{d\alpha}{\partial dx},$$

$\frac{d\varepsilon}{dddz} = \frac{dC}{dddz} + \gamma\frac{d\beta}{dddz} + \beta^2\frac{d\gamma}{dddx} - \beta\gamma\frac{d\beta}{dddx} + \beta\frac{d\beta}{\partial dx}$; & en substituant ces valeurs dans les équations

$$\alpha\frac{d\delta}{dddx} - \delta\frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{\partial dy} - \frac{d\delta}{dddy} = 0,$$

$$\beta\frac{d\delta}{dddx} - \delta\frac{d\beta}{dddx} + \frac{d\beta}{\partial dy} - \frac{d\delta}{dddz} = 0;$$

$$\alpha\frac{d\varepsilon}{dddx} - \varepsilon\frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{\partial dz} - \frac{d\varepsilon}{dddy} = 0,$$ &

$$\beta\frac{d\varepsilon}{dddx} - \varepsilon\frac{d\beta}{dddx} + \frac{d\beta}{\partial dz} - \frac{d\varepsilon}{dddz} = 0,$$ on

aura $\gamma = \frac{B\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dB}{dddx} + \frac{dB}{dddy} + \alpha\frac{d\alpha}{\partial dx} - \frac{d\alpha}{\partial dy}}{\alpha\frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddy}}$,

$$\gamma = \frac{B\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dB}{dddx} + \frac{dB}{dddz} + \alpha\frac{d\beta}{\partial dx} - \frac{d\beta}{\partial dy}}{\alpha\frac{d\beta}{dddx} - \frac{d\beta}{dddy}},$$

$$\gamma = \frac{C\frac{d\beta}{dddx} - \beta\frac{dC}{dddx} + \frac{dC}{dddz} + \beta\frac{d\beta}{\partial dx} - \frac{d\beta}{\partial dz}}{\beta\frac{d\beta}{dddx} - \frac{d\beta}{dddz}},$$

& $\gamma = \frac{C\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dC}{dddx} + \frac{dC}{dddy} + \beta\frac{d\alpha}{\partial dx} - \frac{d\alpha}{\partial dz}}{\beta\frac{d\alpha}{dddx} - \frac{d\alpha}{dddz}}$.

En ſubſtituant l'une de ces expreſſions de γ dans les équations $\delta = B' + \alpha\gamma$, $\varepsilon = C + \beta\gamma$, on aura δ & ε.

Les fonctions γ, δ, ε étant connues, on aura ζ, η & θ de la manière ſuivante.

Je prends $dz\frac{d\theta}{\partial dx} = \frac{dA}{\partial dx} - ddx\frac{d\gamma}{\partial dx} - ddy\gamma\frac{d\delta}{dddx} + ddy\delta\frac{d\gamma}{dddx} - ddy\frac{d\gamma}{\partial dy} - ddz\gamma\frac{d\varepsilon}{dddx} + ddz\varepsilon\frac{d\gamma}{dddx} - ddz\frac{d\gamma}{\partial dz} - \zeta - dx\gamma\frac{d\zeta}{dddx} + dx\zeta\frac{d\gamma}{dddx} - dx\frac{d\gamma}{\partial x} - dy\gamma\frac{d\eta}{dddx} + dy\eta\frac{d\gamma}{dddx} - dy\frac{d\gamma}{\partial y}$, $dz\frac{d\theta}{\partial dy} = \frac{dA}{\partial dy} - ddx\delta\frac{d\gamma}{dddx} + ddx\gamma\frac{d\delta}{dddx} - ddx\frac{d\delta}{\partial dx} - ddy\frac{d\delta}{\partial dy} - ddz\delta\frac{d\varepsilon}{dddx} + ddz\varepsilon\frac{d\delta}{dddx} - ddz\frac{d\delta}{\partial dz} - dx\delta\frac{d\zeta}{dddx} + dx\zeta\frac{d\delta}{dddx} - dx\frac{d\delta}{\partial x} - \eta - dy\delta\frac{d\eta}{dddx} + dy\eta\frac{d\delta}{dddx} - dy\frac{d\delta}{\partial y}$, & je

substitue pour $dz\theta$, $dz\frac{d\theta}{dddx}$, $dz\frac{d\theta}{\partial dx}$ & $dz\frac{d\theta}{\partial dx}$ leurs valeurs dans les équations $dz\gamma\frac{d\theta}{dddx} - dz\theta\frac{d\gamma}{dddx} + dz\frac{d\gamma}{\partial z} - dz\frac{d\theta}{\partial dx} = 0$, $dz\delta\frac{d\theta}{dddx} - dz\theta\frac{d\delta}{dddx} + dz\frac{d\delta}{\partial z} - dz\frac{d\theta}{\partial dy} = 0$; j'aurai $\zeta = -\tilde{d}\gamma + A\frac{d\gamma}{dddx} - \gamma\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \gamma^2$, $\eta = -\tilde{d}\delta + A\frac{d\delta}{dddx} - \delta\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \gamma\delta$, & par analogie, $\theta = -\tilde{d}\epsilon + A\frac{d\epsilon}{dddx} - \epsilon\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{\partial dz} + \gamma\epsilon$.

On substituera les valeurs de toutes ces fonctions dans $f(2ddx + 2\alpha ddy + 2\mathcal{C}ddz + \gamma dx + \delta dy + \epsilon dz) = e(\zeta x + \eta y + \theta z - ddx - \alpha ddy - \mathcal{C}ddz)$, & on aura les conditions entre les fonctions α, $\mathcal{C}$ & A.

Lorsqu'on aura la fonction φ, on la fera $= ap^f dq^e$, & le nombre a servira à remplir l'une des conditions du problème auquel appartiendra l'équation proposée.

On peut avoir fait dy constante, ou ddy & $dddy = 0$, & par conséquent la fonction α peut n'être pas donnée.

L'équation proposée sera $dddx + \beta dddz + B = 0$, β & B ne seront fonctions que de x, y, z, dx, dy, dz, ddx & ddz.

Je réduis la question à trouver l'équation $dddx + \alpha dddy + \mathcal{C}dddz + A = 0$, que l'on auroit eue en cas qu'on n'eût fait aucune première différence constante.

α, $\mathcal{C}$ & A sont des fonctions de x, y, z, dx, dy, dz, ddx, ddy & ddz, qui doivent pouvoir appartenir à une même fonction φ, & être en même temps telles que ddy devenant $= 0$, $\mathcal{C}$ devienne $= \beta$, & A devienne $= B$.

Ce problème paroît très-indéterminé; mais on voit que de toutes les solutions qui sont possibles, il suffit d'en avoir

une ſeule qui ſoit générale. Pour y parvenir, je parcours les différens cas de l'équation générale $dddx + \alpha dddy + \mathit{6} dddz + A = 0$, & je tâche d'en trouver un où les conditions entre les fonctions α, $\mathit{6}$ & A ſoient données par des expreſſions les plus ſimples qu'il eſt poſſible.

Ayant ces conditions, je cherche pour α, $\mathit{6}$ & A des fonctions qui y ſoient ſoûmiſes, & qui ſoient en même temps telles que ddy devenant $= 0$, $\mathit{6}$ devienne $= \beta$, & A devienne $= B$.

Nous avons trouvé $\delta = -\tilde{d}\alpha + A\frac{d\alpha}{dddx} - \alpha\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddy} + \alpha\gamma$, & $\varepsilon = -\tilde{d}\mathit{6} + A\frac{d\mathit{6}}{dddx} - \mathit{6}\frac{dA}{dddx} + \frac{dA}{dddz} + \mathit{6}\gamma$. Je ſubſtitue ces valeurs de δ & de ε dans $\mu(2ddx + 2ddy\alpha + 2ddz\mathit{6} + dx\gamma + dy\delta + dz\varepsilon) = e\varphi$; j'aurai $\mu(2ddx + 2ddy\alpha + 2ddz\mathit{6} + dx\gamma - dy\tilde{d}\alpha + dyA\frac{d\alpha}{dddx} - dy\alpha\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} + dy\alpha\gamma - dz\tilde{d}\mathit{6} + dzA\frac{d\mathit{6}}{dddx} - dz\mathit{6}\frac{dA}{dddx} + dz\frac{dA}{dddz} + dz\mathit{6}\gamma) = e\varphi$.

Je fais $dx + dy\alpha + dz\mathit{6} = 0$, j'aurai $\alpha = \frac{-dx - dz\mathit{6}}{dy}$, $\tilde{d}\alpha = \frac{dxddy - dyddx + (dzddy - dyddz)\mathit{6} - dydz\tilde{d}\mathit{6}}{dy^2}$ &

$$\frac{d\alpha}{dddx} = \frac{-dz\frac{d\mathit{6}}{dddx}}{dy};$$

$$\text{donc } \mu \cdot \frac{\left\{\begin{matrix} 3(dyddx - dxddy + dyddz\mathit{6} - dzddy\mathit{6}) \\ + dy\left(dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} + dz\frac{dA}{dddz}\right) \end{matrix}\right\}}{dy} = e\varphi.$$

Je ſuppoſe que φ ſoit une fonction finie, ou que e ſoit $= 0$, j'aurai $dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} + dz\frac{dA}{dddz} =$

$3\left(\frac{dx\,ddy - dy\,ddx + dz\,ddy\,\zeta - dy\,ddz\,\zeta}{dy}\right)$. Je substitue aussi pour α $\frac{d\alpha}{dddx}$ & $\frac{d\alpha}{dddz}$ leurs valeurs $\frac{-dx - dz\zeta}{dy}$, $\frac{-dz\frac{d\zeta}{dddx}}{dy}$ & $\frac{-dz\frac{d\zeta}{dddz}}{dy}$ dans l'équation $\alpha\frac{d\zeta}{dddx} - \zeta\frac{d\alpha}{dddx} + \frac{d\alpha}{dddz} - \frac{d\zeta}{dddy} = 0$; j'aurai $dx\frac{d\zeta}{dddx} + dy\frac{d\zeta}{dddy} + dz\frac{d\zeta}{dddz} = 0$.

Afin donc de résoudre notre problème par le cas que nous venons de déterminer, 1.° il faut faire $\alpha = \frac{-dx - dz\zeta}{dy}$; 2.° trouver une fonction ζ telle que $dx\frac{d\zeta}{dddx} + dy\frac{d\zeta}{dddy} + dz\frac{d\zeta}{dddz} = 0$, & qui devienne $= \beta$, ddy devenant $= 0$; 3.° trouver une fonction A qui devienne $= B$, lorsque ddy deviendra $= 0$, & qui soit en même temps telle que $dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} + dz\frac{dA}{dddz} = 3\left(\frac{dx\,ddy - ddy\,dx + dz\,ddy\,\zeta - dy\,ddz\,\zeta}{dy}\right)$.

Substituez $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy}$ & $\frac{dy\,ddz - dz\,ddy}{dy}$ au lieu de ddx & de ddz dans β, & vous aurez ζ. Substituez de même $\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy}$ & $\frac{dy\,ddz - dz\,ddy}{dy}$ au lieu de ddx & de ddz dans B, vous aurez D; & faites $A = D + \frac{3\,ddy}{dy^2}(dx\,ddy - dy\,ddx + dz\,ddy\,\zeta - dy\,ddz\,\zeta)$, le problème sera résolu. Car, 1.° il est évident que ζ & A deviendront β & B, lorsque ddy deviendra $= 0$. 2.° On aura $dx\frac{d\zeta}{dddx} + dy\frac{d\zeta}{dddy} + dz\frac{d\zeta}{dddz} = 0$, & $dx\frac{dA}{dddx} + dy\frac{dA}{dddy} + dz\frac{dA}{dddz} =$

$3\left(\frac{dxddy - dyddx + dzddy\zeta - dyddz\zeta}{dy}\right)$. On peut donc toûjours, au lieu de l'équation $dddx + \beta dddz + B = 0$, que je ſuppoſe qu'on ait eue en faiſant dy conſtante, prendre $dddx + \frac{-dx - dz\zeta}{dy} dddy + \zeta dddz + D + \frac{3ddy}{dy^2}$ $(dxddy - dyddx + dzddy\zeta - dyddz\zeta) = 0$, ζ & D étant ce que deviennent β & B en y mettant $\frac{dyddx - dxddy}{dy}$ & $\frac{dyddz - dzddy}{dy}$ au lieu de ddx & de ddz. J'ai cherché la ſolution générale de ce problème; la voici en peu de mots.

PROBLÉME.

Étant donnée une équation différencielle d'un ordre quelconque, à laquelle je ſuppoſe qu'on ſoit arrivé en faiſant conſtante la première différence de l'une des variables qui la compoſent, trouver l'équation qu'on auroit eue, en cas qu'on n'eût fait aucune première différence conſtante.

Solution.

Soient x, y, z, u, &c. les variables de l'équation, & ſuppoſons qu'on ait fait dy conſtante; ſubſtituez dans cette équation pour ddx, ddz, ddu, &c. $dddx$, $dddz$, $dddu$, &c. $ddddx$, $ddddz$, $ddddu$, &c. &c. les valeurs ſuivantes $dy . d\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $dy . d\left(\frac{dz}{dy}\right)$, $dy . d\left(\frac{du}{dy}\right)$, &c. $dy^2 . d\left(\frac{ddx}{dy^2}\right)$, $dy^2 . d\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, $dy^2 . d\left(\frac{ddu}{dy^2}\right)$, &c. $dy^3 . d\left(\frac{dddx}{dy^3}\right)$, $dy^3 . d\left(\frac{dddz}{dy^3}\right)$, $dy^3 . d\left(\frac{dddu}{dy^3}\right)$, &c. &c. & le problème ſera réſolu.

Lorſque vous aurez $\frac{dyddx - dxddy}{dy}$ à ſubſtituer au lieu de ddx, vous le ſubſtituerez premièrement dans $dy^2 . d\left(\frac{ddx}{dy^2}\right)$, &

& vous aurez $dy^2 . d\left(\frac{dyddx - dxddy}{dy^3}\right)$, ou $\frac{dy^2dddx - dxdydddy - 3dyddxddy + 3dxddy^2}{dy^2}$ à ſubſtituer au lieu de $dddx$; vous le ſubſtituerez premièrement dans $dy^3 . d\left(\frac{dddx}{dy^3}\right)$, & vous aurez

$$dy^3 . d\left(\frac{dy^2dddx - dxdydddy - 3dyddxddy + 3dxddy^2}{dy^5}\right),$$

ou $$\frac{\left\{\begin{matrix} dy^3ddddx - dxdy^2ddddy - 6dy^2ddydddx + 10dxdyddydddy \\ - 4dy^2ddxdddy + 15dyddxddy^2 - 15dxddy^3 \end{matrix}\right\}}{dy^3}$$ à ſubſtituer au lieu de $ddddx$, &c. & ainſi des autres.

Si au lieu d'une équation l'on avoit une expreſſion quelconque à transformer, il eſt aiſé de voir que la règle ſeroit la même, une équation n'étant qu'une certaine expreſſion égalée à zéro; & elle eſt fondée ſur ce que ſi l'on ſuppoſe $dx = ady$, $dz = bdy$, $du = cdy$, &c. (a, b, c, &c. étant des fonctions de quantités conſtantes & des variables x, y, z, u, &c.) toute expreſſion analytique de ces quantités, & de leurs premières, ſecondes, troiſièmes, quatrièmes, &c. différences, infiniment petite d'un ordre quelconque e, doit toûjours pouvoir ſe réduire à Ady^e, A n'étant fonction que de quantités finies, ſoit que pour avoir cette expreſſion l'on ait fait dy conſtante, ſoit qu'on n'ait fait aucune différence conſtante.

Ayant fait dy conſtante, & les équations $dx = ady$, $dz = bdy$, $du = cdy$, &c. étant ſuppoſées, on aura

$ddx = \bar{a}dy^2$, $ddz = \bar{b}dy^2$, $ddu = \bar{c}dy^2$, &c.

$dddx = \bar{\bar{a}}dy^3$, $dddz = \bar{\bar{b}}dy^3$, $dddu = \bar{\bar{c}}dy^3$, &c.

$ddddx = \bar{\bar{\bar{a}}}dy^4$, $ddddz = \bar{\bar{\bar{b}}}dy^4$, $ddddu = \bar{\bar{\bar{c}}}dy^4$, &c. &c.

Si l'on n'a fait aucune première différence conſtante, & que l'expreſſion ſoit conforme à la règle que nous donnons ici, on aura $\frac{dx}{dy} = a$; donc $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \bar{a}dy$, ou 1.°

$dyd\,(\frac{dx}{dy}) = \bar{a}dy^2$, d'où l'on tirera $\frac{dyddx - dxddy}{dy \,.\, dy^2} = \bar{a}$,
donc $d\,(\frac{dyddx - dxddy}{dy \,.\, dy^2}) = \bar{\bar{a}}dy$, ou $dy^2 d\,(\frac{dyddx - dxddy}{dy \,.\, dy^2})$
$= \bar{\bar{a}}dy^3$, ou 2.° $dy^2 d\,(\frac{ddx}{dy^2}) = \bar{\bar{a}}dy^3$, par conséquent
on aura $(\frac{dy^2dddx - dxdydddy - 3dyddxddy + 3dxddy^2}{dy^5}) = \bar{\bar{a}}$;
donc $d\,(\frac{dy^2dddx - dxdydddy - 3dyddxddy + 3dxddy^2}{dy^2 \,.\, dy^3}) = \bar{\bar{\bar{a}}}dy$,
ou $dy^3 d\,(\frac{dy^2dddx - dxdydddy - 3dyddxddy + 3dxddy^2}{dy^2 \,.\, dy^3}) = \bar{\bar{\bar{a}}}dy^4$,
ou 3.° $dy^3 d\,(\frac{dddx}{dy^3}) = \bar{\bar{\bar{a}}}dy^4$, &c. & ainſi des autres.
On réduira donc l'expreſſion propoſée à Ady^e, comme on le faiſoit lorſque dy avoit été faite conſtante.



CALCUL DES ÉQUATIONS
AUX QUATRIÉMES DIFFÉRENCES.
PROBLÉME I.

SOIT $ddddx + \alpha ddddy + A = 0$, l'équation qu'il faut intégrer, α étant une fonction de dimension nulle des quantités x, y, dx, dy, ddx, ddy, $dddx$ & $dddy$, & A étant une fonction de ces mêmes quantités dont la dimension est $= 1$.

La question se réduit à trouver une fonction φ de x, y, dx, dy, ddx, ddy, $dddx$ & $dddy$, dont la différence, en faisant différence de $x = dx$, différence de $y = dy$, différence de $dx = ddx$, différence de $dy = ddy$, différence de $ddx = dddx$, & différence de $ddy = dddy$, divisée par le coëfficient de $ddddx$, soit $ddddx + \alpha ddddy + A$.

Si au lieu de faire la différence de $x = dx$, celle de $y = dy$, celle de $dx = ddx$, celle de $dy = ddy$, celle de $ddx = dddx$, & celle de $ddy = dddy$, on eût fait la différence de $x = \partial x$, celle de $y = \partial y$, celle de $dx = \partial dx$, celle de $dy = \partial dy$, celle de $ddx = \partial ddx$, & celle de $ddy = \partial ddy$, on auroit eu $ddddx + \alpha ddddy + \beta \partial ddx + \gamma \partial ddy + \delta \partial dx + \epsilon \partial dy + \zeta \partial x + \eta \partial y = 0$.

β, γ, δ, ϵ, ζ & η sont des fonctions de x, y, dx, dy, ddx, ddy, $dddx$ & $dddy$ qui doivent être telles que $\beta dddx + \gamma dddy + \delta ddx + \epsilon ddy + \zeta dx + \eta dy = A$; & si l'on n'eût pas divisé par la fonction qui multiplioit $ddddx$, on auroit eu $\mu ddddx + \alpha \mu ddddy + \beta \mu \partial ddx + \gamma \mu \partial ddy + \delta \mu \partial dx + \epsilon \mu \partial dy + \zeta \mu \partial x + \eta \mu \partial y = d\varphi$.

μ est une fonction de x, y, dx, dy, ddx, ddy, $dddx$ & $dddy$ qui est inconnue.

Si avant de prendre la différence de φ, au lieu de $dddx$,

de $dddy$, de ddx & de ddy, on eût mis dans cette fonction $\frac{dx^2 dr}{x^2}$, $\frac{dx^2 ds}{x^2}$, $\frac{dx\,dt}{x}$ & $\frac{dx\,dv}{x}$, & si après en avoir pris la différence, au lieu de dr, de ds, de dt & de dv, on eût remis dans cette différence $\frac{x^2 dddx}{dx^2}$, $\frac{x^2 dddy}{dx^2}$, $\frac{x\,ddx}{dx}$ & $\frac{x\,ddy}{dx}$, on auroit eu $\mu . d(\frac{dx^2 dr}{x^2}) + \alpha\mu . d(\frac{dx^2 ds}{x^2}) + \beta\mu . d(\frac{dx\,dt}{x})$ $+ \gamma\mu . d(\frac{dx\,dv}{x}) + \delta\mu\partial dx + \varepsilon\mu\partial dy + \zeta\mu\partial x + \eta\mu\partial y$ $= d\varphi$; mais $d(\frac{dx^2 dr}{x^2}) = \frac{dx^2}{x^2} ddr + \frac{2dddx}{dx}\partial dx - \frac{2dddx}{x}\partial x$, $d(\frac{dx^2 ds}{x^2}) = \frac{dx^2}{x^2} dds + \frac{2dddy}{dx}\partial dx - \frac{2dddy}{x}\partial x$, $d(\frac{dx\,dt}{x}) = \frac{dx}{x} ddt + \frac{ddx}{dx}\partial dx - \frac{ddx}{x}\partial x$, & $d(\frac{dx\,dv}{x}) = \frac{dx}{x} ddv + \frac{ddy}{dx}\partial dx - \frac{ddy}{x}\partial x$: on auroit donc eu $\mu\frac{dx^2}{x^2} ddr + \alpha\mu\frac{dx^2}{x^2} dds + \beta\mu\frac{dx}{x} ddt$ $+ \gamma\mu\frac{dx}{x} ddv + (\delta\mu + 2\mu\frac{dddx}{dx} + 2\alpha\mu\frac{dddy}{dx}$ $+ \beta\mu\frac{ddx}{dx} + \gamma\mu\frac{ddy}{dx})\partial dx + \varepsilon\mu\partial dy + (\zeta\mu - 2\mu\frac{dddx}{x}$ $- 2\alpha\mu\frac{dddy}{x} - \beta\mu\frac{ddx}{x} - \gamma\mu\frac{ddy}{x})\partial x + \eta\mu\partial y = d\varphi$. Je suppose présentement que la dimension de φ en dx, dy, dr, ds, dt & dv étoit $= e$, & qu'en x & y elle étoit $= f$, j'aurai $3\mu dddx + 3\alpha\mu dddy + 2\beta\mu ddx$ $+ 2\gamma\mu ddy + \delta\mu dx + \varepsilon\mu dy = e\varphi$, & $\zeta\mu x + \eta\mu y$ $- 2\mu dddx - 2\alpha\mu dddy - \beta\mu ddx - \gamma\mu ddy = f\varphi$; donc $f(3dddx + 3\alpha dddy + 2\beta ddx + 2\gamma ddy$ $+ \delta dx + \varepsilon dy) = e(\zeta x + \eta y - 2dddx$ $- 2\alpha dddy - \beta ddx - \gamma ddy)$, & $\frac{\frac{1}{e} d\varphi}{\varphi} =$

$$\frac{\partial dddx + \alpha\partial dddy + \beta\partial ddx + \gamma\partial ddy + \delta\partial dx + \varepsilon\partial dy + \zeta\partial x + \eta\partial y}{3dddx + 3\alpha dddy + 2\beta ddx + 2\gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy}.$$

Pour avoir les fonctions β, γ, δ, ε, ζ & η, je prends

$dy\eta = A - \beta dddx - \gamma dddy - \delta ddx - \varepsilon ddy - \zeta dx$,

$dy \frac{d\eta}{ddddx} = \frac{dA}{ddddx} - \beta - dddx \frac{d\beta}{ddddx} - dddy \frac{d\gamma}{ddddx} - ddx \frac{d\delta}{ddddx} - ddy \frac{d\varepsilon}{ddddx} - dx \frac{d\zeta}{ddddx}$,

$dy \frac{d\eta}{ddddy} = \frac{dA}{ddddy} - dddx\alpha \frac{d\beta}{ddddx} + dddx\beta \frac{d\alpha}{ddddx} - dddx \frac{d\alpha}{\partial ddx} - \gamma - dddy\alpha \frac{d\gamma}{ddddx} + dddy\gamma \frac{d\alpha}{ddddx} - dddy \frac{d\alpha}{\partial ddy} - ddx\alpha \frac{d\delta}{ddddx} + ddx\delta \frac{d\alpha}{ddddx} - ddx \frac{d\alpha}{\partial dx} - ddy\alpha \frac{d\varepsilon}{ddddx} + ddy\varepsilon \frac{d\alpha}{ddddx} - ddy \frac{d\alpha}{\partial dy} - dx\alpha \frac{d\zeta}{ddddx} + dx\zeta \frac{d\alpha}{ddddx} - dx \frac{d\alpha}{\partial x}$,

& je substitue ces valeurs dans l'équation

$dy\alpha \frac{d\eta}{ddddx} - dy\eta \frac{d\alpha}{ddddx} + dy \frac{d\alpha}{\partial y} - dy \frac{d\eta}{ddddy} = 0$;

j'aurai $- dx \frac{d\alpha}{\partial x} - dy \frac{d\alpha}{\partial y} - ddx \frac{d\alpha}{\partial dx} - ddy \frac{d\alpha}{\partial dy} - dddx \frac{d\alpha}{\partial ddx} - dddy \frac{d\alpha}{\partial ddy} + A \frac{d\alpha}{ddddx} - \alpha \frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{ddddy} + \alpha\beta = \gamma$, ou $\gamma = - \tilde{d}\alpha + A \frac{d\alpha}{ddddx} - \alpha \frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{ddddy} + \alpha\beta$.

Soit $- \tilde{d}\alpha + A \frac{d\alpha}{ddddx} - \alpha \frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{ddddy} = B$, on aura $\gamma = B + \alpha\beta$, $\frac{d\gamma}{ddddx} = \frac{dB}{ddddx} + \alpha \frac{d\beta}{ddddx} + \beta \frac{d\alpha}{ddddx}$ & $\frac{d\gamma}{ddddy} = \frac{dB}{ddddy} + \beta \frac{d\alpha}{ddddy} + \alpha^2 \frac{d\beta}{ddddx} - \alpha\beta \frac{d\alpha}{ddddx} + \alpha \frac{d\alpha}{\partial ddx}$; & en substituant ces valeurs dans l'équation $\alpha \frac{d\gamma}{ddddx} - \gamma \frac{d\alpha}{ddddy} + \frac{d\alpha}{\partial ddy} - \frac{d\gamma}{ddddy} = 0$,

on aura $\beta = \dfrac{B\dfrac{d\alpha}{ddddx} - \alpha\dfrac{dB}{ddddx} + \dfrac{dB}{ddddy} + \alpha\dfrac{d\alpha}{\partial ddx} - \dfrac{d\alpha}{\partial ddy}}{\alpha\dfrac{d\alpha}{ddddx} - \dfrac{d\alpha}{ddddy}}$,

& par conséquent

$$\gamma = \frac{\left(2\alpha\dfrac{d\alpha}{ddddx} - \dfrac{d\alpha}{ddddy}\right)B - \alpha^2\dfrac{dB}{ddddx} + \alpha\dfrac{dB}{ddddy} + \alpha^2\dfrac{d\alpha}{\partial ddx} - \alpha\dfrac{d\alpha}{\partial ddy}}{\alpha\dfrac{d\alpha}{ddddx} - \dfrac{d\alpha}{ddddy}}.$$

Je regarde donc ces deux fonctions comme connues; & pour avoir δ, je prends $dy\dfrac{d\eta}{\partial ddx} = \dfrac{dA}{\partial ddx} - dddx\dfrac{d\beta}{\partial ddx} - dddy\beta\dfrac{d\gamma}{ddddx} + dddy\gamma\dfrac{d\beta}{ddddx} - dddy\dfrac{d\beta}{\partial ddy} - \delta - ddx\beta\dfrac{d\delta}{ddddx} + dddx\delta\dfrac{d\beta}{ddddx} - dddx\dfrac{d\beta}{\partial dx} - ddy\beta\dfrac{d\varepsilon}{ddddx} + ddy\varepsilon\dfrac{d\beta}{ddddx} - ddy\dfrac{d\beta}{\partial dy} - dx\beta\dfrac{d\zeta}{ddddx} + dx\zeta\dfrac{d\beta}{ddddx} - dx\dfrac{d\beta}{\partial x}$, & je substitue pour $dy\eta$, $dy\dfrac{d\eta}{ddddx}$ & $dy\dfrac{d\eta}{\partial ddx}$, leurs valeurs dans l'équation $dy\beta\dfrac{d\eta}{ddddx} - dy\eta\dfrac{d\beta}{ddddx} + dy\dfrac{d\beta}{\partial y} - dy\dfrac{d\eta}{\partial ddx} = 0$; j'aurai $\delta = -\tilde{d}\beta + A\dfrac{d\beta}{ddddx} - \beta\dfrac{dA}{ddddx} + \dfrac{dA}{\partial ddx} + \beta^2$.

Pour avoir ε, je prends $dy\dfrac{d\eta}{\partial ddy} = \dfrac{dA}{\partial ddy} - dddx\gamma\dfrac{d\beta}{ddddx} + dddx\beta\dfrac{d\gamma}{ddddx} - dddx\dfrac{d\gamma}{\partial ddx} - dddy\dfrac{d\gamma}{\partial ddy} - ddx\gamma\dfrac{d\delta}{ddddx} + ddx\delta\dfrac{d\gamma}{ddddx} - ddx\dfrac{d\gamma}{\partial dx} - \varepsilon - ddy\gamma\dfrac{d\varepsilon}{ddddx} + ddy\varepsilon\dfrac{d\gamma}{ddddx} - ddy\dfrac{d\gamma}{\partial dy} - dx\gamma\dfrac{d\zeta}{ddddx} + dx\zeta\dfrac{d\gamma}{ddddx} - dx\dfrac{d\gamma}{\partial x}$, & je substitue pour $dy\eta$, $dy\dfrac{d\eta}{ddddx}$ & $dy\dfrac{d\eta}{\partial ddy}$, leurs valeurs dans l'équation

$$dy\gamma\frac{d\eta}{ddddx} - dy\eta\frac{d\gamma}{ddddx} + dy\frac{d\gamma}{\partial y} - dy\frac{d\eta}{\partial ddy} = 0;$$

j'aurai $\varepsilon = -\tilde{a}\gamma + A\frac{d\gamma}{ddddx} - \gamma\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial ddy} + \beta\gamma$.

Les fonctions β, γ, δ & ε étant connues, pour avoir ζ, je prends $dy\frac{d\eta}{\partial dx} = \frac{dA}{\partial dx} - dddx\delta\frac{d\beta}{ddddx} + dddx\beta\frac{d\delta}{ddddx} - dddx\frac{d\delta}{\partial ddx} - dddy\delta\frac{d\gamma}{ddddx} + dddy\gamma\frac{d\delta}{ddddx} - dddy\frac{d\delta}{\partial ddy} - ddx\frac{d\delta}{\partial dx} - ddy\delta\frac{d\varepsilon}{ddddx} + ddy\varepsilon\frac{d\delta}{ddddx} - ddy\frac{d\delta}{\partial dy} - \zeta - dx\delta\frac{d\zeta}{ddddx} + dx\zeta\frac{d\delta}{ddddx} - dx\frac{d\delta}{\partial x}$, & je substitue pour $dy\eta$, $dy\frac{d\eta}{ddddx}$ & $dy\frac{d\eta}{\partial dx}$, leurs valeurs dans l'équation

$$dy\delta\frac{d\eta}{ddddx} - dy\eta\frac{d\delta}{ddddx} + dy\frac{d\delta}{\partial y} - dy\frac{d\eta}{\partial dx} = 0;$$

j'aurai $\zeta = -\tilde{a}\delta + A\frac{d\delta}{ddddx} - \delta\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial dx} + \beta\delta$,

& par analogie,

$$\eta = -\tilde{a}\varepsilon + A\frac{d\varepsilon}{ddddx} - \varepsilon\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial dy} + \beta\varepsilon.$$

Les fonctions β, γ, δ, ε, ζ & η étant connues, on les substituera dans $f(3dddx + 3\alpha dddy + 2\beta ddx + 2\gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy) = e(\zeta x + \eta y - 2dddx - 2\alpha dddy - \beta ddx - \gamma ddy)$, & on aura les conditions entre α & A. On les substituera dans $\frac{\frac{1}{e}d\varphi}{\varphi} = \frac{ddddx + \alpha ddddy + \beta\partial ddx + \gamma\partial ddy + \delta\partial dx + \varepsilon\partial dy + \zeta\partial x + \eta\partial y}{3dddx + 3\alpha dddy + 2\beta ddx + 2\gamma ddy + \delta dx + \varepsilon dy}$, & on aura φ par le moyen de cette équation.

Ayant φ, on fera cette fonction $= ap^f dq^e$, & le nombre a servira à remplir l'une des conditions du problème auquel appartiendra l'équation proposée.

Je suppose qu'on ait fait dy constante, & parmi tous les cas possibles de l'équation générale $ddddx + \alpha ddddy + A = 0$, je vais chercher celui dans lequel sera l'équation qu'on aura (par la règle que nous avons donnée dans le Chapitre précédent) à la place de celle qu'on avoit eue en faisant dy constante.

α sera $= \frac{-dx}{dy}$.

On aura donc $ddddx + \frac{-dx}{dy} ddddy + A = 0$;

$$ddddx + \frac{-dx}{dy} ddddy + \beta\partial ddx + \gamma\partial ddy + \delta\partial dx + \varepsilon\partial dy + \zeta\partial x + \eta\partial y = 0,\ \beta dddx + \gamma dddy + \delta ddx + \varepsilon ddy + \zeta dx + \eta dy = A,$$

$$\mu ddddx + \frac{-\mu dx}{dy} ddddy + \beta\mu\partial ddx + \gamma\mu\partial ddy + \delta\mu\partial dx + \varepsilon\mu\partial dy + \zeta\mu\partial x + \eta\mu\partial y = d\varphi,$$

$$\mu . \frac{3(dydddx - dxdddy) + 2dyddx\beta + 2dyddy\gamma + dxdy\delta + dy^2\varepsilon}{dy} = e\varphi,$$

$$\mu . \frac{xdy\zeta + ydy\eta - 2(dydddx - dxdddy) - dyddx\beta - dyddy\gamma}{dy} = f\varphi,$$

$$\gamma = \frac{dyddx - dxddy + dy\left(dx\frac{dA}{ddddx} + dy\frac{dA}{ddddy}\right) - dxdy\beta}{dy^2} \text{ ou}$$

(en faisant, pour abréger, $\frac{dyddx - dxddy + dy\left(dx\frac{dA}{ddddx} + dy\frac{dA}{ddddy}\right)}{dy^2} = C$)

$$\gamma = C - \frac{dx}{dy}\beta,$$

$$\delta = -\tilde{\partial}\beta + A\frac{d\beta}{ddddx} - \beta\frac{dA}{dddax} + \frac{dA}{\partial ddx} + \beta^2;$$

$$\varepsilon = -\tilde{\partial}\gamma + A\frac{d\gamma}{ddddx} - \gamma\frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial ddy} + \beta\gamma,$$

ou (en substituant pour γ, $\tilde{\partial}\gamma$ & $\frac{d\gamma}{ddddx}$, leurs valeurs $C - \frac{dx}{dy}\beta$, $\tilde{\partial}C - \frac{dx}{dy}\tilde{\partial}\beta + \frac{dxddy - dyddx}{dy^2}\beta$

&

& $\frac{dC}{ddddx} - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d\beta}{ddddx}$), $\varepsilon = - \tilde{d}C + \frac{dx}{dy} \tilde{d}\beta +$
$2 \cdot \frac{dyddx - dxddy}{dy^2} \beta + A \frac{dC}{ddddx} - C \frac{dA}{ddddx} - \frac{dx}{dy} A \frac{d\beta}{ddddx} +$

$$\frac{dx}{dy} \beta \frac{dA}{ddddx} + \frac{dA}{\partial ddy} + \frac{dx \frac{dA}{ddddx} + dy \frac{dA}{ddddy}}{dy} \beta - \frac{dx}{dy} \beta^2.$$

Je ſubſtitue pour γ, δ & ε leurs valeurs dans

$$\mu \cdot \frac{3(dydddx - dxdddy) + 2dyddx\beta + 2dyddy\gamma + dxdy\delta + dy^2\varepsilon}{dy} = e\varphi;$$

j'aurai

$$\mu \cdot \frac{\left\{ \begin{array}{l} 3(dydddx - dxdddy) + 4(dyddx - dxddy)\beta + \\ 2dyddyC + dxdy \frac{dA}{\partial ddx} - dy^2 \tilde{d}C + dy^2 A \frac{dC}{ddddx} - \\ dy^2 C \frac{dA}{ddddx} + dy^2 \frac{dA}{\partial ddy} + dy \cdot (dx \frac{dA}{ddddx} + dy \frac{dA}{ddddy})\beta \end{array} \right\}}{dy} = e\varphi.$$

Je ſuppoſe que φ étoit une fonction finie, ou que e étoit $= 0$; j'aurai

$$\beta = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -3(dydddx - dxdddy) - 2dyddyC - dxdy \frac{dA}{\partial ddx} + \\ dy^2 \tilde{d}C + dy^2 C \frac{dA}{ddddx} - dy^2 A \frac{dC}{ddddx} - dy^2 \frac{dA}{\partial ddy} \end{array} \right\}}{4(dyddx - dxddy) + dy(dx \frac{dA}{ddddx} + dy \frac{dA}{ddddy})}$$

Soit $4(dyddx - dxddy) + dy(dx \frac{dA}{ddddx} + dy \frac{dA}{ddddy}) = 0$, & par conſéquent auſſi $- 3(dydddx - dxdddy) - 2dyddyC - dxdy \frac{dA}{\partial ddx} + dy^2 \tilde{d}C + dy^2 C \frac{dA}{ddddx} - dy^2 A \frac{dC}{ddddx} - dy^2 \frac{dA}{\partial ddy} = 0$; en mettant dans C pour $dx \frac{dA}{ddddx} + dy \frac{dA}{ddddy}$ ſa valeur $4(\frac{dxddy - dyddx}{dy})$, on aura $C = 3(\frac{dxddy - dyddx}{dy^2})$, $\tilde{d}C = 3 \cdot (\frac{dxdydddy - dy^2 dddx - 2dxddy^2 + 2dyddxddy}{dy^3})$

& $\frac{dC}{ddddx} = 0$; & en substituant ces valeurs de C, dC & $\frac{dC}{ddddx}$, on aura $6(dxdddy - dydddx) + 12\,ddy\left(\frac{dxddy - dyddx}{dy}\right) - dy\left(dx\frac{dA}{\partial ddx} + dy\frac{dA}{\partial ddy}\right) + 3\,(dxddy - dyddx)\,\frac{dA}{ddddx} = 0.$

Soit maintenant l'équation proposée $ddddx + B = 0$; B étant une fonction de x, y, dx, dy, ddx & $dddx$, dont la dimension $= 1$.

Pour transformer cette équation, il faut, suivant la méthode que nous avons donnée, y substituer $\frac{dyddx - dxddy}{dy}$,

$$\frac{dy^2dddx - dxdyddddy - 3\,dyddxddy + 3\,dxddy^2}{dy^2}$$ &

$$\frac{\left\{\begin{matrix} dy^3ddddx - dxdy^2ddddy - 6\,dy^2ddydddx + 10\,dxdyddydddy \\ - 4\,dy^2ddxdddy - 15\,dyddxddy^2 + 15\,dxddy^3 \end{matrix}\right\}}{dy^3}$$

au lieu de ddx, de $dddx$ & de $ddddx$. Je suppose que B deviendra $= D$, on aura $ddddx + \frac{-dx}{dy}ddddy + D +$

$$\frac{\left\{\begin{matrix} -\,6\,dy^2ddydddx + 10\,dxdyddydddy - \\ 4\,dy^2ddxdddy + 15\,dyddxddy^2 - 15\,dxddy^3 \end{matrix}\right\}}{dy^3} = 0.$$

Soit $A = D + \frac{\left\{\begin{matrix} -\,6dy^2ddydddx + 10dxdyddydddy - \\ 4dy^2ddxdddy + 15dyddxddy^2 - 15dxddy^3 \end{matrix}\right\}}{dy^3}$,

on aura $\frac{dA}{ddddx} = \frac{dB}{ddddx} + \frac{-\,6ddy}{dy}$,

$$\frac{dA}{ddddy} = \frac{dB}{ddddx}\cdot\frac{-dx}{dy} + \frac{10\,dxddy - 4\,dyddx}{dy^2};$$

$$\frac{dA}{\partial ddx} = \frac{dB}{\partial ddx} + \frac{-\,4\,dydddy + 15\,ddy^2}{dy^2} + \frac{dB}{ddddx}\cdot\frac{-\,3\,ddy}{dy}$$

& $$\frac{dA}{\partial ddy} = \frac{dB}{\partial ddx}\cdot\frac{-dx}{dy} + \frac{dB}{ddddx}\cdot\frac{-\,3\,dyddx + 6\,dxddy}{dy^2}$$

$$+ \frac{-\,6\,dy^2dddx + 10\,dxdydddy + 30\,dyddxddy - 45\,dxddy^2}{dy^3};$$

& on verra que $dx \frac{dA}{ddddx} + dy \frac{dA}{ddddx} = - 4\left(\frac{dyddx - dxddy}{dy}\right)$, que $3dy(dxddy - dyddx)\frac{dA}{ddddx} - dy^2\left(dx\frac{dA}{Dddx} + dy\frac{dA}{\partial ddy}\right) + 6dy(dxdddy - dydddx) - 12ddy(dxddy - dyddx) = 0$, & que par conſéquent l'équation $ddddx + \frac{-dx}{dx}ddddy + D + \left\{\frac{-6dy^2ddydddx + 10dxdyddydddy - 4dy^2ddxdddy + 15dyddxddy^2 - 15dxddy^3}{dy^3}\right\} = 0$ eſt dans le cas que nous avons déterminé.



LE CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE MÉTHODE.

INTRODUCTION.

1748. QUELQU'ÉQUATION différencielle que l'on me propose entre le paramètre p & les variables x, y, son intégrale sera certainement un des termes de cette suite-ci:

$$Ap + Bx + Cy = 0,$$

$$Ap^2 + Bpx + Cpy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0,$$

$$Ap^3 + Bp^2x + Cp^2y + Dpx^2 + Epxy + Fpy^2 + Gx^3 + Hx^2y + Ixy^2 + Ky^3 = 0,$$

$$Ap^4 + Bp^3x + Cp^3y + Dp^2x^2 + Ep^2xy + Fp^2y^2 + Gpx^3 + Hpx^2y + Ipxy^2 + Kpy^3 + Lx^4 + Mx^3y + Nx^2y^2 + Pxy^3 + Qy^4 = 0, \text{ \&c.}$$

Les coëfficiens A, B, C, D, E, F, &c. désignant des fonctions d'un nombre arbitraire n, s'il s'agit d'une équation aux premières différences; de deux nombres arbitraires n, m, s'il s'agit d'une équation aux secondes différences; de trois nombres arbitraires n, m, l, s'il s'agit d'une équation aux troisièmes différences, &c.

Prenez une des formules précédentes, celle du premier degré, ou celle du second, ou celle du troisième, &c. substituez-y, au lieu des coëfficiens indéterminés A, B, C, D, E, F, &c. des fonctions de n à votre choix, vous aurez une équation qui sera l'intégrale d'une équation aux premières différences. Pour avoir cette équation aux premières différences dont vous avez l'intégrale, différenciez cette intégrale, vous aurez deux équations; chassez-en n, & l'équation qui vous restera entre p, x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, sera l'équation aux premières différences dont vous avez l'intégrale.

Je prends, par exemple, la formule $Ap + Bx + Cy = 0$, & je fais $A = 1 - n$, $B = 2$, $C = \frac{2 - 5n}{n}$; j'aurai cette équation-ci $(1 - n)p + 2x + \frac{2 - 5n}{n}y = 0$, ou $n(1 - n)p + 2nx + (2 - 5n)y = 0$, qui sera l'intégrale d'une équation aux premières différences. Pour avoir l'équation aux premières différences dont c'est-là l'intégrale, je différencie cette intégrale; j'aurai $2n\dot{x} + (2 - 5n)\dot{y} = 0$, & en chassant n, j'aurai l'équation aux premières différences $3p\dot{y}^2 + 10x\dot{y}^2 - 10y\dot{x}\dot{y} - 2p\dot{x}\dot{y} - 4x\dot{x}\dot{y} + 4y\dot{x}^2 = 0$, dont l'intégrale est $(1 - n)p + 2x + \frac{2 - 5n}{n}y = 0$.

Prenez une des formules précédentes; mettez dans cette formule pour A, B, C, D, E, F, &c. des fonctions de n & de m, telles que vous voudrez, & vous aurez une équation qui sera l'intégrale d'une équation aux secondes différences. Pour avoir cette équation aux secondes différences dont vous avez l'intégrale, différenciez cette intégrale deux fois, vous aurez trois équations; chassez-en les nombres n & m, & l'équation qui vous restera entre $p, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$ (je suppose que vous avez fait $\dot{x}$ constant) sera l'équation aux secondes différences dont vous avez l'intégrale.

Prenez, par exemple, cette formule-ci $Ap^2 + Bpx + Cpy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0$, & faites $A = 3$, $B = 2n$, $C = n - m$, $D = 0$, $E = 3 - 2m$, $F = -nm$, vous aurez cette équation-ci $3p^2 + 2npx + (n - m)py + (3 - 2m)xy - nmy^2 = 0$, qui sera l'intégrale d'une équation aux secondes différences. Pour avoir cette équation aux secondes différences dont c'est-là l'intégrale, différenciez-la deux fois, vous aurez $2np\dot{x} + (n - m)p\dot{y} + (3 - 2m)x\dot{y} + (3 - 2m)y\dot{x} - 2nmy\dot{y} = 0$, & $(n - m)p\ddot{y} +$

$(3 - 2m)x\ddot{y} + 2(3 - 2m)\dot{x}\dot{y} - 2nmy\dddot{y} - 2nm\dot{y}^2 = 0$; chaſſez les nombres n & m de ces trois équations, & l'équation qui vous reſtera entre $p, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$, ſera celle dont il s'agit.

Prenez encore une des formules précédentes; mettez dans cette formule, au lieu de A, B, C, D, E, F, &c. des fonctions de u, de m & de l, & vous aurez une équation qui ſera l'intégrale d'une équation aux troiſièmes différences. Pour avoir cette équation aux troiſièmes différences dont vous avez l'intégrale, différenciez cette intégrale trois fois, vous aurez quatre équations; chaſſez-en les nombres u, m, l, & l'équation qui vous reſtera entre $p, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, ſera l'équation aux troiſièmes différences dont vous avez l'intégrale.

Pour avoir l'intégrale d'une équation différencielle donnée, il faudra donc que la formule que l'on choiſira, & que les valeurs que l'on donnera aux coëfficiens A, B, C, D, E, F, &c. de cette formule, en n ſi c'eſt une équation aux premières différences qui ſoit donnée, en n & en m ſi c'eſt une équation aux ſecondes différences, en n, en m & en l ſi c'eſt une équation aux troiſièmes différences, &c. ſoient telles que l'on arrive de cette intégrale à l'équation différencielle propoſée. De même que pour chaque intégrale il n'y a qu'une ſeule équation aux premières ou aux ſecondes ou aux troiſièmes différences, &c. dont elle ſoit l'intégrale, pour chaque équation aux premières différences il n'y a qu'une ſeule équation entre p, x, y & n qui en ſoit l'intégrale, pour chaque équation aux ſecondes différences il n'y a qu'une ſeule équation entre p, x, y, n & m qui en ſoit l'intégrale, pour chaque équation aux troiſièmes différences il n'y a qu'une ſeule équation entre p, x, y, n, m & l qui en ſoit l'intégrale, &c. Cette intégrale peut ſe préſenter ſous une infinité de formes différentes, mais ce ſera toûjours eſſentiellement la même équation.

Si vous avez l'intégrale d'une équation aux premières différences, & que vous déterminiez n, c'eſt-à-dire que vous faſſiez, par exemple, $n = 0$, ou $n = -3$, ou $n = 5$, &c. l'équation que vous aurez ne ſera pas l'intégrale de votre équation aux premières différences, mais elle ſera ſeulement un des cas de cette intégrale; & il en eſt de même des intégrales des équations aux ſecondes différences, de celles aux troiſièmes, &c. à chaque fois que l'on détermine un ou deux ou trois, &c. des nombres n, m, l, &c. l'équation que l'on a n'eſt plus qu'un des cas de l'intégrale.

On peut encore obſerver ici que pour chaque équation aux ſecondes différences, il y a deux intégrales aux premières différences; car après avoir différencié une fois ſeulement l'intégrale d'une équation aux ſecondes différences, je pourrai chaſſer le nombre m ou le nombre n, & par conſéquent avoir une équation aux premières différences où il ne reſtera que n, & une autre où il ne reſtera que m, & chacune de ces deux équations ſera également l'intégrale de l'équation aux ſecondes différences, que l'on auroit en différenciant l'intégrale deux fois, & en chaſſant les deux nombres n, m; que par la même raiſon, pour chaque équation aux troiſièmes différences, il y a trois équations aux ſecondes qui en ſont les intégrales, ſavoir, celle où il ne reſte que le nombre l, celle où il ne reſte que le nombre m, & celle enfin où il ne reſte que le nombre n; mais bornons-nous quant à préſent aux équations aux premières différences.

L'intégrale d'une équation aux premières différences étant donnée, au lieu d'en déduire, comme nous venons de le faire, l'équation aux premières différences dont elle eſt l'intégrale, je pouvois ordonner cette intégrale par rapport à n, & avoir en la réſolvant, $n =$ fonction de dimenſion nulle de p, de x & de y, & en différenciant, avoir $\dot{x} + \alpha\dot{y} = 0$.

Réſolvez l'équation que vous avez trouvée par le premier

procédé, de manière qu'à ſa place vous en ayez une autre où $\dot{x}$ & $\dot{y}$ ne ſoient qu'à la première dimenſion, cette équation ſera $\dot{x} + \alpha\dot{y} = 0$, c'eſt-à-dire, préciſément la même que par le ſecond procédé.

Si vous n'aviez pas fait $p = 0$, vous auriez eu $\dot{x} + \alpha\dot{y} + \frac{-x - y\alpha}{p}\dot{p} = 0$ par le premier & par le ſecond procédé.

Soit donc $\dot{x} + \frac{N}{M}\dot{y} = 0$ l'équation que l'on propoſe d'intégrer.

Par N & par M j'entends deux fonctions, de même dimenſion, de p, de x & de y, qui n'ont aucun facteur commun, & dont tous les termes ſont homogènes & compoſés de puiſſances poſitives.

S'il n'entre aucun radical dans les fonctions N, M, c'eſt-à-dire, ſi l'équation différencielle propoſée eſt renfermée dans l'une des formules ſuivantes, $\dot{x} + \frac{b1p + b2x + b3y}{\beta 1p + \beta 2x + \beta 3y}\dot{y} = 0$,

$$\dot{x} + \frac{b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy + b6y^2}{\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3py + \beta 4x^2 + \beta 5xy + \beta 6y^2}\dot{y} = 0,$$

$$\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2 + b10y^3}{\beta 1p^3 + \beta 2p^2x + \beta 3p^2y + \beta 4px^2 + \beta 5pxy + \beta 6py^2 + \beta 7x^3 + \beta 8x^2y + \beta 9xy^2 + \beta 10y^3}\dot{y} = 0,$$

&c. l'intégrale ſera

$$n = \frac{a1p^2 + a2x + a3y}{\alpha 1p^2 + \alpha 2x + \alpha 3y}, \text{ ou } n = \frac{a1p^2 + a2px + a3py + a4x^2 + a5xy + a6y^2}{\alpha 1p^2 + \alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4x^2 + \alpha 5xy + \alpha 6y^2},$$

$$\text{ou } n = \frac{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4px^2 + a5pxy + a6py^2 + a7x^3 + a8x^2y + a9xy^2 + a10y^3}{\alpha 1p^3 + \alpha 2p^2x + \alpha 3p^2y + \alpha 4px^2 + \alpha 5pxy + \alpha 6py^2 + \alpha 7x^3 + \alpha 8x^2y + \alpha 9xy^2 + \alpha 10y^3},$$

ou $n = \frac{a1p4 +}{\alpha 1p4 +}$, ou $n = \frac{a1p5 +}{\alpha 1p5 +}$, &c.

S'il entre des radicaux dans les fonctions N, M, l'on fera entrer ces mêmes radicaux dans le numérateur & dans le

le dénominateur des valeurs ſucceſſives de n, comme autant de lignes, & de la manière la plus générale qu'il ſera poſſible.

Je ſuppoſe, par exemple, qu'il n'y ait qu'un ſeul radical dans l'équation différencielle propoſée, & que ce radical ſoit $\sqrt{(ap^2 + bpx + cpy + \partial x^2 + exy + fy^2)}$; je fais $z = \sqrt{(ap^2 + bpx + cpy + \partial x^2 + exy + fy^2)}$, j'aurai $z^2 = ap^2 + bpx + cpy + \partial x^2 + exy + fy^2$, $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{bp + 2\partial x + ey}{2z}$, $\frac{\dot{z}}{\dot{y}} = \frac{cp + ex + 2fy}{2z}$, la formule de l'équation propoſée ſera $\dot{x} + \frac{b1p + b2x + b3y + b4z}{\beta 1p + \beta 2x + \beta 3y + \beta 4z}\dot{y} = 0$,

ou $\dot{x} + \frac{b1p^2 + b2px + b3py + b4pz + b5x^2 + b6xy + b7xz + b8y^2 + b9yz}{\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3py + \beta 4pz + \beta 5x^2 + \beta 6xy + \beta 7xz + \beta 8y^2 + \beta 9yz}\dot{y} = 0$, &c.

& ſon intégrale ſera $n = \frac{a1p + a2x + a3y + a4z}{\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y + \alpha 4z}$, ou

$$n = \frac{a1p^2 + a2px + a3py + a4pz + a5x^2 + a6xy + a7xz + a8y^2 + a9yz}{\alpha 1p^2 + \alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4pz + \alpha 5x^2 + \alpha 6xy + \alpha 7xz + \alpha 8y^2 + \alpha 9yz},\text{ ou}$$

$$n = \frac{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4p^2z + a5px^2 + a6pxy + a7pxz + a8py^2 + a9pyz + a10x^3 + a11x^2y + a12x^2z + a13xy^2 + a14xyz + a15xy^3 + a16xy^2z}{\alpha 1p^3 + \alpha 2p^2x + \alpha 3p^2y + \alpha 4p^2z + \alpha 5px^2 + \alpha 6pxy + \alpha 7pxz + \alpha 8py^2 + \alpha 9pyz + \alpha 10x^3 + \alpha 11x^2y + \alpha 12x^2z + \alpha 13xy^2 + \alpha 14xyz + \alpha 15y^3 + \alpha 16v^2z}.$$

S'il entre pluſieurs radicaux dans les fonctions N, M, je ferai pour chaque radical ce que je fais pour un ſeul.

Au reſte, lorſque l'on me donnera l'équation $\dot{x} + \frac{N}{M}\dot{y} = 0$, & que je voudrai m'aſſurer que la fraction $\frac{N}{M}$ eſt irréductible (s'il n'entre aucun radical dans N ni dans M, & que N & M ne ſoient fonctions que de trois lignes p, x, y) je ferai 1.° $\frac{N}{M} = \frac{ap + bx + cy}{\alpha p + \beta x + \gamma y}$, 2.° $\frac{N}{M} = \frac{ap^2 + bpx + cpy + \partial x^2 + exy + fy^2}{\alpha p^2 + \beta px + \gamma py + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2}$, 3.° $\frac{N}{M} = \frac{ap^3 +}{\alpha p^3 +}$ 4.° $\frac{N}{M} = \frac{ap^4 +}{\alpha p^4 +}$, &c.

S'il entre des radicaux dans la fraction $\frac{N}{M}$, je déſigne ces

radicaux par des lettres, & je les fais entrer dans le numérateur & dans le dénominateur des valeurs successives que je donne à cette fraction comme autant de lignes, & de la manière la plus générale qu'il est possible ; de cette manière, je réduirai sûrement la fraction $\frac{N}{M}$ ou je démontrerai qu'elle est irréductible.

LEMME.

Soient quatre nombres quelconques $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, & quatre autres nombres aussi quelconques $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\alpha 4$; faites

$\alpha 1\, a2 - a1\, \alpha 2 = a^{1}1$, $\alpha 1\, a3 - a1\, \alpha 3 = a^{2}1$, $\alpha 1\, a4 - a1\, \alpha 4 = a^{3}1$,
$\alpha 2\, a3 - a2\, \alpha 3 = a^{1}2$, $\alpha 2\, a4 - a2\, \alpha 4 = a^{2}2$,
$\alpha 3\, a4 - a3\, \alpha 4 = a^{1}3$,

vous aurez $a^{3}1\, a^{1}2 - a^{2}1\, a^{2}2 + a^{1}1\, a^{1}3 = 0$.

COROLLAIRE.

Soient autant de nombres quelconques que l'on voudra
$a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, $a7$, $a8$, $a9$, $a10$, &c.
& soient autant d'autres nombres aussi quelconques
$\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\alpha 4$, $\alpha 5$, $\alpha 6$, $\alpha 7$, $\alpha 8$, $\alpha 9$, $\alpha 10$, &c.
je fais

$\alpha 1\, a2 - a1\, \alpha 2 = a^{1}1$, $\alpha 1\, a3 - a1\, \alpha 3 = a^{2}1$, $\alpha 1\, a4 - a1\, \alpha 4 = a^{3}1$;
$\alpha 2\, a3 - a2\, \alpha 3 = a^{1}2$, $\alpha 2\, a4 - a2\, \alpha 4 = a^{2}2$, $\alpha 2\, a5 - a2\, \alpha 5 = a^{3}2$,
$\alpha 3\, a4 - a3\, \alpha 4 = a^{1}3$, $\alpha 3\, a5 - a3\, \alpha 5 = a^{2}3$, $\alpha 3\, a6 - a3\, \alpha 6 = a^{3}3$,
$\alpha 4\, a5 - a4\, \alpha 5 = a^{1}4$, $\alpha 4\, a6 - a4\, \alpha 6 = a^{2}4$, $\alpha 4\, a7 - a4\, \alpha 7 = a^{3}4$,
$\alpha 5\, a6 - a5\, \alpha 5 = a^{1}5$, $\alpha 5\, a7 - a5\, \alpha 7 = a^{2}5$, $\alpha 5\, a8 - a5\, \alpha 8 = a^{3}5$,
$\alpha 6\, a7 - a6\, \alpha 7 = a^{1}6$, $\alpha 6\, a8 - a6\, \alpha 8 = a^{2}6$, $\alpha 6\, a9 - a6\, \alpha 9 = a^{3}6$,
$\alpha 7\, a8 - a7\, \alpha 8 = a^{1}7$, $\alpha 7\, a9 - a7\, \alpha 9 = a^{2}7$, $\alpha 7\, a10 - a7\, \alpha 10 = a^{3}7$,
$\alpha 8\, a9 - a8\, \alpha 9 = a^{1}8$, $\alpha 8\, a10 - a8\, \alpha 10 = a^{2}8$, &c.
$\alpha 9\, a10 - a9\, \alpha 10 = a^{1}9$, &c.
&c.

$a1\,a5 - a1\,a5 = a^{4}1$, $a1\,a6 - a1\,a6 = a^{5}1$, $a1\,a7 - a1\,a7 = a^{6}1$,
$a2\,a6 - a2\,a6 = a^{4}2$, $a2\,a7 - a2\,a7 = a^{5}2$, $a2\,a8 - a2\,a8 = a^{6}2$,
$a3\,a7 - a3\,a7 = a^{4}3$, $a3\,a8 - a3\,a8 = a^{5}3$, $a3\,a9 - a3\,a9 = a^{6}3$,
$a4\,a8 - a4\,a8 = a^{4}4$, $a4\,a9 - a4\,a9 = a^{5}4$, $a4\,a10 - a4\,a10 = a^{6}4$,
$a5\,a9 - a5\,a9 = a^{4}5$, $a5\,a10 - a5\,a10 = a^{5}5$, &c.
$a6\,a10 - a6\,a10 = a^{4}6$, &c.
&c.

$a1\,a8 - a1\,a8 = a^{7}1$, $a1\,a9 - a1\,a9 = a^{8}1$, $a1\,a10 - a1\,a10 = a^{9}1$, &c.
$a2\,a9 - a2\,a9 = a^{7}2$, $a2\,a10 - a2\,a10 = a^{8}2$, &c.
$a3\,a10 - a3\,a10 = a^{7}3$, &c.
&c.

j'aurai entre les nombres

$a^{1}1$ $a^{2}1$ $a^{3}1$ $a^{4}1$ $a^{5}1$ $a^{6}1$ $a^{7}1$ $a^{8}1$ $a^{9}1$, &c.
$a^{1}2$ $a^{2}2$ $a^{3}2$ $a^{4}2$ $a^{5}2$ $a^{6}2$ $a^{7}2$ $a^{8}2$, &c.
$a^{1}3$ $a^{2}3$ $a^{3}3$ $a^{4}3$ $a^{5}3$ $a^{6}3$ $a^{7}3$, &c.
$a^{1}4$ $a^{2}4$ $a^{3}4$ $a^{4}4$ $a^{5}4$ $a^{6}4$, &c.
$a^{1}5$ $a^{2}5$ $a^{3}5$ $a^{4}5$ $a^{5}5$, &c.
$a^{1}6$ $a^{2}6$ $a^{3}6$ $a^{4}6$, &c.
$a^{1}7$ $a^{2}7$ $a^{3}7$, &c.
$a^{1}8$ $a^{2}8$, &c.
$a^{1}9$, &c.
&c.

autant d'équations que l'on pourra prendre de fois les nombres $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, $a7$, $a8$, $a9$, $a10$, &c. quatre à quatre différemment. Je mets ici une Table où l'on trouvera par ordre toutes les combinaisons des nombres $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, $a7$, $a8$, $a9$, $a10$, &c. pris quatre à quatre, & à côté de chaque combinaison l'équation qui lui appartient.

COMBINAISONS par ordre des nombres a1, a2, a3, *&c. pris quatre à quatre, & à côté de chaque combinaison l'équation qui lui appartient.*

1. $a1\ a2\ a3\ a4,\ a^{3}1\ a^{1}2 - a^{2}1\ a^{2}2 + a^{1}1\ a^{1}3 = 0.$
2. $a1\ a2\ a3\ a5,\ a^{4}1\ a^{1}2 - a^{1}2\ a^{3}2 + a^{1}1\ a^{2}3 = 0.$
3. $a1\ a2\ a4\ a5,\ a^{4}1\ a^{2}2 - a^{3}1\ a^{3}2 + a^{1}1\ a^{1}4 = 0.$
4. $a1\ a3\ a4\ a5,\ a^{4}1\ a^{1}3 - a^{3}1\ a^{2}3 + a^{2}1\ a^{1}4 = 0.$
5. $a2\ a3\ a4\ a5,\ a^{3}2\ a^{1}3 - a^{2}2\ a^{2}3 + a^{1}2\ a^{1}4 = 0.$
6. $a1\ a2\ a3\ a6,\ a^{5}1\ a^{1}2 - a^{2}1\ a^{4}2 + a^{1}1\ a^{3}3 = 0.$
7. $a1\ a2\ a4\ a6,\ a^{5}1\ a^{2}2 - a^{3}1\ a^{4}2 + a^{1}1\ a^{2}4 = 0.$
8. $a1\ a3\ a4\ a6,\ a^{5}1\ a^{1}3 - a^{3}1\ a^{3}3 + a^{2}1\ a^{2}4 = 0.$
9. $a2\ a3\ a4\ a6,\ a^{4}2\ a^{1}3 - a^{2}1\ a^{3}3 + a^{1}2\ a^{2}4 = 0.$
10. $a1\ a2\ a5\ a6,\ a^{5}1\ a^{3}2 - a^{4}1\ a^{4}2 + a^{1}1\ a^{1}5 = 0.$
11. $a1\ a3\ a5\ a6,\ a^{5}1\ a^{2}3 - a^{4}1\ a^{3}3 + a^{2}1\ a^{1}5 = 0.$
12. $a2\ a3\ a5\ a6,\ a^{4}2\ a^{2}3 - a^{3}2\ a^{3}3 + a^{1}2\ a^{1}5 = 0.$
13. $a1\ a4\ a5\ a6,\ a^{5}1\ a^{1}4 - a^{4}1\ a^{2}4 + a^{3}1\ a^{1}5 = 0.$
14. $a2\ a4\ a5\ a6,\ a^{4}2\ a^{1}4 - a^{3}2\ a^{2}4 + a^{2}2\ a^{1}5 = 0.$
15. $a3\ a4\ a5\ a6,\ a^{3}3\ a^{1}4 - a^{2}3\ a^{2}4 + a^{1}3\ a^{1}5 = 0.$
16. $a1\ a2\ a3\ a7,\ a^{6}1\ a^{1}2 - a^{2}1\ a^{5}2 + a^{1}1\ a^{4}3 = 0.$
17. $a1\ a2\ a4\ a7,\ a^{6}1\ a^{2}2 - a^{3}1\ a^{5}2 + a^{1}1\ a^{3}4 = 0.$
18. $a1\ a3\ a4\ a7,\ a^{6}1\ a^{1}3 - a^{3}1\ a^{4}3 + a^{2}1\ a^{3}4 = 0.$
19. $a2\ a3\ a4\ a7,\ a^{5}2\ a^{1}3 - a^{2}2\ a^{4}3 + a^{1}2\ a^{3}4 = 0.$
20. $a1\ a2\ a5\ a7,\ a^{6}1\ a^{3}2 - a^{4}1\ a^{5}2 + a^{1}1\ a^{2}5 = 0.$
21. $a1\ a3\ a5\ a7,\ a^{6}1\ a^{2}3 - a^{4}1\ a^{4}3 + a^{2}1\ a^{2}5 = 0.$
22. $a2\ a3\ a5\ a7,\ a^{5}2\ a^{2}3 - a^{3}2\ a^{4}3 + a^{1}2\ a^{2}5 = 0.$
23. $a1\ a4\ a5\ a7,\ a^{6}1\ a^{1}4 - a^{4}1\ a^{3}4 + a^{3}1\ a^{2}5 = 0.$
24. $a2\ a4\ a5\ a7,\ a^{5}2\ a^{1}4 - a^{3}2\ a^{3}4 + a^{2}2\ a^{2}5 = 0.$
25. $a3\ a4\ a5\ a7,\ a^{4}3\ a^{1}4 - a^{2}3\ a^{3}4 + a^{1}3\ a^{2}5 = 0.$
26. $a1\ a2\ a6\ a7,\ a^{6}1\ a^{4}2 - a^{5}1\ a^{5}2 + a^{1}1\ a^{1}6 = 0.$

27. $a1\ a3\ a6\ a7,\ a^{6}1\ a^{3}3 - a^{5}1\ a^{4}3 + a^{2}1\ a'6 = 0.$
28. $a2\ a3\ a6\ a7,\ a^{5}2\ a^{3}3 - a^{4}2\ a^{4}3 + a'2\ a'6 = 0.$
29. $a1\ a4\ a6\ a7,\ a^{6}1\ a^{2}4 - a^{5}1\ a^{3}4 + a^{3}1\ a'6 = 0.$
30. $a2\ a4\ a6\ a7,\ a^{5}2\ a^{2}4 - a^{4}2\ a^{3}4 + a^{2}2\ a'6 = 0.$
31. $a3\ a4\ a6\ a7,\ a^{4}3\ a^{2}4 - a^{3}3\ a^{3}4 + a'3\ a'6 = 0.$
32. $a1\ a5\ a6\ a7,\ a^{6}1\ a'5 - a^{5}1\ a^{2}5 + a^{4}1\ a'6 = 0.$
33. $a2\ a5\ a6\ a7,\ a^{5}2\ a'5 - a^{4}2\ a^{2}5 + a^{3}2\ a'6 = 0.$
34. $a3\ a5\ a6\ a7,\ a^{4}3\ a'5 - a^{3}3\ a^{2}5 + a^{2}3\ a'6 = 0.$
35. $a4\ a5\ a6\ a7,\ a^{3}4\ a'5 - a^{2}4\ a^{2}5 + a'4\ a'6 = 0.$
36. $a1\ a2\ a3\ a8,\ a^{7}1\ a'2 - a^{2}1\ a^{6}2 + a'1\ a^{5}3 = 0.$
37. $a1\ a2\ a4\ a8,\ a^{7}1\ a^{2}2 - a^{3}1\ a^{6}2 + a'1\ a^{5}4 = 0.$
38. $a1\ a3\ a4\ a8,\ a^{7}1\ a'3 - a^{3}1\ a^{5}3 + a^{2}1\ a^{4}4 = 0.$
39. $a2\ a3\ a4\ a8,\ a^{6}2\ a'3 - a^{2}2\ a^{5}3 + a'1\ a^{4}4 = 0.$
40. $a1\ a2\ a5\ a8,\ a^{7}1\ a^{3}2 - a^{4}1\ a^{6}2 + a'1\ a^{3}5 = 0.$
41. $a1\ a3\ a5\ a8,\ a^{7}1\ a^{2}3 - a^{4}1\ a^{5}3 + a^{2}1\ a^{3}5 = 0.$
42. $a2\ a3\ a5\ a8,\ a^{6}2\ a^{2}3 - a^{3}2\ a^{5}3 + a'2\ a^{3}5 = 0.$
43. $a1\ a4\ a5\ a8,\ a^{7}1\ a'4 - a^{4}1\ a^{4}4 + a^{3}1\ a^{3}5 = 0.$
44. $a2\ a4\ a5\ a8,\ a^{6}2\ a'4 - a^{3}2\ a^{4}4 + a^{2}2\ a^{3}5 = 0.$
45. $a3\ a4\ a5\ a8,\ a^{5}3\ a'4 - a^{2}3\ a^{4}4 + a'3\ a^{3}5 = 0.$
46. $a1\ a2\ a6\ a8,\ a^{7}1\ a^{4}2 - a^{5}1\ a^{6}2 + a'1\ a^{2}6 = 0.$
47. $a1\ a3\ a6\ a8,\ a^{7}1\ a^{3}3 - a^{5}1\ a^{5}3 + a^{2}1\ a^{2}6 = 0.$
48. $a2\ a3\ a6\ a8,\ a^{6}2\ a^{3}3 - a^{4}2\ a^{5}3 + a'2\ a^{2}6 = 0.$
49. $a1\ a4\ a6\ a8,\ a^{7}1\ a^{2}4 - a^{5}1\ a^{4}4 + a^{3}1\ a^{2}6 = 0.$
50. $a2\ a4\ a6\ a8,\ a^{6}2\ a^{2}4 - a^{4}2\ a^{4}4 + a^{2}2\ a^{2}6 = 0.$
51. $a3\ a4\ a6\ a8,\ a^{5}3\ a^{2}4 - a^{3}3\ a^{4}4 + a'3\ a^{2}6 = 0.$
52. $a1\ a5\ a6\ a8,\ a^{7}1\ a'5 - a^{5}1\ a^{3}5 + a^{4}1\ a^{2}6 = 0.$
53. $a2\ a5\ a6\ a8,\ a^{6}2\ a'5 - a^{4}2\ a^{3}5 + a^{3}2\ a^{2}6 = 0.$
54. $a3\ a5\ a6\ a8,\ a^{5}3\ a'5 - a^{3}3\ a^{3}5 + a^{2}3\ a^{2}6 = 0.$
55. $a4\ a5\ a6\ a8,\ a^{4}4\ a'5 - a^{2}4\ a^{3}5 + a'4\ a^{2}6 = 0.$
56. $a1\ a2\ a7\ a8,\ a^{7}1\ a^{5}2 - a^{6}1\ a^{6}2 + a'1\ a'7 = 0.$

57. $a1\ a3\ a7\ a8,\ a^{7}1\ a^{4}3 - a^{6}1\ a^{5}3 + a^{2}1\ a^{1}7 = 0.$

58. $a2\ a3\ a7\ a8,\ a^{6}2\ a^{4}3 - a^{5}2\ a^{5}3 + a^{1}2\ a^{1}7 = 0.$

59. $a1\ a4\ a7\ a8,\ a^{7}1\ a^{3}4 - a^{6}1\ a^{4}4 + a^{3}1\ a^{1}7 = 0.$

60. $a2\ a4\ a7\ a8,\ a^{6}2\ a^{3}4 - a^{5}2\ a^{4}4 + a^{2}2\ a^{1}7 = 0.$

61. $a3\ a4\ a7\ a8,\ a^{5}3\ a^{3}4 - a^{4}3\ a^{4}4 + a^{1}3\ a^{1}7 = 0.$

62. $a1\ a5\ a7\ a8,\ a^{7}1\ a^{2}5 - a^{6}1\ a^{3}5 + a^{4}1\ a^{1}7 = 0.$

63. $a2\ a5\ a7\ a8,\ a^{6}2\ a^{2}5 - a^{5}2\ a^{3}5 + a^{3}2\ a^{1}7 = 0.$

64. $a3\ a5\ a7\ a8,\ a^{5}3\ a^{2}5 - a^{4}3\ a^{3}5 + a^{2}3\ a7 = 0.$

65. $a4\ a5\ a7\ a8,\ a^{4}4\ a^{2}5 - a^{3}4\ a^{3}5 + a^{1}4\ a7 = 0.$

66. $a1\ a6\ a7\ a8,\ a^{7}1\ a^{1}6 - a^{6}1\ a^{2}6 + a^{5}1\ a^{1}7 = 0.$

67. $a2\ a6\ a7\ a8,\ a^{6}2\ a^{1}6 - a^{5}2\ a^{2}6 + a^{4}2\ a^{1}7 = 0.$

68. $a3\ a6\ a7\ a8,\ a^{5}3\ a^{1}6 - a^{4}3\ a^{2}6 + a^{3}3\ a^{1}7 = 0.$

69. $a4\ a6\ a7\ a8,\ a^{4}4\ a^{1}6 - a^{3}4\ a^{2}6 + a^{2}4\ a^{1}7 = 0.$

70. $a5\ a6\ a7\ a8,\ a^{3}5\ a^{1}6 - a^{2}5\ a^{2}6 + a^{1}5\ a^{1}7 = 0.$

71. $a1\ a2\ a3\ a9,\ a^{8}1\ a^{1}2 - a^{2}1\ a^{7}2 + a^{2}1\ a^{6}3 = 0.$

72. $a1\ a2\ a4\ a9,\ a^{8}1\ a^{2}2 - a^{3}1\ a^{7}2 + a^{1}1\ a^{5}4 = 0.$

73. $a1\ a3\ a4\ a9,\ a^{8}1\ a^{1}3 - a^{3}1\ a^{6}3 + a^{2}1\ a^{5}4 = 0.$

74. $a2\ a3\ a4\ a9,\ a^{7}2\ a^{1}3 - a^{2}2\ a^{6}3 + a^{1}2\ a^{5}4 = 0.$

75. $a1\ a2\ a5\ a9,\ a^{8}1\ a^{3}2 - a^{4}1\ a^{7}2 + a^{1}1\ a^{4}5 = 0.$

76. $a1\ a3\ a5\ a9,\ a^{8}1\ a^{2}3 - a^{4}1\ a^{6}3 + a^{2}1\ a^{4}5 = 0.$

77. $a2\ a3\ a5\ a9,\ a^{7}2\ a^{2}3 - a^{3}2\ a^{6}3 + a^{1}2\ a^{4}5 = 0.$

78. $a1\ a4\ a5\ a9,\ a^{8}1\ a^{1}4 - a^{4}1\ a^{5}4 + a^{3}1\ a^{4}5 = 0.$

79. $a2\ a4\ a5\ a9,\ a^{7}2\ a^{1}4 - a^{3}2\ a^{5}4 + a^{2}2\ a^{4}5 = 0.$

80. $a3\ a4\ a5\ a9,\ a^{6}3\ a^{1}4 - a^{2}3\ a^{5}4 + a^{1}3\ a^{4}5 = 0.$

81. $a1\ a2\ a6\ a9,\ a^{8}1\ a^{4}2 - a^{5}1\ a^{7}2 + a^{1}1\ a^{3}6 = 0.$

82. $a1\ a3\ a6\ a9,\ a^{8}1\ a^{3}3 - a^{5}1\ a^{6}3 + a^{2}1\ a^{3}6 = 0.$

83. $a2\ a3\ a6\ a9,\ a^{7}2\ a^{3}3 - a^{4}2\ a^{6}3 + a^{1}2\ a^{3}6 = 0.$

84. $a1\ a4\ a6\ a9,\ a^{8}1\ a^{2}4 - a^{5}1\ a^{5}4 + a^{3}1\ a^{3}6 = 0.$

85. $a2\ a4\ a6\ a9,\ a^{7}2\ a^{2}4 - a^{4}2\ a^{5}4 + a^{2}2\ a^{3}6 = 0.$

86. $a3\ a4\ a6\ a9,\ a^{6}3\ a^{2}4 - a^{3}3\ a^{5}4 + a^{1}3\ a^{3}6 = 0.$

87. $a1\ a5\ a6\ a9,\ a^{8}1\ a^{1}5 - a^{5}1\ a^{4}5 + a^{4}1\ a^{3}6 = 0.$

88. $a2\ a5\ a6\ a9,\ a^{7}2\ a^{1}5 - a^{4}2\ a^{4}5 + a^{3}2\ a^{3}6 = 0.$

89. $a3\ a5\ a6\ a9,\ a^{6}3\ a^{1}5 - a^{3}3\ a^{4}5 + a^{2}3\ a^{3}6 = 0.$

90. $a4\ a5\ a6\ a9,\ a^{5}4\ a^{1}5 - a^{2}4\ a^{4}5 + a^{1}4\ a^{3}6 = 0.$

91. $a1\ a2\ a7\ a9,\ a^{8}1\ a^{5}2 - a^{6}1\ a^{7}2 + a^{1}1\ a^{2}7 = 0.$

92. $a1\ a3\ a7\ a9,\ a^{8}1\ a^{4}3 - a^{6}1\ a^{6}3 + a^{2}1\ a^{2}7 = 0.$

93. $a2\ a3\ a7\ a9,\ a^{7}2\ a^{4}3 - a^{5}2\ a^{6}3 + a^{1}2\ a^{2}7 = 0.$

94. $a1\ a4\ a7\ a9,\ a^{8}1\ a^{3}4 - a^{6}1\ a^{5}4 + a^{3}1\ a^{2}7 = 0.$

95. $a2\ a4\ a7\ a9,\ a^{7}2\ a^{3}4 - a^{5}2\ a^{5}4 + a^{2}2\ a^{2}7 = 0.$

96. $a3\ a4\ a7\ a9,\ a^{6}3\ a^{3}4 - a^{4}3\ a^{5}4 + a^{1}3\ a^{2}7 = 0.$

97. $a1\ a5\ a7\ a9,\ a^{8}1\ a^{2}5 - a^{6}1\ a^{4}5 + a^{4}1\ a^{2}7 = 0.$

98. $a2\ a5\ a7\ a9,\ a^{7}2\ a^{2}5 - a^{5}2\ a^{4}5 + a^{3}2\ a^{2}7 = 0.$

99. $a3\ a5\ a7\ a9,\ a^{6}3\ a^{2}5 - a^{4}3\ a^{4}5 + a^{2}3\ a^{2}7 = 0.$

100. $a4\ a5\ a7\ a9,\ a^{5}4\ a^{2}5 - a^{3}4\ a^{4}5 + a^{1}4\ a^{2}7 = 0.$

101. $a1\ a6\ a7\ a9,\ a^{8}1\ a^{1}6 - a^{6}1\ a^{3}6 + a^{5}1\ a^{2}7 = 0.$

102. $a2\ a6\ a7\ a9,\ a^{7}2\ a^{1}6 - a^{5}2\ a^{3}6 + a^{4}2\ a^{2}7 = 0.$

103. $a3\ a6\ a7\ a9,\ a^{5}3\ a^{1}6 - a^{4}3\ a^{3}6 + a^{3}3\ a^{2}7 = 0.$

104. $a4\ a6\ a7\ a9,\ a^{5}4\ a^{1}6 - a^{3}4\ a^{3}6 + a^{2}4\ a^{2}7 = 0.$

105. $a5\ a6\ a7\ a9,\ a^{4}5\ a^{1}6 - a^{2}5\ a^{3}6 + a^{1}5\ a^{2}7 = 0.$

106. $a1\ a2\ a8\ a9,\ a^{8}1\ a^{6}2 - a^{6}1\ a^{7}2 + a^{1}8\ a^{1}1 - 0.$

107. $a1\ a3\ a8\ a9,\ a^{8}1\ a^{5}3 - a^{7}1\ a^{6}3 + a^{2}1\ a^{1}8 = 0.$

108. $a2\ a3\ a8\ a9,\ a^{7}2\ a^{5}3 - a^{6}2\ a^{6}3 + a^{1}2\ a^{1}8 = 0.$

109. $a1\ a4\ a8\ a9,\ a^{8}1\ a^{4}4 - a^{7}1\ a^{5}4 + a^{3}1\ a^{1}8 = 0.$

110. $a2\ a4\ a8\ a9,\ a^{7}2\ a^{4}4 - a^{6}2\ a^{5}4 + a^{2}2\ a^{1}8 = 0.$

111. $a3\ a4\ a8\ a9,\ a^{6}3\ a^{4}4 - a^{5}3\ a^{5}4 + a^{1}3\ a^{1}8 = 0.$

112. $a1\ a5\ a8\ a9,\ a^{8}1\ a^{3}5 - a^{7}1\ a^{4}5 + a^{4}1\ a^{1}8 = 0.$

113. $a2\ a5\ a8\ a9,\ a^{7}2\ a^{3}5 - a^{6}2\ a^{4}5 + a^{3}2\ a^{1}8 = 0.$

114. $a3\ a5\ a8\ a9,\ a^{6}3\ a^{3}5 - a^{5}3\ a^{4}5 + a^{2}3\ a^{1}8 = 0.$

115. $a4\ a5\ a8\ a9,\ a^{5}4\ a^{3}5 - a^{4}4\ a^{4}5 + a^{1}4\ a^{1}8 = 0.$

116. $a1\ a6\ a8\ a9,\ a^{8}1\ a^{2}6 - a^{7}1\ a^{3}6 + a^{5}1\ a^{1}8 = 0.$

117. $a2\ a6\ a8\ a9,\ a^7 2\ a^2 6 - a^6 2\ a^3 6 + a^4 2\ a^1 8 = 0.$
118. $a3\ a7\ a8\ a9,\ a^6 3\ a^1 7 - a^5 3\ a^2 7 + a^4 3\ a^1 8 = 0.$
119. $a4\ a6\ a8\ a9,\ a^5 4\ a^2 6 - a^4 4\ a^3 6 + a^2 4\ a^1 8 = 0.$
120. $a5\ a6\ a8\ a9,\ a^4 5\ a^2 6 - a^3 5\ a^3 6 + a^1 5\ a^1 8 = 0.$
121. $a1\ a7\ a8\ a9,\ a^8 1\ a^1 7 - a^7 1\ a^2 7 + a^6 1\ a^1 8 = 0.$
122. $a2\ a7\ a8\ a9,\ a^7 2\ a^1 7 - a^6 2\ a^2 7 + a^5 2\ a^1 8 = 0.$
123. $a3\ a7\ a8\ a9,\ a^6 3\ a^1 7 - a^5 3\ a^2 7 + a^4 3\ a^1 8 = 0.$
124. $a4\ a7\ a8\ a9,\ a^5 4\ a^1 7 - a^4 4\ a^2 7 + a^3 4\ a^1 8 = 0.$
125. $a5\ a7\ a8\ a9,\ a^4 5\ a^1 7 - a^3 5\ a^2 7 + a^2 5\ a^1 8 = 0.$
126. $a6\ a7\ a8\ a9,\ a^3 6\ a^1 7 - a^2 6\ a^2 7 + a^1 6\ a^1 8 = 0.$
&c. &c. &c.

EXPOSITION.

PREMIÉRE PARTIE.

I. SOIT $n = \frac{a1p + a2x + a3y}{\alpha1p + \alpha2x + \alpha3y}$, en différenciant on aura $\dot{x} + \frac{(\alpha1p + \alpha2x + \alpha3y)a3 - (a1p + a2x + a3y)\alpha3}{(\alpha1p + \alpha2x + \alpha3y)a2 - (a1p + a2x + a3y)\alpha2}\dot{y} = 0$, ou $\dot{x} + \frac{a^2 1p + a^1 2x + 0y}{a^1 1p + 0x + a^1 2y}\dot{y} = 0$; par conséquent l'équation $\dot{x} + \frac{a^2 1p + a^1 2x}{a^1 1p - a^1 2y}\dot{y} = 0$, sera la formule de toutes les équations, dont l'intégrale est $n = \frac{a1p + a2x + a3y}{\alpha1p + \alpha2x + \alpha3y}$.

II. Soit $n = \frac{a1p^2 + a2px + a3py + a4x^2 + a5xy + a6y^2}{\alpha1p^2 + \alpha2px + \alpha3py + \alpha4x^2 + \alpha5xy + \alpha6y^2}$, en différenciant on aura

$$\dot{x} + \frac{(\alpha1p^2 + \alpha2px + \alpha3py + \alpha4x^2 + \alpha5xy + \alpha6y^2)(a3p + a5x + 2a6y) - (a1p^2 + a2px + a3py + a4x^2 + a5xy + a6y^2)(\alpha3p + \alpha5x + 2\alpha6y)}{(\alpha1p^2 + \alpha2px + \alpha3py + \alpha4x^2 + \alpha5xy + \alpha6y^2)(a2p + 2a4x + a5y) - (a1p^2 + a2px + a3py + a4x^2 + a5xy + a6y^2)(\alpha2p + 2\alpha4x + \alpha5y)}\dot{y} = 0,$$

ou

$$\text{ou } \dot{x} + \frac{a^{2}1p^{3} + \begin{array}{l}a^{1}2\\+a^{4}1\end{array}p^{2}x + \begin{array}{l}o\\+2a^{5}1\end{array}p^{2}y - \begin{array}{l}a^{1}3\\+a^{3}2\end{array}px^{2} - \begin{array}{l}a^{2}3\\+a^{2}3\\+2a^{4}2\end{array}pxy - \begin{array}{l}a^{3}3\\+2a^{3}3\end{array}py^{2} +}{a^{1}1p^{3} + \begin{array}{l}o\\+2a^{3}1\end{array}p^{2}x - \begin{array}{l}a^{1}2\\+a^{4}1\end{array}p^{2}y - \begin{array}{l}a^{2}2\\+2a^{2}2\end{array}px^{2} - \begin{array}{l}a^{3}2\\+2a^{1}3\\+a^{3}2\end{array}pxy - \begin{array}{l}a^{4}2\\+a^{2}3\end{array}py^{2} +}$$

$$\frac{a^{2}4x^{3} + \begin{array}{l}o\\+2a^{2}4\end{array}x^{2}y - \begin{array}{l}a^{1}5\\+2a^{1}5\end{array}xy^{2} + oy^{3}}{ox^{3} - \begin{array}{l}2a^{1}4\\+a^{1}4\end{array}x^{2}y - \begin{array}{l}2a^{2}4\\+o\end{array}xy^{2} - a^{1}5y^{3}}\dot{y} = o\text{; par conſéquent}$$

l'équation

$$\dot{x} + \frac{a^{2}1p^{3} + \begin{array}{l}a^{1}2\\+a^{4}1\end{array}p^{2}x + 2a^{5}1p^{2}y - \begin{array}{l}a^{1}3\\+a^{3}2\end{array}px^{2} + 2a^{4}2pxy +}{a^{1}1p^{3} + 2a^{3}1p^{2}x - \begin{array}{l}a^{1}2\\+a^{4}1\end{array}p^{2}y + a^{2}2px^{2} + 2a^{1}3pxy \begin{array}{l}-\\+\end{array}}$$

$$\frac{a^{3}3py^{2} + a^{1}4x^{3} + 2a^{2}4x^{2}y + a^{1}5xy^{2}}{\begin{array}{l}a^{4}2\\a^{2}3\end{array}py^{2} - a^{1}4x^{2}y - 2a^{2}4xy^{2} - a^{1}5y^{3}}\dot{y} = o,$$

en ſuppoſant les quinze premières conditions du lemme, ſera la formule de toutes les équations dont l'intégrale eſt $n = \frac{a1p^{2} +}{\alpha1p^{2} +}$.

III. Soit

$$n = \frac{a1p^{3} + a2p^{2}x + a3p^{2}y + a4px^{2} + a5pxy + a6py^{2} + a7x^{3} + a8x^{2}y + a9xy^{2} + a10y^{3}}{\alpha1p^{3} + \alpha2p^{2}x + \alpha3p^{2}y + \alpha4px^{2} + \alpha5pxy + \alpha6py^{2} + \alpha7x^{3} + \alpha8x^{2}y + \alpha9xy^{2} + \alpha10y^{3}};$$

en différenciant, on aura l'équation

$$\dot{x} + \frac{a^{2}1p^{5} + \begin{array}{l}a^{1}2\\+a^{4}1\end{array}p^{4}x + 2a^{5}1p^{4}y - \begin{array}{l}a^{1}3\\+a^{3}2\\+a^{7}1\end{array}p^{3}x^{2} \begin{array}{l}+\\+\end{array}}{a^{1}1p^{5} + 2a^{3}1p^{4}x - \begin{array}{l}a^{1}2\\+a^{4}1\end{array}p^{4}y + \begin{array}{l}a^{2}2\\+3a^{6}1\end{array}p^{3}x^{2} \begin{array}{l}+\\+\end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{l}2a^{4}2\\2a^{8}1\end{array}p^{3}xy + \begin{array}{l}a^{3}3\\+3a^{9}1\end{array}p^{3}y^{2} - \begin{array}{l}a^{4}3\\+a^{1}4\\+a^{6}2\end{array}p^{2}x^{3} + \begin{array}{l}2a^{2}4\\+2a^{7}2\end{array}p^{2}x^{2}y + \begin{array}{l}a^{6}3\\+a^{1}5\\+3a^{8}2\end{array}p^{2}xy^{2} +}{\begin{array}{l}2a^{1}3\\2a^{7}1\end{array}p^{3}xy - \begin{array}{l}a^{4}2\\+a^{2}3\\+a^{8}1\end{array}p^{3}y^{2} + 2a^{5}2p^{2}x^{3} + \begin{array}{l}a^{6}2\\-a^{1}4\\+3a^{4}3\end{array}p^{2}x^{2}y - \begin{array}{l}2a^{2}4\\+2a^{5}3\end{array}p^{2}xy^{2} \begin{array}{l}-\\-\\+\end{array}}$$

$$\frac{2a^{7}3p^{2}y^{3} - \begin{array}{l}a^{2}5\\+a^{4}4\end{array}px^{4} - \begin{array}{l}2a^{1}6\\+2a^{5}4\end{array}px^{3}y + \begin{array}{l}a^{4}5\\-a^{2}6\\+3a^{6}4\end{array}px^{2}y^{2} + 2a^{5}5pxy^{3} + a^{4}6py^{4} +}{\begin{array}{l}a^{8}2\\a^{2}5\\a^{6}3\end{array}p^{2}y^{3} + a^{3}4px^{4} + 2a^{2}5px^{3}y - \begin{array}{l}a^{5}4\\+a^{3}5\\+3a^{1}6\end{array}px^{2}y^{2} - \begin{array}{l}2a^{6}4\\+2a^{2}6\end{array}pxy^{3} - \begin{array}{l}a^{5}5\\+a^{3}6\end{array}py^{4} -}$$

$$\frac{a^{2}7x^{5} + 2a^{2}7x^{4}y + \begin{array}{l}a^{1}8\\+3a^{3}7\end{array}x^{3}y^{2} + 2a^{2}8x^{2}y^{3} + a^{1}9xy^{4}}{a^{1}7x^{4}y - 2a^{2}7x^{3}y^{2} - \begin{array}{l}3a^{3}7\\-a^{1}8\end{array}x^{2}y^{3} - 2a^{2}8xy^{4} - a^{1}9y^{5}}\dot{y} = o,$$

qui

en ſuppoſant les deux cens dix premières conditions du lemme, ſera la formule de toutes les équations dont l'intégrale eſt $n = \frac{a1\ p^3 +}{\alpha1\ p^3 +}$.

SECONDE PARTIE.

I. Il n'y a que la première équation différencielle $\dot{x} + \frac{b1p + b2x + b3y}{\beta1p + \beta2x + \beta3y}\dot{y} = 0$, qui puiſſe appartenir à la première formule $\dot{x} + \frac{a^21p + a'2x}{a'1p - a'2y}\dot{y} = 0$, & dont par conſéquent l'intégrale puiſſe être $n = \frac{a1p + a2x + a3y}{\alpha1p + \alpha2x + \alpha3y}$. Pour cela il faut que $b3 = 0$, $\beta2 = 0$, & que $b2 + \beta3 = 0$, c'eſt-à-dire, qu'elle ſoit $\dot{x} + \frac{b1p + b2x}{\beta1p - b2y}\dot{y} = 0$; on aura

$a'1 = \beta1$, $a'2 = b2$ $a^21 = b1$, ou $\alpha1a2 - a1\alpha2 = \beta1$, $\alpha1a3 - a1\alpha3 = b1$.
$\alpha2a3 - a2\alpha3 = b2$

Soit, par exemple, $\beta1 = 1$, $b1 = 3$, $b2 = -5$, l'équation propoſée ſera $\dot{x} + \frac{3p - 5x}{p + 5y}\dot{y} = 0$, & on aura

$\alpha1\,a2 - a1\,\alpha2 = 1$, $\alpha1\,a3 - a1\,\alpha3 = 3$;
$\alpha2\,a3 - a2\,\alpha3 = -5$

donc $\alpha1 = \frac{1 + a1\alpha2}{a2}$. En ſubſtituant cette valeur de $\alpha1$ dans l'équation $\alpha1a3 - a1\alpha3 = 3$, on aura $\alpha2a3 - a2\alpha3 = \frac{3a2 - a3}{a1}$; mais on a $\alpha2a3 - a2\alpha3 = -5$, donc $3a2 - a3 + 5a1 = 0$. Il y a une infinité de manières de ſatisfaire à cette équation, parmi leſquelles on eſt maître de choiſir. Soit $a1 = 0$, $a3 = 3$, on aura $a2 = 1$, & en ſubſtituant ces valeurs, on aura $\alpha1 = 1$, $3\alpha2 - \alpha3 = -5$. Soit $\alpha2 = 0$, on aura $\alpha3 = 5$; l'intégrale ſera donc $n = \frac{x + 3y}{p + 5y}$.

II. Il n'y a que la première équation différencielle $\dot{x} + \frac{b1p + b2x + b3y}{\beta 1p + \beta 2x + \beta 3y}\dot{y} = 0$, la seconde $\dot{x} + \frac{b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy + b6y^2}{\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3py + \beta 4x^2 + \beta 5xy + \beta 6y^2}\dot{y} = 0$, & la troisième

$$\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2 + b10y^3}{\beta 1p^3 + \beta 2p^2x + \beta 3p^2y + \beta 4px^2 + \beta 5pxy + \beta 6py^2 + \beta 7x^3 + \beta 8x^2y + \beta 9xy^2 + \beta 10y^3}\dot{y} = 0,$$

qui puissent appartenir à la seconde formule

$$\dot{x} + \frac{a^{2}1p^3 + \substack{a^{1}2\\+a^{4}1}p^2x + 2a^{5}1p^2y + \substack{a^{3}2\\-a^{1}3}px^2 + 2a^{4}2pxy + a^{3}3py^2 + a^{1}4x^3 + 2a^{2}4x^2y + a^{1}5xy^2}{a^{1}1p^3 + 2a^{3}1p^2x - \substack{a^{1}2\\+a^{4}1}p^2y + a^{2}2px^2 + 2a^{1}3pxy - \substack{a^{4}2\\+a^{2}3}py^2 - a^{1}4x^2y - 2a^{2}4xy^2 - a^{1}5y^3}\dot{y} = 0;$$

& dont par conséquent l'intégrale puisse être

$$n = \frac{a1p^2 + a2px + a3py + a4x^2 + a5xy + a6y^2}{\alpha 1p^2 + \alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4x^2 + \alpha 5xy + \alpha 6y^2}.$$

1.° Pour pouvoir rapporter la première équation différencielle à la seconde formule, il faut la multiplier par

$$c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2;$$

on aura

$$\dot{x} + \frac{b1c1p^3 + \substack{b1c2\\+b2c1}p^2x + \substack{b1c3\\+b3c1}p^2y + \substack{b1c4\\+b2c2}px^2 + \substack{b1c5\\+b2c3\\+b3c2}pxy + \substack{b1c6\\+b3c3}py^2 + b2c4x^3 + \substack{b2c5\\+b3c4}x^2y + \substack{b2c6\\+b3c5}xy^2 + b3c6y^3}{\beta 1c1p^3 + \substack{\beta 1c2\\+\beta 2c1}p^2x + \substack{\beta 1c3\\+\beta 3c1}p^2y + \substack{\beta 1c4\\+\beta 2c2}px^2 + \substack{\beta 1c5\\+\beta 2c3\\+\beta 3c2}pxy + \substack{\beta 1c6\\+\beta 3c3}py^2 + \beta 2c4x^3 + \substack{\beta 2c5\\+\beta 3c4}x^2y + \substack{\beta 2c6\\+\beta 3c5}xy^2 + \beta 3c6y^3}\dot{y} = 0;$$

& en comparant, on aura

$a^{1}1 = \beta 1c1$, $a^{2}1 = b1c1$, $2a^{3}1 = \beta 1c2 + \beta 2c1$,

$a^{1}2 + a^{4}1 = b1c2 + b2c1$, $2a^{5}1 = b1c3 + b3c1$,

$-a^{1}2 + a^{4}1 = \beta 1c3 + \beta 3c1$,

$a^{2}2 = \beta 1c4 + \beta 2c2$, $-a^{1}3 + a^{3}2 = b1c4 + b2c2$,

$2a^{1}3 = \beta 1c5 + \beta 2c3 + \beta 3c2$,

$2a^{4}2 = b1c5 + b2c3 + b3c2$, $a^{3}3 = b1c6 + b3c3$,
$-a^{4}2 + a^{2}3 = \beta1c6 + \beta3c3$,

$a'4 = b2c4$, $2a^{2}4 = b2c5 + b3c4$, $a'5 = b2c6 + b3c5$;
& $b3c6 = 0$, $\beta2c4 = 0$, $\beta2c5 + \beta3c4 = -b2c4$,
$\beta2c6 + \beta3c5 = -b2c5 - b3c4$, $\beta3c6 = -b2c6 - b3c5$.

Des deux équations $b3c6 = 0$, $\beta2c4 = 0$, je conclus que $b3 = 0$, $\beta2 = 0$, ou que $b3 = 0$, $c4 = 0$, ou que $c6 = 0$, $\beta2 = 0$, ou enfin que $c6 = 0$, $c4 = 0$.

Soit $b3 = 0$, $\beta2 = 0$, on aura $b2 + \beta3 = 0$; ce qui eſt le cas de la première formule.

Soit $b3 = 0$, $c4 = 0$, on aura $c5 = 0$, $c6 = 0$; ce qui eſt le dernier de nos quatre cas.

Soit $c6 = 0$, $\beta2 = 0$, on aura $\beta3 + b2 = 0$; $c4 = 0$; ce qui revient encore au dernier cas.

Enfin ſoit $c6 = 0$, $c4 = 0$, on aura $c5 = 0$. Par conſéquent, pour rapporter la première équation à la ſeconde formule auſſi généralement qu'elle peut l'être, il ſuffiſoit de la multiplier par $c1p^{2} + c2px + c3py$; nous aurons

$$a'1 = \beta1\, c1,$$
$$a'2 = \tfrac{1}{2}\,[b1\, c2 + (b2 - \beta3).c1 - \beta1c3],$$
$$a'3 = \tfrac{1}{2}\,(\beta2\, c3 + \beta3\, c2),$$
$$a'4 = 0,$$
$$a'5 = 0$$

$$a^{2}1 = b1\, c1,$$
$$a^{2}2 = \beta2\, c2,$$
$$a^{2}3 = \tfrac{1}{2}\,[(b2 + 2\beta3).c3 + b3\, c2];$$
$$a^{2}4 = 0$$

$$a^{3}1 = \tfrac{1}{2}(\beta1\, c2 + \beta2\, c1),$$
$$a^{3}2 = \tfrac{1}{2}[\beta2\, c3 + (2b2 + \beta3) . c2],$$
$$a^{3}3 = b3\, c3$$

$$a^{4}1 = \tfrac{1}{2}[b1\, c2 + (b2 + \beta3) . c1 + \beta1\, c3],$$
$$a^{4}2 = \tfrac{1}{2}(b2\, c3 + b3\, c2)$$

$$a^{5}1 = \tfrac{1}{2}(b1\, c3 + b3\, c1),$$

& en substituant dans les quinze conditions de la formule, nous aurons les douze équations suivantes

$$b1\beta1(c2)^2 + [\beta1 . (b2 + \beta3) - 3b1\beta2]\, c1\, c2 - (\beta1)^2 c2\, c3 + \beta2 . (b2 - \beta3)(c1)^2 + \beta1\beta2\, c1\, c3 = 0.$$

$$(b1)^2 (c2)^2 + [- 2b1 . (b2 + \beta3) + 2b3\beta1]\, c1\, c2 + [(b2)^2 - (\beta3)^2]\, (c1)^2 - (\beta1)^2 (c3)^2 + [2\beta1 . (b2 + \beta3) - 2b1\beta2]\, c1\, c3 = 0.$$

$$[2b1\beta2 - \beta1 . (2b2 + \beta3)]\, (c2)^2 + \beta2\beta3\, c1\, c2 + \beta1\beta2\, c2\, c3 - (\beta2)^2 c1\, c3 = 0.$$

$$[b1\beta2 - \beta1 . (b2 + \beta3)]\, c2\, c3 - \beta2\beta3\, c1\, c3 + \beta1\beta2\, (c3)^2 + (b1\beta3 - b3\beta1)\, (c2)^2 + [\beta3 . (b2 + \beta3) - b3\beta2]\, c1\, c2 = 0.$$

$$- 2\beta2\beta3\, c2\, c3 + (\beta2)^2 (c3)^2 + [\beta3 . (2b2 + \beta3) - 2b3\beta2]\, (c2)^2 = 0.$$

$$(b1)^2 c2\, c3 + [- b1 . (b2 + \beta3) + 3b3\beta1]\, c1\, c3 - b1\beta1\, (c3)^2 - b1\, b3\, c1\, c2 + b3 . (b2 - \beta3)(c1)^2 = 0.$$

$$(2b1\beta2 - b2\beta1)\, c2\, c3 + b3\beta2\, c1\, c2 - b2\beta2\, c1\, c3 - b3\beta1\, (c2)^2 = 0.$$

$$b1\beta2\, (c3)^2 + (b1\beta3 - 2b3\beta1)\, c2\, c3 - b3\beta2\, c1\, c3 + b3\beta3\, c1\, c2 = 0.$$

$$b2\beta2\, (c3)^2 + (b2\beta3 - 3b3\beta2)\, c2\, c3 + b3\beta3\, (c2)^2 = 0.$$

$[b1 \,.\, (b2 + \beta 3) - b3\, \beta 1]\, c2\, c3 + (b1\, \beta 2 - b2\, \beta 1)\, (c3)^2 + b2\, \beta 3\, c1\, c2 + [b3\, \beta 2 - b2 \,.\, (b2 + \beta 3)]\, c1\, c3 - b1\, b3\, (c2)^2 = 0.$

$[b1 \,.\, (b2 + 2\beta 3) - 2b3\, \beta 1]\, (c3)^2 - b1\, b3\, c2\, c3 - b2\, b3\, c1\, c3 + (b3)^2\, c1\, c2 = 0.$

$[b2 \,.\, (b2 + 2\beta 3) - 2b3\, \beta 2)]\, (c3)^2 - 2b2\, b3\, c2\, c3 + (b3)^2\, (c2)^2 = 0.$

Au moyen desquelles les nombres $b1$, $b2$, $b3$, $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$, étant donnés, si ces nombres sont tels que l'équation appartienne à la seconde formule, l'on déterminera les coëfficiens $c1$, $c2$, $c3$, après quoi l'on déterminera les coëfficiens $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$; $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\alpha 4$, $\alpha 5$, $\alpha 6$, de l'intégrale. Je trouve, par exemple, que si les nombres $b1$, $b2$, $b3$, $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$ sont tels que $(2\beta 3 + b2)\,(2b2 + \beta 3) - 9b3\, \beta 2 = 0$, l'équation sera intégrable par la seconde formule, & qu'on aura $c1 = \frac{b1 \,.\, (2\beta 3 + b2) - 3b3\, \beta 1}{b3 \,.\, (b2 - \beta 3)}$, $c2 = \frac{2\beta 3 + b2}{3b3}$, $c3 = 1$.

Prenons pour exemple une équation qui soit dans le cas que nous venons de dire: soit cette équation

$$\dot{x} + \frac{p + 5x + 3y}{-p + 4x + 2y}\,\dot{y} = 0,$$

nous aurons

$$b1 = 1, b2 = 5, b3 = 3, \beta 1 = -1, \beta 2 = 4, \beta 3 = 2;$$

donc

$$c1 = 2,\ c2 = 1,\ c3 = 1;$$

donc

$a^{1}1 = -2$, $a^{2}1 = 2$, $a^{3}1 = \frac{7}{2}$, $a^{4}1 = 7$, $a^{5}1 = \frac{7}{2}$,
$a^{1}2 = 4$, $a^{2}2 = 4$, $a^{3}2 = 8$, $a^{4}2 = 4$
$a^{1}3 = 3$, $a^{2}3 = 6$, $a^{3}3 = 3$
$a^{1}4 = 0$, $a^{2}4 = 0$
$a^{1}5 = 0$

ou $\alpha 1\, a2 - a1\, \alpha 2 = -2$, $\alpha 1\, a3 - a1\, \alpha 3 = 2$,
$\alpha 2\, a3 - a2\, \alpha 3 = 4$, $\alpha 2\, a4 - a2\, \alpha 4 = 4$,
$\alpha 3\, a4 - a3\, \alpha 4 = 3$, $\alpha 3\, a5 - a3\, \alpha 5 = 6$,
$\alpha 4\, a5 - a4\, \alpha 5 = 0$, $\alpha 4\, a6 - a4\, \alpha 6 = 0$
$\alpha 5\, a6 - a5\, \alpha 6 = 0$

$\alpha 1\, a4 - a1\, \alpha 4 = \frac{7}{2}$, $\alpha 1\, a5 - a1\, \alpha 5 = 7$,
$\alpha 2\, a5 - a2\, \alpha 5 = 8$, $\alpha 2\, a6 - a2\, \alpha 6 = 4$
$\alpha 3\, a6 - a3\, \alpha 6 = 3$

$\alpha 1\, a6 - a1\, \alpha 6 = \frac{7}{2}$

donc $\alpha 1 = \frac{-2 + a1\, \alpha 2}{a2}$; en ſubſtituant cette valeur de $\alpha 1$,

on aura $\alpha 2\, a3 - a2\, \alpha 3 = \frac{2a2 + 2a3}{a1} = 4$,

$$\alpha 2\, a4 - a2\, \alpha 4 = \frac{\frac{7}{2}a2 + 2a4}{a1} = 4,$$

$$\alpha 2\, a5 - a2\, \alpha 5 = \frac{7a2 + 2a5}{a1} = 8,$$

$$\alpha 2\, a6 - a2\, \alpha 6 = \frac{\frac{7}{2}a2 + 2a6}{a1} = 4.$$

Soit $a1 = 0$, $a2 = 2$, on aura $a3 = -2$, $a4 = -\frac{7}{2}$, $a5 = -7$, $a6 = -\frac{7}{2}$; en ſubſtituant ces valeurs, on aura $\alpha 1 = -1$, $-2\alpha 2 - 2\alpha 3 = 4$, $-\frac{7}{2}\alpha 2 - 2\alpha 4 = 4$, $-7\alpha 2 - 2\alpha 5 = 8$, $-\frac{7}{2}\alpha 2 - 2\alpha 6 = 4$, &c. Soit $\alpha 2 = 0$, on aura $\alpha 3 = -2$, $\alpha 4 = -2$, $\alpha 5 = -4$, $\alpha 6 = -2$, & l'intégrale ſera $n = \frac{2px - 2py - \frac{7}{2}x^2 - 7xy - \frac{7}{2}y^2}{-p^2 - 2py - 2x^2 - 4xy - 2y^2}$,

ou $n = \frac{4px - 4py - 7x^2 - 14xy - 7y^2}{p^2 + 2py + 2x^2 + 4xy + 2y^2}$,

ou $n = \frac{7p^2 + 8px + 6py}{p^2 + 2py + 2\,.\,(x+y)^2}$.

2.° Pour pouvoir rapporter la ſeconde équation
$\dot{x} + \frac{b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy + b6y^2}{\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3py + \beta 4x^2 + \beta 5xy + \beta 6y^2}\dot{y} = 0$, à

la seconde formule, il faut la multiplier par $c1p + c2x + c3y$;

$$\text{on aura } \dot{x} + \frac{\begin{array}{llllll} c1b1p^3 & + c1b2p^2x & + c1b3p^2y & + c1b4px^2 & + c1b5pxy & + \\ & + c2b1 & + c3b1 & + c2b2 & + c2b3 & + \\ & & & & + c3b2 & \end{array}}{\begin{array}{llllll} c1\beta1p^3 & + c1\beta2p^2x & + c1\beta3p^2y & + c1\beta4px^2 & + c1\beta5pxy & + \\ & + c2\beta1 & + c3\beta1 & + c2\beta2 & + c2\beta3 & + \\ & & & & + c3\beta2 & \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{lllll} c1b6py^2 & + c2b4x^3 & + c2b5x^2y & + c2b6xy^2 & + c3b6y^3 \\ c3b3 & & + c3b4 & + c3b5 & \end{array}}{\begin{array}{lllll} c1\beta6py^2 & + c2\beta4x^3 & + c2\beta5x^2y & + c2\beta6xy^2 & + c3\beta6y^3 \\ c3\beta3 & & + c3\beta4 & + c3\beta5 & \end{array}} \dot{y} = 0;$$

& en comparant, on aura

$a^2 1 = c1b1, \quad a^1 2 + a^4 1 = c1b2 + c2b1;$

$- a^1 2 + a^4 1 = c1\beta3 + c3\beta1,$

$2a^5 1 = c1b3 + c3b1, - a^1 3 + a^3 2 = c1b4 + c2b2;$

$2a^1 3 = c1\beta5 + c2\beta3 + c3\beta2,$

$2a^4 2 = c1b5 + c2b3 + c3b2, \; a^3 3 = c1b6 + c3b3;$

$- a^4 2 + a^2 3 = c1\beta6 + c3\beta3,$

$a^1 4 = c2b4 \qquad 2a^2 4 = c2b5 + c3b4;$

$- a^1 4 = c2\beta5 + c3\beta4, \; - 2a^2 4 = c2\beta6 + c3\beta5,$

$a^1 5 = c2b6 + c3b5, \; a^1 1 = c1\beta1, \; 2a^3 1 = c1\beta2 + c2\beta1;$

$- a^1 5 = c3\beta6$

$a^2 2 = c1\beta4 + c2\beta2, \; c3b6 = 0, \; c2\beta4 = 0.$

Donc $a^1 1 = \beta1c1$

$a^1 2 = \frac{1}{2}[(b2 - \beta3)c1 + b1c2 - \beta1c3]$

$a^1 3 = \frac{1}{2}(\beta5c1 + \beta3c2 + \beta2c3)$

$a^1 4 = b4c2$

$a^1 5 = b6c2 + b5c3$

$a^2 1 = b1c1$

$a^2 2 = \beta4c1 + \beta2c2$

$a^2 3 = \frac{1}{2}[(2\beta6 + b5).c1 + b3c2 + (2\beta3 + b2).c3]$

$a^2 4 = \frac{1}{2}(b5c2 + b4c3)$

$a^3 1 =$

$$a^3 1 = \tfrac{1}{2}(c1\,\beta 2 + c2\,\beta 1)$$
$$a^3 2 = \tfrac{1}{2}[(2b4 + \beta 5).c1 + (2b2 + \beta 3).c2 + \beta 2\,c3]$$
$$a^3 3 = b6\,c1 + b3\,c3$$

$$a^4 1 = \tfrac{1}{2}[(b2 + \beta 3)\,c1 + b1\,c2 + \beta 1\,c3]$$
$$a^4 2 = \tfrac{1}{2}(b5\,c1 + b3\,c2 + b2\,c3)$$

$$a^5 1 = \tfrac{1}{2}(b3\,c1 + b1\,c3)$$

& $c3\,b6 = 0$, $c2\,\beta 4 = 0$, $(b4 + \beta 5)c2 + \beta 4\,c3 = 0$, $(b5 + \beta 6)\,c2 + (b4 + \beta 5).c3 = 0$, $b6\,c2 + (b5 + \beta 6).c3 = 0$.

De ces deux équations-ci, $c3\,b6 = 0$, $c2\,\beta 4 = 0$, je conclus que $c3 = 0$, $c2 = 0$, ou que $c3 = 0$, $\beta 4 = 0$, ou que $b6 = 0$, $c2 = 0$, ou enfin que $b6 = 0$, $\beta 4 = 0$.

Soit $c2 = 0$, $c3 = 0$, & $c1 = 1$, on aura

$a^1 1 = \beta 1$, $a^2 1 = b1$, $a^3 1 = \tfrac{1}{2}\beta 2$,
$a^1 2 = \tfrac{1}{2}(b2 - \beta 3)$, $a^2 2 = \beta 4$, $a^3 2 = \tfrac{1}{2}(2b4 + \beta 5)$,
$a^1 3 = \tfrac{1}{2}\beta 5$, $a^2 3 = \tfrac{1}{2}(2\beta 6 + b5)$, $a^3 3 = b6$
$a^1 4 = 0$, $a^2 4 = 0$
$a^1 5 = 0$

$a^4 1 = \tfrac{1}{2}(b2 + \beta 3)$, $a^5 1 = \tfrac{1}{2}b3$
$a^4 2 = \tfrac{1}{2}b5$

& en ſubſtituant dans les quinze conditions de la formule, on aura les douze équations ſuivantes :

$$\beta 2.(b2 - \beta 3) - 4b1\,\beta 4 + 2\beta 1\,\beta 5 = 0,$$
$$(b2 + \beta 3).(b2 - \beta 3) - 2b1.(2b4 + \beta 5) + 2\beta 1.(b5 + 2\beta 6) = 0,$$
$$2\beta 4.(b2 + \beta 3) - \beta 2.(2b4 + \beta 5) = 0,$$

$$\beta_5 . (b_2 + \beta_3) - \beta_2 . (b_5 + 2\beta_6) = 0,$$
$$\beta_5 . (2b_4 + \beta_5) - 2\beta_4 . (b_5 + 2\beta_6) = 0,$$
$$b_3 . (b_2 - \beta_3) - 2b_1 b_5 + 4b_6\beta_1 = 0,$$
$$2b_3\beta_4 - b_5\beta_2 = 0,$$
$$b_3\beta_5 - 2b_6\beta_2 = 0,$$
$$b_5\beta_5 - 4b_6\beta_4 = 0,$$
$$b_3 . (2b_4 + \beta_5) - b_5 . (b_2 + \beta_3) = 0,$$
$$b_3 . (b_5 + 2\beta_6) - 2b_6 . (b_2 + \beta_3) = 0,$$
$$b_5 . (b_5 + 2\beta_6) - 2b_6 . (2b_4 + \beta_5) = 0,$$

pour que l'équation $\dot{x} + \frac{(b_1p^2 + b_2px + b_3py + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2)p}{(\beta_1p^2 + \beta_2px + \beta_3py + \beta_4x^2 + \beta_5xy + \beta_6y^2)p}\dot{y} = 0$ appartienne à la ſeconde formule, & que par conſéquent ſon intégrale ſoit $n = \frac{a_1p^2 +}{\alpha_1p^2 +}$.

Soit, par exemple, l'équation

$$\dot{x} + \frac{p^2 + 40px - 6py + 15x^2 + 10xy - 20y^2}{-4p^2 - 12px - 10py + 10x^2 - 80xy + 95y^2}\dot{y} = 0,$$

on aura $\left\{\begin{matrix} b_1 = 1, & b_2 = 40, & b_3 = -6, & b_4 = 15, & b_5 = 10, & b_6 = -28 \\ \beta_1 = -4, & \beta_2 = -12, & \beta_3 = -10, & \beta_4 = 10, & \beta_5 = -80, & \beta_6 = 95 \end{matrix}\right\}$ & on trouvera que ces valeurs ſatisfont exactement à nos douze conditions; ce qui nous aſſure que la formule $n = \frac{a_1p^2 +}{\alpha_1p^2 +}$ contient l'intégrale de cette équation.

Pour en déterminer les coëfficiens, nous aurons

$$\alpha_1 a_2 - a_1\alpha_2 = -4, \quad \alpha_1 a_3 - a_1\alpha_3 = 1,$$
$$\alpha_2 a_3 - a_2\alpha_3 = 25, \quad \alpha_2 a_4 - a_2\alpha_4 = 10,$$
$$\alpha_3 a_4 - a_3\alpha_4 = -40, \quad \alpha_3 a_5 - a_3\alpha_5 = 100,$$
$$\alpha_4 a_5 - a_4\alpha_5 = 0, \quad \alpha_4 a_6 - a_4\alpha_6 = 0$$
$$\alpha_5 a_6 - a_5\alpha_6 = 0$$

$$\alpha_1 a_4 - a_1\alpha_4 = -6, \quad \alpha_1 a_5 - a_1\alpha_5 = 15,$$
$$\alpha_2 a_5 - a_1\alpha_5 = -25, \quad \alpha_2 a_6 - a_2\alpha_6 = 5$$
$$\alpha_3 a_6 - a_2\alpha_6 = -20$$

$$\alpha_1 a_6 - a_1\alpha_6 = -3$$

donc $\alpha 1 = \frac{-4 + a1\alpha 2}{a2}$,

donc $\alpha 2 a 3 - a 2 \alpha 3 = \frac{a2 + 4a3}{a1} = 25$,

$\alpha 2 a 4 - a 2 \alpha 4 = \frac{-6a2 + 4a4}{a1} = 10$,

$\alpha 2 a 5 - a 2 \alpha 5 = \frac{15a2 + 4a5}{a1} = -25$,

$\alpha 2 a 6 - a 2 \alpha 6 = \frac{-3a2 + 4a6}{a1} = 5$.

Soit $a1 = 0$, $a2 = 4$, on aura $a3 = -1$, $a4 = 6$, $a5 = -15$, $a6 = 3$; & en substituant ces valeurs, on aura $\alpha 1 = -1$, $-\alpha 2 - 4\alpha 3 = 25$, $6\alpha 2 - 4\alpha 4 = 10$, $-15\alpha 2 - 4\alpha 5 = -25$, $3\alpha 2 - 4\alpha 6 = 5$, &c.

Soit $\alpha 2 = 3$, on aura $\alpha 3 = -7$, $\alpha 4 = 2$, $\alpha 5 = -5$, $\alpha 6 = 1$, & l'intégrale sera

$$n = \frac{4px - py + 6x^2 - 15xy + 3y^2}{-p^2 + 3px - 7py + 2x^2 - 5xy + y^2}.$$

Soit $c3 = 0$, $\mathcal{C}4 = 0$, on trouvera $b6 = 0$; ce qui revient au dernier cas.

Soit $b6 = 0$, $c2 = 0$, on trouvera $\mathcal{C}4 = 0$; ce qui revient encore au dernier cas.

Enfin soit $b6 = 0$, $\mathcal{C}4 = 0$, on aura $\mathcal{C}5 = -b4$, $\mathcal{C}6 = -b5$, l'équation sera $\dot{x} + \frac{(b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy)(c1p + c2x + c3y)}{(\mathcal{C}1p^2 + \mathcal{C}2px + \mathcal{C}3py - b4xy - b5y^2)(c1p + c2x + c3y)} \dot{y} = 0$, & on aura

$a'1 = \mathcal{C}1\, c1$

$a'2 = \frac{1}{2} [(b2 - \mathcal{C}3) . c1 + b1 c2 - \mathcal{C}1 c3]$

$a'3 = \frac{1}{2} (- b4 c1 + \mathcal{C}3 c2 + \mathcal{C}2 c3)$

$a'4 = b4 c2$

$a'5 = b5 c3$.

$$a^2 1 = b1\, c1$$
$$a^2 2 = \beta 2\, c2$$
$$a^2 3 = \tfrac{1}{2}\,[-b5\, c1 + b3\, c2 + (b2 + 2\beta 3)\,.\,c3]$$
$$a^2 4 = \tfrac{1}{2}\,(b5\, c2 + b4\, c3)$$

$$a^3 1 = \tfrac{1}{2}\,(\beta 2\, c1 + \beta 1\, c2)$$
$$a^3 2 = \tfrac{1}{2}\,[b4\, c1 + (2b2 + \beta 3)\,.\,c2 + \beta 2\, c3]$$
$$a^3 3 = b3\, c3$$

$$a^4 1 = \tfrac{1}{2}\,[(b2 + \beta 3)\,.\,c1 + b1\, c2 + \beta 1\, c3]$$
$$a^4 2 = \tfrac{1}{2}\,(b5\, c1 + b3\, c2 + b2\, c3)$$

$$a^5 1 = \tfrac{1}{2}\,(b3\, c1 + b1\, c3)$$

& en ſubſtituant dans les quinze conditions de la formule; on aura les quinze équations ſuivantes,

$$[\beta 2\,.\,(b2 - \beta 3) - 2b4\beta 1]\,(c1)^2 + (-3b1\,\beta 2 + \beta 1\,.\,(b2 + \beta 3)]\, c1\, c2 + \beta 1\,\beta 2\, c1 c3 + b1\,\beta 1\,(c2)^2 - (\beta 1)^2\, c2\, c3 = 0.$$

$$[(b2)^2 - (\beta 3)^2 - 2b1\, b4 - 2b5\,\beta 1]\,(c1)^2 + [-2b1\,.\,(b2 + \beta 3) + 2b3\,\beta 1]\, c1 c2 + (b1)^2 (c2)^2 + [2\beta 1\,.\,(b2 + \beta 3) - 2b1\,\beta 2]\, c1 c3 - (\beta 1)^2 (c3)^2 = 0.$$

$$(\beta 2\,\beta 3 + 3b4\,\beta 1)\, c1\, c2 + [2b1\,\beta 2 - \beta 1\,.\,(2b2 + \beta 3)]\,(c2)^2 + \beta 1\,\beta 2\, c2 c3 - b4\,\beta 2\,(c1)^2 - (\beta 2)^2\, c1\, c3 = 0.$$

$$[-b4\,.\,(b2 + \beta 3) + b5\,\beta 2]\,(c1)^2 + [3b1\, b4 + \beta 3\,.\,(b2 + \beta 3) - b3\,\beta 2 + b5\,\beta 1]\, c1\, c2 - (b4\,\beta 1 + \beta 2\,\beta 3)\, c1 c3 + (b1\,\beta 3 - \beta 3\,\beta 1)\,(c2)^2 + [-\beta 1\,.\,(b2 + \beta 3) + b1\,\beta 2]\, c2\, c3 + \beta 1\,\beta 2\,(c3)^2 = 0.$$

$$-(b4)^2\,(c1)^2 + (2b5\,\beta 2 - 2b4\,\beta 3)\, c1\, c2 + [\beta 3\,.\,(2b2 + \beta 3) - 2b3\,\beta 2 + 2b1\, b4]\,(c2)^2 - 2\,(\beta 2\,\beta 3 + b4\,\beta 1)\, c2\, c3 + (\beta 2)^2\,(c3)^2 = 0.$$

$$[b3 . (b2 - \beta 3) - 2b1\,b5]\,(c1)^2 - b1\,b3\,c1\,c2 + [3b3\,\beta 1 - b1 . (b2 + \beta 3)]\,c1\,c3 + (b1)^2\,c2\,c3 - b1\,\beta 1\,(c3)^2 = 0.$$

$$(b3\beta 2 + b5\beta 1)\,c1\,c2 + (2b1\,\beta 2 - b2\,\beta 1)\,c2\,c3 - b5\,\beta 2\,(c1)^2 + (-\,b2\,\beta 2 + 2b4\,\beta 1)\,c1\,c3 - b3\,\beta 1\,(c2)^2 = 0.$$

$$-\,b3\,b4\,(c1)^2 + (b3\,\beta 3 + 2b1\,b5)\,c1\,c2 + (-\,b3\beta 2 + b1\,b4)\,c1\,c3 + (b1\beta 3 - 2b3\beta 1)\,c2\,c3 + b1\,\beta 2\,(c3)^2 = 0.$$

$$-\,b4\,b5\,(c1)^2 + (b2\,b5 - b3\,b4)\,c1\,c2 + (b5\,\beta 2 - b4\,\beta 3)\,c1\,c3 + (b3\,\beta 3 + b1\,b5)\,(c2)^2 + (-\,3b3\,\beta 2 + b2\,\beta 3 - b5\,\beta 1 + b1\,b4)\,c2\,c3 + (b2\,\beta 2 - b4\,\beta 1)\,(c3)^2 = 0.$$

$$[b3\,b4 - b5 . (b2 + \beta 3)]\,(c1)^2 + (b2\,b3 - b1\,b5)\,c1\,c2 + [b3\,\beta 2 + b1\,b4 + 3b5\,\beta 1 - b2 . (b2 + \beta 3)]\,c1\,c3 + [b1 . (b2 + \beta 3) - b3\,\beta 1]\,c2\,c3 + (b1\,\beta 2 - b2\,\beta 1)\,(c3)^2 - b1\,b3\,(c2)^2 = 0.$$

$$-\,b3\,b5\,(c1)^2 + (3b1\,b5 - b2\,b3)\,c1\,c3 + (b3)^2\,c1\,c2 + [b1 . (b2 + 2\beta 3) - 2b3\,\beta 1]\,(c3)^2 - b1\,b3\,c2\,c3 = 0.$$

$$-\,(b5)^2\,(c1)^2 + 2\,(b2\,b5 - b3\,b4)\,c1\,c3 + (-\,2b2\,b3 + 2b1\,b5)\,c2\,c3 + (b3)^2\,(c2)^2 + [b2 . (b2 + 2\beta 3) - 2b3\,\beta 2 - 2b5\,\beta 1]\,(c3)^2 = 0.$$

$$[2b3\,b4 - b5 . (b2 + \beta 3)]\,c1\,c2 + (b1\,b4 + b5\,\beta 1)\,c2\,c3 - b1\,b5\,(c2)^2 + [2b5\,\beta 2 - b4 . (b2 + \beta 3)]\,c1\,c3 - b4\,\beta 1\,(c3)^2 = 0.$$

$$b4\,b5\,c1\,c2 + [2b3\,b4 - b5 . (2b2 + \beta 3)]\,(c2)^2 + (3b5\,\beta 2 - b4\,\beta 3)\,c2\,c3 - (b4)^2\,c1\,c3 - b4\,\beta 2\,(c3)^2 = 0.$$

$(3b3b4 - b2b5)\,c2c3 + (b5)^2\,c1c2 - b3b5\,(c2)^2 - b4b5\,c1\,c3 + [-b4 \cdot (b2 + 2\beta3) + 2b5\,\beta2]\,(c3)^2 = 0$, au moyen desquelles les coëfficiens $b1, b2, b3\ b4\ b5, \beta1\ \beta2\ \beta3$ étant donnés, s'ils sont tels que l'équation appartienne à la seconde formule, l'on déterminera les coëfficiens $c1, c2, c3$, après quoi l'on déterminera les coëfficiens $a1, a2, a3, a4, a5, a6, \alpha1, \alpha2, \alpha3, \alpha4, \alpha5, \alpha6$ de l'intégrale.

Soit, par exemple, l'équation

$$\dot{x} + \frac{-7p^2 + 12px - 10py - 21x^2 + 6xy}{-8px - 9py + 21xy - 6y^2}\,\dot{y} = 0,$$ on

aura $\begin{cases} b1 = -7, & b2 = 12, \quad b3 = -10, \quad b4 = -21, \quad b5 = 6 \\ \beta1 = 0, & \beta2 = -8, \quad \beta3 = -9 \end{cases}$,

& en substituant ces valeurs dans nos quinze équations, on aura

$$c1 \cdot (c1 + c2) = 0.$$

$$-3 \cdot 11\,(c1)^2 + 2 \cdot 3c1\,c2 + 7\,(c2)^2 - 2^4\,c1\,c3 = 0.$$

$$3^2c1\,c2 + 2 \cdot 7\,(c2)^2 - 3 \cdot 7\,(c1)^2 - 2^3c1\,c3 = 0.$$

$$3 \cdot 5\,(c1)^2 + 334\,c1\,c2 - 2^3 \cdot 3^2c1\,c3 + 3^2 \cdot 7(c2)^2 + 2^3 \cdot 7c2\,c3 = 0.$$

$$-3^2 \cdot 7^2(c1)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 79\,c1\,c2 - (c2)^2 - 2^4 \cdot 3^2c2\,c3 + 2^6\,(c3)^2 = 0.$$

$$-2 \cdot 3^2(c1)^2 - 2 \cdot 5\,c1\,c2 + 3\,c1\,c3 + 7\,c2\,c3 = 0.$$

$$5\,c1\,c2 + 7\,c2\,c3 + 3\,(c1)^2 + 2 \cdot 3\,c1\,c3 = 0.$$

$$-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\,(c1)^2 + 2 \cdot 3\,c1\,c2 + 67\,c1\,c3 + 7 \cdot 3^2\,c2\,c3 + 2^3 \cdot 7(c3)^2 = 0.$$

$$2 \cdot 3^2 \cdot 7(c1)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 23\,c1\,c2 - 3 \cdot 79\,c1\,c3 + 2^4 \cdot 3(c2)^2 - 3 \cdot 67\,c2\,c3 - 2^5 \cdot 3\,(c3)^2 = 0.$$

$$2^6 \cdot 3(c1)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 13\,c1\,c2 + 191\,c1\,c3 -$$

$3 \cdot 7 c2\, c3 + 2^3 \cdot 7 (c3)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 (c2)^2 = 0.$

$2 \cdot 3 \cdot 5 (c1)^2 - 3\, c1\, c3 - 5 \cdot 7\, c2\, c3 + 3 \cdot 7 (c3)^2 + 2 \cdot 5^2\, c1\, c2 = 0.$

$- 3^2 (c1)^2 - 3 \cdot 23\, c1\, c3 + 3 \cdot 13\, c2\, c3 + 5^2 (c2)^2 - 2 \cdot 29 (c3)^2 = 0.$

$2 \cdot 3 \cdot 67\, c1\, c2 + 3 \cdot 7^2\, c2\, c3 + 2 \cdot 3 \cdot 7 (c2)^2 - 3 \cdot 11\, c1\, c3 = 0.$

$- 2 \cdot 3 \cdot 7\, c1\, c2 + 2 \cdot 5 \cdot 11 (c2)^2 - 3 \cdot 37\, c2\, c3 - 3 \cdot 7^2\, c1\, c3 - 2^3 \cdot 7 (c3)^2 = 0.$

$3 \cdot 31\, c2\, c3 + 2 \cdot 3\, c1\, c2 + 2 \cdot 5 (c2)^2 + 3 \cdot 7\, c1\, c3 - 37 (c3)^2 = 0.$

De la première de ces équations il ſuit que $c1 = 0$, ou que $c1 + c2 = 0$. Soit $c1 = 0$, la ſeconde équation donnera $c2 = 0$, la cinquième donnera $c3 = 0$; par conſéquent $c1$ ne peut pas être $= 0$: or, dès que $c1$ n'eſt pas $= 0$, l'on peut lui donner telle valeur que l'on voudra. Soit $c1 = 0$, on aura $c2 = -1$; & en ſubſtituant pour $c1$ & $c2$ leurs valeurs dans les quatorze équations reſtantes, toutes donneront $c3 = -2$; par conſéquent l'équation propoſée eſt ſûrement intégrable par la ſeconde formule. Pour l'intégrer, on aura

$\alpha 1\, a2 - a1\, \alpha 2 = 0,$ $\alpha 1\, a3 - a1\, \alpha 3 = -7,$
$\alpha 2\, a3 - a2\, \alpha 3 = 14,$ $\alpha 2\, a4 - a2\, \alpha 4 = 8,$
$\alpha 3\, a4 - a3\, \alpha 4 = 23,$ $\alpha 3\, a5 - a3\, \alpha 5 = 8,$
$\alpha 4\, a5 - a4\, \alpha 5 = 21,$ $\alpha 4\, a6 - a4\, \alpha 6 = 18$
$\alpha 5\, a6 - a5\, \alpha 6 = -12$

$\alpha 1\, a4 - a1\, \alpha 4 = -4,$ $\alpha 1\, a5 - a1\, \alpha 5 = 5,$
$\alpha 2\, a5 - a2\, \alpha 5 = -10,$ $\alpha 2\, a6 - a2\, \alpha 6 = -4$
$\alpha 3\, a6 - a3\, \alpha 6 = 20$

$\alpha 1\, a6 - a1\, \alpha 6 = 2$

Donc $\alpha 1 = \frac{a1\,\alpha 2}{a2}$; en ſubſtituant, on aura

$$\alpha 2\, a3 - a2\, \alpha 3 = \frac{-7a2}{a1} = 14,$$

$$\alpha 2\, a4 - a2\, \alpha 4 = \frac{-4a2}{a1} = 8,$$

$$\alpha 2\, a5 - a2\, \alpha 5 = \frac{5a2}{a1} = -10,$$

$$\alpha 2\, a6 - a2\, \alpha 6 = \frac{2a2}{a1} = -4.$$

Donc $\alpha 2 = \frac{14 + a2\,\alpha 3}{a3}$; en ſubſtituant, on aura

$$\alpha 3\, a4 - a3\, \alpha 4 = \frac{8a3 - 14a4}{a2} = 23,$$

$$\alpha 3\, a5 - a3\, \alpha 5 = \frac{-10a3 - 14a5}{a2} = 8,$$

$$\alpha 3\, a6 - a3\, \alpha 6 = \frac{-4a3 - 14a6}{a2} = 20.$$

Soit $a1 = 0$, $a2 = 0$, $a3 = 7$, on aura $a4 = 4$, $a5 = -5$, $a6 = -2$; & en ſubſtituant ces valeurs, on aura $\alpha 1 = -1$, $\alpha 2 = 2$, $4\alpha 3 - 7\alpha 4 = 23$, $-5\alpha 3 - 7\alpha 5 = 8$, $-2\alpha 3 - 7\alpha 6 = 20$, &c.

Soit $\alpha 3 = 4$, on aura $\alpha 4 = -1$, $\alpha 5 = -4$, $\alpha 6 = -4$, l'intégrale ſera donc $n = \frac{7py + 4x^2 - 5xy - 2y^2}{-p^2 + 2px + 4py - x^2 - 4xy - 4y^2}$.

3.° Si la troiſième équation différencielle

$$\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2 + b10y^3}{\beta 1p^3 + \beta 2p^2x + \beta 3p^2y + \beta 4px^2 + \beta 5pxy + \beta 6py^2 + \beta 7x^3 + \beta 8x^2y + \beta 9xy^2 + \beta 10y^3}\,\dot{y} = 0$$

appartient à la ſeconde formule, on aura $b10 = 0$, $\beta 7 = 0$, $\beta 8 = -b7$, $\beta 9 = -b8$, $\beta 10 = -b9$; par conſéquent, dans ce cas, elle ſera repréſentée généralement par celle-ci,

$$\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2}{\beta 1p^3 + \beta 2p^2x + \beta 3p^2y + \beta 4px^2 + \beta 5pxy + \beta 6py^2 - b7x^3y - b8xy^2 - b9y^3}\,\dot{y} = 0,$$

& on aura

& on aura $\left\{\begin{matrix} a^2 1 = b1,\ a^1 2 + a^4 1 = b2,\ 2a^5 1 = b3; & -a^1 3 + a^3 2 = b4, \\ a^1 1 = \beta 1,\ 2a^3 1 = \beta 2, & -a^1 2 + a^4 1 = \beta 3,\ a^2 2 = \beta 4, \end{matrix}\right.$

$\left.\begin{matrix} 2a^4 2 = b5,\ a^3 3 = b6, & a^1 4 = 67,\ 2a^2 4 = b8,\ a^1 5 = b9 \\ 2a^1 3 = \beta 5,\ -a^4 2 + a^2 3 = \beta 6 & \end{matrix}\right\}$

Donc $a^1 1 = \beta 1$ $\quad a^2 1 = b1$

$a^1 2 = \frac{1}{2}(b2 - \beta 3)$ $\quad a^2 2 = \beta 4$

$a^1 3 = \frac{1}{2}\beta 5$ $\quad a^2 3 = \frac{1}{2}(b5 + 2\beta 6)$

$a^1 4 = b7$ $\quad a^2 4 = \frac{1}{2}b8$

$a^1 5 = b9$

$a^3 1 = \frac{1}{2}\beta 2$ $\quad a^4 1 = \frac{1}{2}(b2 + \beta 3)$

$a^3 2 = \frac{1}{2}(2b4 + \beta 5)$ $\quad a^4 2 = \frac{1}{2}b5$

$a^3 3 = b6$

$a^5 1 = \frac{1}{2}b3$

Et en ſubſtituant dans les quinze conditions de la formule, on aura $\beta 2 \cdot (b2 - \beta 3) - 4b1\beta 4 + 2\beta 1\beta 5 = 0.$

$(b2 + \beta 3) \cdot (b2 - \beta 3) - 2b1 \cdot (2b4 + \beta 5) + 2\beta 1 \cdot (b5 + 2\beta 6) = 0.$

$2\beta 4 \cdot (b2 + \beta 3) - \beta 2 \cdot (2b4 + \beta 5) + 4b7\beta 1 = 0.$

$\beta 5 \cdot (b2 + \beta 3) - \beta 2 \cdot (b5 + 2\beta 6) + 4b1 b7 = 0.$

$\beta 5 \cdot (2b4 + \beta 5) - 2\beta 4 \cdot (b5 + 2\beta 6) + 2b7 \cdot (b2 - \beta 3) = 0.$

$b3 \cdot (b2 - \beta 3) - 2b1 b5 + 4b6\beta 1 = 0.$

$2b3\beta 4 - b5\beta 2 + 2b8\beta 1 = 0.$

$b3\beta 5 - 2b6\beta 2 + 2b1 b8 = 0.$

$b5\beta 5 - 4b6\beta 4 + b8 \cdot (b2 - \beta 3) = 0.$

$b3 \cdot (2b4 + \beta 5) - b5 \cdot (b2 + \beta 3) + 4b9\beta 1 = 0.$

$b_3 \cdot (b_5 + 2\beta_6) - 2b_6 \cdot (b_2 + \beta_3) + 4b_1 b_9 = 0.$

$b_5 \cdot (b_5 + 2\beta_6) - 2b_6 \cdot (2b_4 + \beta_5) + 2b_9 \cdot (b_2 - \beta_3) = 0.$

$2b_3 b_7 - b_8 \cdot (b_2 + \beta_3) + 2b_9 \beta_2 = 0.$

$2b_5 b_7 - b_8 \cdot (2b_4 + \beta_5) + 4b_9 \beta_4 = 0.$

$4b_6 b_7 - b_8 \cdot (b_5 + 2\beta_6) + 2b_9 \beta_5 = 0.$

Les nombres b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9; β_1; β_2, β_3, β_4, β_5, β_6 étant donnés, on verra s'ils satisfont à ces quinze conditions; ce qui arrivera sûrement, si l'équation appartient à la seconde formule ; & au cas qu'ils y satisfassent, l'on déterminera les coëfficiens a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6; α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 de l'intégrale par le moyen des équations $\alpha_1 a_2 - a_1 \alpha_2 = \beta_1$

$$\alpha_2 a_3 - a_2 \alpha_3 = \tfrac{1}{2}(b_2 - \beta_3)$$
$$\alpha_3 a_4 - a_3 \alpha_4 = \tfrac{1}{2}\beta_5$$
$$\alpha_4 a_5 - a_4 \alpha_5 = b_7$$
$$\alpha_5 a_6 - a_5 \alpha_6 = b_9$$

$$\alpha_1 a_3 - a_1 \alpha_3 = b_1$$
$$\alpha_2 a_4 - a_2 \alpha_4 = \beta_4$$
$$\alpha_3 a_5 - a_3 \alpha_5 = \tfrac{1}{2}(b_5 + 2\beta_6)$$
$$\alpha_4 a_6 - a_4 \alpha_6 = \tfrac{1}{2} b_8$$

$$\alpha_1 a_4 - a_1 \alpha_4 = \tfrac{1}{2}\beta_2$$
$$\alpha_2 a_5 - a_2 \alpha_5 = \tfrac{1}{2}(2b_4 + \beta_5)$$
$$\alpha_3 a_6 - a_3 \alpha_6 = b_6$$

$$\alpha_1 a_5 - a_1 \alpha_5 = \tfrac{1}{2}(b_2 + \beta_3)$$
$$\alpha_2 a_6 - a_2 \alpha_6 = \tfrac{1}{2} b_5$$

$$\alpha_1 a_6 - a_1 \alpha_6 = \tfrac{1}{2} b_3$$

Il n'eſt pas difficile de ſe faire des exemples de ce cas-ci.

Soit, par exemple, $n = \frac{p^2 - 2px + 3py - 4x^2 + 5xy - 6y^2}{-6p^2 + 5px - 4py + 3x^2 - 2xy + y^2}$, en différenciant on aura $\dot{x} + \frac{-2p^3 - 3p^2x + 10p^2y + 2px^2 - 8pxy + 3py^2 + x^3 - 4x^2y + xy^2}{p^3 + 6p^2x - 5p^2x - 5p^2y - 2px^2 + 2pxy + 2py^2 - x^2y + 4xy^2 - y^3} \dot{y} = 0$.

Je ſuppoſe qu'on m'eût propoſé cette équation à intégrer, j'aurois vû d'abord qu'elle ſe pouvoit rapporter à la ſeconde formule, & j'aurois eu $b1 = -2$, $b2 = -3$, $b3 = 10$, $b4 = 2$, $b5 = -8$, $b6 = 3$, $b7 = 1$, $b8 = -4$, $b9 = 1$; & $\beta1 = 1$, $\beta2 = 6$, $\beta3 = -5$, $\beta4 = -2$, $\beta5 = 2$, $\beta6 = 2$; & en ſubſtituant ces valeurs dans les quinze conditions de cette formule, j'aurois trouvé qu'elles y ſatisfont, ce qui m'auroit aſſuré que cette équation appartient réellement à la ſeconde formule: pour l'intégrer, j'aurois eu

$\alpha1\, a2 - a1\, \alpha2 = 1$ $\quad$ $\alpha1\, a3 - a1\, \alpha3 = -2$

$\alpha2\, a3 - a2\, \alpha3 = 1$ $\quad$ $\alpha2\, a4 - a2\, \alpha4 = -2$

$\alpha3\, a4 - a3\, \alpha4 = 1$ $\quad$ $\alpha3\, a5 - a3\, \alpha5 = -2$

$\alpha4\, a5 - a4\, \alpha5 = 1$ $\quad$ $\alpha4\, a6 - a4\, \alpha6 = -2$

$\alpha5\, a6 - a5\, \alpha6 = 1$

$\alpha1\, a4 - a1\, \alpha4 = 3$ $\quad$ $\alpha1\, a5 - a1\, \alpha5 = -4$

$\alpha2\, a5 - a2\, \alpha5 = 3$ $\quad$ $\alpha2\, a6 - a2\, \alpha6 = -4$

$a3\, a6 - a3\, \alpha6 = 3$

$\alpha1\, a6 - a1\, \alpha6 = 5$

Donc $\alpha1 = \frac{1 + a1\, \alpha2}{a2}$;

Donc $\alpha2\, a3 - a2\, \alpha3 = \frac{-2a2 - a3}{a1} = 1$,

$\alpha2\, a4 = a2\, \alpha4 = \frac{3a2 - a4}{a1} = -2$;

$$\alpha 2 a5 - a2 \alpha 5 = \frac{-4a2 - a5}{a1} = 3,$$

$$\alpha 2 a6 - a2 \alpha 6 = \frac{5a2 - a6}{a1} = -4.$$ En faisant $a1 = 0$, $a3 = 2$, j'aurois eu $a2 = -1$, $a4 = -3$, $a5 = 4$, $a6 = -5$; & en substituant ces valeurs, j'aurois eu $-\alpha 1 = 1$, $2\alpha 2 + \alpha 3 = 1$, $-3\alpha 2 + \alpha 4 = -2$, $4\alpha 2 + \alpha 5 = 3$, $-5\alpha 2 + \alpha 6 = -4$. En faisant $\alpha 2 = 0$, j'aurois eu $\alpha 3 = 1$, $\alpha 4 = -2$, $\alpha 5 = 3$, $\alpha 6 = -4$, & par conséquent l'intégrale $n = \frac{-px + 2py - 3x^2 + 4xy - 5y^2}{-p^2 + py - 2x^2 + 3xy - 4y^2}$.

I I I.

Il n'y a que la première équation différencielle, la seconde, la troisième, la quatrième & la cinquième qui puissent appartenir à la troisième formule, & dont par conséquent l'intégrale puisse être $n = \frac{a1p^3 +}{\alpha 1 p^3 +}$.

1.° Pour pouvoir rapporter la première équation différencielle à la troisième formule, il faut la mettre sous cette forme ci,

$$\dot{x} + \frac{(b1p + b2x + b3y)\ (c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 +}{(\beta 1p + \beta 2x + \beta 3y)\ (c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 +}$$

$$\frac{c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3 + c11x^4 +}{c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3 + c11x^4 +}$$

$$\frac{c12x^3y + c13x^2y^2 + c14xy^3 + c15y^4)}{c12x^3y + c13x^2y^2 + c14xy^3 + c15y^4)}\,\dot{y} = 0,$$ ou plustôt sous celle-ci,

$$\dot{x} + \frac{\begin{matrix} b1c1 \\ \\ \\ \end{matrix} p^5 + \begin{matrix} b1c2 \\ + b2c1 \\ \\ \end{matrix} p^4x + \begin{matrix} b1c3 \\ + b3c1 \\ \\ \end{matrix} p^4y + \begin{matrix} b1c4 \\ + b2c2 \\ \\ \end{matrix} p^3x^2 + \begin{matrix} b1c5 \\ + b2c3 \\ + b3c2 \end{matrix} p^3xy + \begin{matrix} \\ + \\ \\ \end{matrix}}{\begin{matrix} \beta 1c1 \\ \\ \\ \end{matrix} p^5 + \begin{matrix} \beta 1c2 \\ + \beta 2c1 \\ \\ \end{matrix} p^4x + \begin{matrix} \beta 1c3 \\ + \beta 3c1 \\ \\ \end{matrix} p^4y + \begin{matrix} \beta 1c4 \\ + \beta 2c2 \\ \\ \end{matrix} p^3x^2 + \begin{matrix} \beta 1c5 \\ + \beta 2c3 \\ + \beta 3c2 \end{matrix} p^3xy + \begin{matrix} \\ + \\ \\ \end{matrix}}$$

$$\frac{\begin{matrix} b1c6 \\ b3c3 \\ \\ \end{matrix} p^3y^2 + \begin{matrix} b1c7 \\ + b2c4 \\ \\ \end{matrix} p^2x^3 + \begin{matrix} b1c8 \\ + b2c5 \\ + b3c4 \end{matrix} p^2x^2y + \begin{matrix} b1c9 \\ + b2c6 \\ + b3c5 \end{matrix} p^2xy^2 + \begin{matrix} b1c10 \\ + b3c6 \\ \\ \end{matrix} p^2y^3 + \begin{matrix} \\ + \\ \\ \end{matrix}}{\begin{matrix} \beta 1c6 \\ \beta 3c3 \\ \\ \end{matrix} p^3y^2 + \begin{matrix} \beta 1c7 \\ + \beta 2c4 \\ \\ \end{matrix} p^2x^3 + \begin{matrix} \beta 1c8 \\ + \beta 2c5 \\ + \beta 3c4 \end{matrix} p^2x^2y + \begin{matrix} \beta 1c9 \\ + \beta 2c6 \\ + \beta 3c5 \end{matrix} p^2xy^2 + \begin{matrix} \beta 1c10 \\ + \beta 3c6 \\ \\ \end{matrix} p^2y^3 + \begin{matrix} \\ + \\ \\ \end{matrix}}$$

$$\frac{\begin{matrix} b1c11px^4 & + b1c12px^3y & + b1c13px^2y^2 & + b1c14pxy^3 & + b1c15py^4 & + b2c11x^5 & + \\ b2c7 & + b2c8 & + b2c9 & + b2c10 & + b3c10 & & + \\ & + b3c7 & + b3c8 & + b3c9 & & & \end{matrix}}{\begin{matrix} \beta1c11px^4 & + \beta1c12px^3y & + \beta1c13px^2y^2 & + \beta1c14pxy^3 & + \beta1c15py^4 & + \beta2c11x^5 & + \\ \beta2c7 & + \beta2c8 & + \beta2c9 & + \beta2c10 & + \beta3c10 & & + \\ & + \beta3c7 & + \beta3c8 & + \beta3c9 & & & \end{matrix}}$$

$$\frac{\begin{matrix} b2c12x^4y & + b2c13x^3y^2 & + b2c14x^2y^3 & + b2c15xy^4 & + b3c15y^5 \\ b3c11 & + b3c12 & + b3c13 & + b3c14 & \end{matrix}}{\begin{matrix} \beta2c12x^4y & + \beta2c13x^3y^2 & + \beta2c14x^2y^3 & + \beta2c15xy^4 & + \beta3c15y^5 \\ \beta3c11 & + \beta3c12 & + \beta3c13 & + \beta3c14 & \end{matrix}} \dot{y} = 0;$$

on aura $a^{2}1 = b1c1$, $a^{1}2 + a^{4}1 = b1c2 + b2c1$; $2a^{5}1 = b1c3 + b3c1$, $-a^{1}3 + a^{3}2 + a^{7}1 = b1c4 + b2c2$; $2a^{4}2 + a^{8}1 = b1c5 + b2c3 + b3c2$, $a^{3}3 + 3a^{9}1 = b1c6 + b3c3$, $-a^{4}3 + a^{1}4 + a^{6}2 = b1c7 + b2c4$, $2a^{2}4 + 2a^{7}2 = b1c8 + b2c5 + b3c4$, $a^{6}3 + a^{1}5 + 3a^{8}2 = b1c9 + b2c6 + b3c5$, $2a^{7}3 = b1c10 + b3c6$ $-a^{2}5 + a^{4}4 = b1c11 + b2c7$, $-2a^{1}6 + 2a^{5}4 = b1c12 + b2c8 + b3c7$, $a^{4}5 - a^{2}6 + 3a^{6}4 = b1c13 + b2c9 + b3c8$, $2a^{5}5 = b1c14 + b2c10 + b3c9$, $a^{4}6 = b1c15 + b3c10$, $a^{1}7 = b2c11$, $2a^{2}7 = b2c12 + b3c11$, $a^{1}8 + 3a^{3}7 = b2c13 + b3c12$, $2a^{2}8 = b2c14 + b3c13$, $a^{1}9 = b2c15 + b3c14$.

$a^{2}1 = \beta1c1$, $2a^{3}1 = \beta1c2 + \beta2c1$, $-a^{1}2 + a^{4}1 = \beta1c3 + \beta3c1$, $a^{2}2 + 3a^{6}1 = \beta1c4 + \beta2c2$, $2a^{1}3 + 2a^{7}1 = \beta1c5 + \beta2c3 + \beta3c2$, $-a^{4}2 + a^{2}3 + a^{8}1 = \beta1c6 + \beta3c3$, $2a^{5}2 = \beta1c7 + \beta2c4$, $a^{6}2 - a^{1}4 + 3a^{4}3 = \beta1c8 + \beta2c5 + \beta3c4$, $-2a^{2}4 + 2a^{5}3 = \beta1c9 + \beta2c6 + \beta3c5$, $-a^{8}2 - a^{1}5 + a^{6}3 = \beta1c10 + \beta3c6$, $a^{3}4 = \beta1c11 + \beta2c7$, $2a^{2}5 = \beta1c12 + \beta2c8 + \beta3c7$, $-a^{5}4 + a^{3}5 + 3a^{1}6 = \beta1c13 + \beta2c9 + \beta3c8$,

$-2a'4 + 2a^{2}6 = \beta 1 c14 + \beta 2 c10 + \beta 3 c9;$

$-a^{5}5 + a^{3}6 = \beta 1 c15 + \beta 3 c10,$

Et $b3c15 = 0$, $\beta 1 c11 = 0$,

$\beta 2 c12 + \beta 3 c11 + b2 c11 = 0,$

$\beta 2 c13 + \beta 3 c12 + b2 c12 + b3 c11 = 0;$

$\beta 2 c14 + \beta 3 c13 + b2 c13 + b3 c12 = 0,$

$\beta 2 c15 + \beta 3 c14 + b2 c14 + b3 c13 = 0,$

$\beta 3 c15 + b2 c15 + b3 c14 = 0.$

De ce que $b3c15 = 0$, $\beta 2 c11 = 0$, je conclus que $b3 = 0$, $\beta 2 = 0$, ou que $b3 = 0$, $c11 = 0$, ou que $c15 = 0$, $\beta 2 = 0$, ou enfin que $c15 = 0$, $c11 = 0$.

Soit $b3 = 0$, $\beta 2 = 0$, on aura $b2 + \beta 3 = 0$, ce qui eſt le cas de la première formule.

Soit $b3 = 0$, $c11 = 0$, on aura $c12 = 0$, $c13 = 0$, $c14 = 0$, $c15 = 0$, ce qui revient au dernier de nos quatre cas.

Soit $c15 = 0$, $\beta 2 = 0$, on aura $c14 = 0$, $c13 = 0$, $c12 = 0$, $c11 = 0$, ce qui revient encore au dernier cas.

Enfin ſoit $c15 = 0$, $c11 = 0$, on aura $c12 = 0$, $c13 = 0$, $c14 = 0$.

Par conſéquent, pour rapporter la première équation à la troiſième formule auſſi généralement qu'elle peut l'être, il ſuffiſoit de la multiplier par $c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3$.

On aura

$$a^{1}1 = \beta 1 c1,\ a^{2}1 = b1 c1,\ a^{3}1 = \tfrac{1}{2}(\beta 1 c2 + \beta 2 c1),$$

$$a^{4}1 = \tfrac{1}{2}[(b2 + \beta 3).c1 + b1c2 + \beta 1 c3],\ a^{5}1 = \tfrac{1}{2}(b1c3 + b3c1),$$

$$a^{1}2 = \tfrac{1}{2}[(b2 - \beta 3).c1 + b1c2 - \beta 1 c3],\ a^{5}2 = \tfrac{1}{2}(\beta 1 c7 + \beta 2 c4),$$

$$a^{7}3 = \tfrac{1}{2}(b1 c10 + b3 c6),$$

$a^{3}4 = \beta 2\, c7$, $a^{4}4 = \frac{1}{2}[(2b2 + \beta 3) . c7, + \beta 2\, c8)$

$a^{2}5 = \frac{1}{2}(\beta 2\, c8 + \beta 3\, c7)$, $a^{5}5 = \frac{1}{2}(b2\, c10 + b3\, c9)$

$a^{3}6 = \frac{1}{2}[(b2 + 2\beta 3) . c10 + b3\, c9]$, $a^{4}6 = b3\, c10$

$a^{1}7 = 0$, $a^{2}7 = 0$.

$a^{2}8 = 0$.

$a^{1}9 = 0$.

& $a^{2}2 + 3a^{6}1 = \beta 1\, c4 + \beta 2\, c2$

$- a^{1}3 + a^{3}2 + a^{7}1 = b1\, c4 + b2\, c2$

$2a^{1}3 + 2a^{7}1 = \beta 1\, c5 + \beta 2\, c3 + \beta 3\, c2$

$2a^{4}2 + 2a^{8}1 = b1\, c5 + b2\, c3 + b3\, c2$

$- a^{4}2 + a^{2}3 + a^{8}1 = \beta 1\, c6 + \beta 3\, c3$

$a^{3}3 + 3a^{9}1 = b1\, c6 + b3\, c3$

$- a^{4}3 + a^{1}4 + a^{6}2 = b1\, c7 + b2\, c4$

$a^{6}2 - a^{1}4 + 3a^{4}3 = \beta 1\, c8 + \beta 2\, c5 + \beta 3\, c4$

$2a^{2}4 + 2a^{7}2 = b1\, c8 + b2\, c5 + b3\, c4$

$- 2a^{2}4 + 2a^{5}3 = \beta 1\, c9 + \beta 2\, c6 + \beta 3\, c5$

$a^{6}3 + a^{1}5 + 3a^{8}2 = b1\, c9 + b2\, c6 + b3\, c5$

$- a^{8}2 - a^{1}5 + a^{6}3 = \beta 1\, c10 + \beta 3\, c6$

$- 2a^{1}6 + 2a^{5}4 = b2\, c8 + b3\, c7$

$- a^{5}4 + a^{3}5 + 3a^{1}6 = \beta 2\, c9 + \beta 3\, c8$

$a^{4}5 - a^{2}6 + 3a^{6}4 = b2\, c9 + b3\, c8$

$- 2a^{6}4 + 2a^{2}6 = \beta 2\, c10 + \beta 3\, c9$

$a^{1}8 + 3a^{3}7 = 0$.

Au moyen de ces équations, & des deux cens dix

de la formule, on aura

$a^{1}1$ $a^{2}1$ $a^{3}1$ $a^{4}1$ $a^{5}1$ $a^{6}1$ $a^{7}1$ $a^{8}1$ $a^{9}1$,
$a^{1}2$ $a^{2}2$ $a^{3}2$ $a^{4}2$ $a^{5}2$ $a^{6}2$ $a^{7}2$ $a^{8}2$,
$a^{1}3$ $a^{2}3$ $a^{3}3$ $a^{4}3$ $a^{5}3$ $a^{6}3$ $a^{7}3$,
$a^{1}4$ $a^{2}4$ $a^{3}4$ $a^{4}4$ $a^{5}4$ $a^{6}4$,
$a^{1}5$ $a^{2}5$ $a^{3}5$ $a^{4}5$ $a^{5}5$,
$a^{1}6$ $a^{2}6$ $a^{3}6$ $a^{4}6$,
$a^{1}7$ $a^{2}7$ $a^{3}7$,
$a^{1}8$ $a^{2}8$,
$a^{1}9$;

on aura de plus les conditions auxquelles devront satisfaire les coëfficiens $c1$, $c2$, $c3$, $c4$, $c5$, $c6$, $c7$, $c8$, $c9$, $c10$, qui serviront à les déterminer, pourvû que les nombres donnés $b1$, $b2$, $b3$, $\beta1$, $\beta2$, $\beta3$, soient tels qu'il faut pour que l'équation $\dot{x} + \frac{(b1p + b2x + b3y)(c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3)}{(\beta1p + \beta2x + \beta3y)(c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3)}\dot{y} = 0$, appartienne à la troisième formule; ensuite l'on déterminera les coëfficiens $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, $a5$, $a6$, $a7$, $a8$, $a9$, $a10$, $\alpha1$, $\alpha2$, $\alpha3$, $\alpha4$, $\alpha5$, $\alpha6$, $\alpha7$, $\alpha8$, $\alpha9$, $\alpha10$, de l'intégrale: l'on trouvera, par exemple, que cette équation-ci $\dot{x} + \frac{11p - 43x - 15y}{3\cdot(3p - 7x + 29y)}\dot{y} = 0$, appartient à la troisième formule, & l'on déterminera son intégrale par cette formule.

2.° Pour pouvoir rapporter la seconde équation différencielle à la troisième formule, il faut la mettre sous cette forme-ci, $\dot{x} + \frac{(b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy + b6y^2)(c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3)}{(\beta1p^2 + \beta2px + \beta3py + \beta4x^2 + \beta5xy + \beta6y^2)(c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3)}\dot{y} = 0$, ou bien sous celle-ci,

$b1\, c1\, p^5 +$

$$\dot{x} + \frac{\begin{array}{lllllll} b1c1p^5 & +\,b1c2p^4x & +\,b1c3p^4y & +\,b1c4p^3x^2 & +\,b1c5p^3xy & +\,b1c6p^3y^2 & + \\ & +\,b2c1 & +\,b3c1 & +\,b2c2 & +\,b2c3 & +\,b3c3 & + \\ & & & +\,b4c1 & +\,b3c2 & +\,b6c1 & + \\ & & & & +\,b5c1 & & \end{array}}{\begin{array}{lllllll} \beta1c1p^5 & +\,\beta1c2p^4x & +\,\beta1c3p^4y & +\,\beta1c4p^3x^2 & +\,\beta1c5p^3xy & +\,\beta1c6p^3y^2 & + \\ & +\,\beta2c1 & +\,\beta3c1 & +\,\beta2c2 & +\,\beta2c3 & +\,\beta3c3 & + \\ & & & +\,\beta4c1 & +\,\beta3c2 & +\,\beta6c1 & + \\ & & & & +\,\beta5c1 & & \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{lllllll} b1c7p^2x^3 & +\,b1c8p^2x^2y & +\,b1c9p^2xy^2 & +\,b1c10p^2y^3 & +\,b2c7px^4 & +\,b2c8px^3y & + \\ b2c4 & +\,b2c5 & +\,b2c6 & +\,b3c6 & +\,b4c4 & +\,b3c7 & + \\ b4c2 & +\,b3c4 & +\,b3c5 & +\,b6c3 & & +\,b4c5 & + \\ & +\,b4c3 & +\,b5c3 & & & +\,b5c4 & + \\ & +\,b5c2 & +\,b6c2 & & & & + \end{array}}{\begin{array}{lllllll} \beta1c7p^2x^3 & +\,\beta1c8p^2x^2y & +\,\beta1c9p^2xy^2 & +\,\beta1c10p^2y^3 & +\,\beta2c7px^4 & +\,\beta2c8px^3y & + \\ \beta2c4 & +\,\beta2c5 & +\,\beta2c6 & +\,\beta3c6 & +\,\beta4c4 & +\,\beta3c7 & + \\ \beta4c2 & +\,\beta3c4 & +\,\beta3c5 & +\,\beta6c3 & & +\,\beta4c5 & + \\ & +\,\beta4c3 & +\,\beta5c3 & & & +\,\beta5c4 & + \\ & +\,\beta5c2 & +\,\beta6c2 & & & & + \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{lllllll} b2c9px^2y^2 & +\,b2c10pxy^3 & +\,b3c10py^4 & +\,b4c7x^5 & +\,b4c8x^4y & +\,b4c9x^3y^2 & + \\ b3c8 & +\,b3c9 & +\,b6c6 & & +\,b5c7 & +\,b5c8 & + \\ b4c6 & +\,b5c6 & & & & +\,b6c7 & + \\ b5c5 & +\,b6c5 & & & & & \\ b6c4 & & & & & & \end{array}}{\begin{array}{lllllll} \beta2c9px^2y^2 & +\,\beta2c10pxy^3 & +\,\beta3c10py^4 & +\,\beta4c7x^5 & +\,\beta4c8x^4y & +\,\beta4c9x^3y^2 & + \\ \beta3c8 & +\,\beta3c9 & +\,\beta6c6 & & +\,\beta5c7 & +\,\beta5c8 & + \\ \beta4c6 & +\,\beta5c6 & & & & +\,\beta6c7 & + \\ \beta5c5 & +\,\beta6c5 & & & & & \\ \beta6c4 & & & & & & \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{lll} b4c10x^2y^3 & +\,b5c10xy^4 & +\,b6c10y^5 \\ b5c9 & +\,b6c9 & \\ b6c8 & & \end{array}}{\begin{array}{lll} \beta4c10x^2y^3 & +\,\beta5c10xy^4 & +\,\beta6c10y^5 \\ \beta5c9 & +\,\beta6c9 & \\ \beta6c8 & & \end{array}}\,\dot{y} = 0,$$ on aura

$b6c10 = 0$, $\beta4c7 = 0$, $b4c7 + \beta4c8 + \beta5c7 = 0$, $b4c8 + b5c7 + \beta4c9 + \beta6c7 = 0$, $b4c9 + b5c8 + b6c7 + \beta4c10 + \beta5c9 + \beta6c8 = 0$, $b4c10 + b5c9 + b6c8 + \beta5c10 + \beta6c9 = 0$, $b5c10 + b6c9 + \beta6c10 = 0$; de ce que $\beta4c7 = 0$, $b6c10 = 0$, je conclus que $b6 = 0$, $\beta4 = 0$, ou que $b6 = 0$, $c7 = 0$, ou que $c10 = 0$, $\beta4 = 0$, ou enfin que $c10 = 0$, $c7 = 0$.

Soit $b6 = 0$, $\beta4 = 0$, on aura $\beta6 = -b5$, $\beta5 = -b4$, par conséquent l'équation qu'il faudra

rapporter à la troiſième formule, ſera

$$\dot{x} + \frac{(b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy)\,(c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3)}{(\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3py - b4xy - b5y^2)\,(c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3)}\,\dot{y} = 0.$$

Soit $b6 = 0$, $c7 = 0$, on aura $\beta 6 = - b5$, $\beta 5 = - b4$, $c10 = 0$, ce qui revient au dernier cas.

Soit $c10 = 0$, $\beta 4 = 0$, on aura $c9 = 0$, $c8 = 0$, $c7 = 0$, ce qui revient encore au dernier cas.

Enfin ſoit $c10 = 0$, $c7 = 0$, on aura $c9 = 0$, $c8 = 0$; par conſéquent l'équation qu'il faudra rapporter à la troiſième formule ſera

$$\dot{x} + \frac{(b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy + b6y^2)\,(c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2)}{(\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3py + \beta 4x^2 + \beta 5xy + \beta 6y^2)\,(c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2)}\,\dot{y} = 0.$$

3.° Pour pouvoir rapporter la troiſième équation différencielle à la troiſième formule, il faut la mettre ſous cette forme-ci,

$$\dot{x} + \frac{(b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2 + b10y^3)\,(c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2)}{(\beta 1p^3 + \beta 2p^2x + \beta 3p^2y + \beta 4px^2 + \beta 5pxy + \beta 6py^2 + \beta 7x^3 + \beta 8x^2y + \beta 9xy^2 + \beta 10y^3)\,(c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2)}\,\dot{y} = 0,$$

on aura $c6\,b10 = 0$, $c4\beta 7 = 0$, $c4b7 + c4\beta 8 + c5\beta 7 = 0$, $c4b8 + c5b7 + c4\beta 9 + c5\beta 8 + c6\beta 7 = 0$, $c4b9 + c5b8 + c6b7 + c4\beta 10 + c5\beta 9 + c6\beta 8 = 0$, $c4b10 + c5b9 + c6b8 + c5\beta 10 + c6\beta 9 = 0$, $c5b10 + c6b9 + c6\beta 10 = 0$. De ce que $c6b10 = 0$, $c4\beta 7 = 0$, je conclus que $c6 = 0$, $c4 = 0$, ou que $c6 = 0$, $\beta 7 = 0$, ou que $b10 = 0$, $c4 = 0$, ou enfin que $b10 = 0$, $\beta 7 = 0$.

Soit $c_6 = 0$, $c_4 = 0$, on aura $c_5 = 0$, & l'équation qu'il faudra rapporter à la troisième formule sera

$$\dot{x} + \frac{(b_1 p^3 + b_2 p^2 x + b_3 p^2 y + b_4 p x^2 + b_5 p x y + b_6 p y^2 + b_7 x^3 + b_8 x^2 y + b_9 x y^2 + b_{10} y^3)\,(c_1 p^2 + c_2 p x + c_3 p y)}{(\beta_1 p^3 + \beta_2 p^2 x + \beta_3 p^2 y + \beta_4 p x^2 + \beta_5 p x y + \beta_6 p y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y + \beta_9 x y^2 + \beta_{10} y^3)\,(c_1 p^2 + c_2 p x + c_3 p y)}\,\dot{y} = 0.$$

Le second & le troisième cas se réduisent au premier.

Soit $b_{10} = 0$, $\beta_7 = 0$, on aura $\beta_8 = -b_7$, $\beta_9 = -b_8$, $\beta_{10} = -b_9$, & l'équation qu'il faudra rapporter à la troisième formule, sera

$$\dot{x} + \frac{(b_1 p^3 + b_2 p^2 x + b_3 p^2 y + b_4 p x^2 + b_5 p x y + b_6 p y^2 + b_7 x^3 + b_8 x^2 y + b_9 x y^2)}{(\beta_1 p^3 + \beta_2 p^2 x + \beta_3 p^2 y + \beta_4 p x^2 + \beta_5 p x y + \beta_6 p y^2 - b_7 x^2 y - b_8 x y^2 - b_9 y^3)}\,\frac{(c_1 p^2 + c_2 p x + c_3 p y + c_4 x^2 + c_5 x y + c_6 y^2)}{(c_1 p^2 + c_2 p x + c_3 p y + c_4 x^2 + c_5 x y + c_6 y^2)}\,\dot{y} = 0.$$

4.° Pour pouvoir rapporter la quatrième équation differencielle à la troisième formule, il faut la mettre sous cette forme-ci;

$$\ddot{x} + \frac{(b_1 p^4 + b_2 p^3 x + b_3 p^3 y + b_4 p^2 x^2 + b_5 p^2 x y + b_6 p^2 y^2 + b_7 p x^3 + b_8 p x^2 y + b_9 p x y^2 + b_{10} p y^3 + b_{11} x^4 + b_{12} x^3 y + b_{13} x^2 y^2 + b_{14} x y^3 + b_{15} y^4)\,(c_1 p + c_2 x + c_3 y)}{(\beta_1 p^4 + \beta_2 p^3 x + \beta_3 p^3 y + \beta_4 p^2 x^2 + \beta_5 p^2 x y + \beta_6 p^2 y^2 + \beta_7 p x^3 + \beta_8 p x^2 y + \beta_9 p x y^2 + \beta_{10} p y^3 + \beta_{11} x^4 + \beta_{12} x^3 y + \beta_{13} x^2 y^2 + \beta_{14} x y^3 + \beta_{15} y^4)\,(c_1 p + c_2 x + c_3 y)}\,\dot{y} = 0;$$

on aura $c_3 b_{15} = 0$, $c_2 \beta_{11} = 0$,

$$c_2 b_{11} + c_2 \beta_{12} + c_3 \beta_{11} = 0,$$
$$c_2 b_{12} + c_3 b_{11} + c_2 \beta_{13} + c_3 \beta_{12} = 0,$$
$$c_2 b_{13} + c_3 b_{12} + c_2 \beta_{14} + c_3 \beta_{13} = 0,$$
$$c_2 b_{14} + c_3 b_{13} + c_2 \beta_{15} + c_3 \beta_{14} = 0,$$
$$c_2 b_{15} + c_3 b_{14} + c_3 \beta_{15} = 0.$$

De ce que $c_3 b_{15} = 0$, $c_2 \beta_{11} = 0$, je conclus que $c_3 = 0$, $c_2 = 0$, ou que $c_3 = 0$, $\beta_{11} = 0$, ou que $b_{15} = 0$, $c_2 = 0$, ou enfin que $b_{15} = 0$, $\beta_{11} = 0$.

Soit $c_3 = 0$, $c_2 = 0$ & $c_1 = 1$, & l'équation qu'il

faudra rapporter à la troisième formule, sera

$$\dot{x} + \frac{(b1p^4 + b2p^3x + b3p^3y + b4p^2x^2 + b5p^2xy + b6p^2y^2 + b7px^3 + b8px^2y + b9pxy^2 + b10py^3 + b11x^4 + b12x^3y + b13x^2y^2 + b14xy^3 + b15y^4)p}{(\beta1p^4 + \beta2p^3x + \beta3p^3y + \beta4p^2x^2 + \beta5p^2xy + \beta6p^2y^2 + \beta7px^3 + \beta8px^2y + \beta9pxy^2 + \beta10py^3 + \beta11x^4 + \beta12x^3y + \beta13x^2y^2 + \beta14xy^3 + \beta15y^4)p}\,\dot{y} = 0.$$

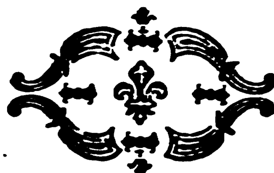
Le second & le troisième cas se réduisent au premier.

Soit $b15 = 0$, $\beta11 = 0$, on aura $\beta15 = -b14$, $\beta14 = -b13$, $\beta13 = -b12$, $\beta12 = -b11$, & l'équation qu'il faudra rapporter à la troisième formule, sera

$$\dot{x} + \frac{(b1p^4 + b2p^3x + b3p^3y + b4p^2x^2 + b5p^2xy + b6p^2y^2 + b7px^3 + b8px^2y + b9pxy^2 + b10py^3 + b11x^4 + b12x^3y + b13x^2y^2 + b14xy^3)(c1p + c2x + c3y)}{(\beta1p^4 + \beta2p^3x + \beta3p^3y + \beta4p^2x^2 + \beta5p^2xy + \beta6p^2y^2 + \beta7px^3 + \beta8px^2y + \beta9pxy^2 + \beta10py^3 - b11x^3y - b12x^2y^2 - b13xy^3 - b14y^5)(c1p + c2x + c3y)}\,\dot{y} = 0.$$

5.° Pour que la cinquième équation différencielle puisse appartenir à la troisième formule, & que par conséquent son intégrale puisse être $n = \frac{a1p^3 +}{\alpha1p^3 +}$, il faut qu'elle soit représentée généralement par celle-ci,

$$\dot{x} + \frac{b1p^5 + b2p^4x + b3p^4y + b4p^3x^2 + b5p^3xy + b6p^3y^2 + b7p^2x^3 + b8p^2x^2y + b9p^2xy^2 + b10p^2y^3 + b11px^4 + b12px^3y + b13px^2y^2 + b14pxy^3 + b15py^4 + b16x^5 + b17x^4y + b18x^3y^2 + b19x^2y^3 + b20xy^4}{\beta1p^5 + \beta2p^4x + \beta3p^4y + \beta4p^3x^2 + \beta5p^3xy + \beta6p^3y^2 + \beta7p^2x^3 + \beta8p^2x^2y + \beta9p^2xy^2 + \beta10p^2y^3 + \beta11px^4 + \beta12px^3y + \beta13px^2y^2 + \beta14pxy^3 + \beta15py^4 - b16x^4y - b17x^3y^2 - b18x^2y^3 - b19xy^4 - b20y^5}\,\dot{y} = 0.$$



CONCLUSION.

I. S'IL s'agit de la première équation différencielle, elle sera $\dot{x} + \frac{b1p + b2x}{\beta 1p - b2y}\dot{y} = 0$; ou $\dot{x} + \frac{b1p + b2x + b3y}{\beta 1p + \beta 2x + \beta 3y}\dot{y} = 0$; dans le premier cas, elle appartiendra à la première formule; dans le second, je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py$, & je la compare avec la seconde formule: si elle n'est pas intégrable par la seconde formule, je la multiplie par $c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3$, & je la compare avec la troisième formule: si elle n'est pas intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c1p^6 + c2p^5x + c3p^5y + c4p^4x^2 + c5p^4xy + c6p^4y^2 + c7p^3x^3 + c8p^3x^2y + c9p^3xy^2 + c10p^3y^3 + c11p^2x^4 + c12p^2x^3y + c13p^2x^2y^2 + c14p^2xy^3 + c15p^2y^4 + c16px^5 + c17px^4y + c18px^3y^2 + c19px^2y^3 + c20pxy^4 + c21py^5$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite. Nous avons trouvé qu'elle appartiendra sûrement à la seconde formule, lorsque $(2\beta 3 + b2).(2b2 + \beta 3) - 9b3\beta 2 = 0$.

II. S'il s'agit de la seconde équation différencielle, elle sera $\dot{x} + \frac{b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy}{\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3py - b4xy - b5y^2}\dot{y} = 0$, ou $\dot{x} + \frac{b1p^2 + b2px + b3py + b4x^2 + b5xy + b6y^2}{\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3py + \beta 4x^2 + \beta 5xy + \beta 6y^2}\dot{y} = 0$. Dans le premier cas je la multiplie par $c1p + c2x + c3y$, & je la compare avec la seconde formule: si elle n'est pas intégrable par la seconde formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3$, & je la compare avec la troisième formule: si elle n'est pas

intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c1p^5 + c2p^4x + c3p^4y + c4p^3x^2 + c5p^3xy + c6p^3y^2 + c7p^2x^3 + c8p^2x^2y + c9p^2xy^2 + c10p^2y^3 + c11px^4 + c12px^3y + c13px^2y^2 + c14pxy^3 + c15py^4 + c16x^5 + c17x^4y + c18x^3y^2 + c19x^2y^3 + c20xy^4 + c21y^5$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite. Dans le second cas, je la multiplie par p, & je la compare avec la seconde formule: si elle n'est pas intégrable par la seconde formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2$, & je la compare avec la troisième formule: si elle n'est pas intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c1p^5 + c2p^4x + c3p^4y + c4p^3x^2 + c5p^3xy + c6p^3y^2 + c7p^2x^3 + c8p^2x^2y + c9p^2xy^2 + c10p^2y^3 + c11px^4 + c12px^3y + c13px^2y^2 + c14pxy^3 + c15py^4$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite.

III. S'il s'agit de la troisième équation différencielle, elle sera

$$\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2}{\mathfrak{C}1p^3 + \mathfrak{C}2p^2x + \mathfrak{C}3p^2y + \mathfrak{C}4px^2 + \mathfrak{C}5pxy + \mathfrak{C}6py^2 - b7x^2y - b8xy^2 - b9y^3}\,\dot{y} = 0,$$

ou

$$\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2 + b10y^3}{\mathfrak{C}1p^3 + \mathfrak{C}2p^2x + \mathfrak{C}3p^2y + \mathfrak{C}4px^2 + \mathfrak{C}5pxy + \mathfrak{C}6py^2 + \mathfrak{C}7x^3 + \mathfrak{C}8x^2y + \mathfrak{C}9xy^2 + \mathfrak{C}10y^3}\,\dot{y} = 0.$$

Dans le premier cas je la compare avec la seconde formule: si elle n'est pas intégrable par la seconde formule, je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2$, & je la compare avec la troisième formule: si elle n'est pas intégrable par la troisième formule, je la multiplie par $c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3 + c11x^4 + c12x^3y + c13x^2y^2 + c14xy^3 + c15y^4$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite.

Dans le ſecond cas je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py$, & je la compare avec la troiſième formule : ſi elle n'eſt pas intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite.

IV. S'il s'agit de la quatrième équation différencielle, elle ſera

$$\dot{x} + \frac{b1p^4 + b2p^3x + b3p^3y + b4p^2x^2 + b5p^2xy + b6p^2y^2 +}{\beta1p^4 + \beta2p^3x + \beta3p^3y + \beta4p^2x^2 + \beta5p^2xy + \beta6p^2y^2 +}$$

$$\frac{b7px^3 + b8px^2y + b9pxy^2 + b10py^3 + b11x^4 + b12x^3y + b13x^2y^2 +}{\beta7px^3 + \beta8px^2y + \beta9pxy^2 + \beta10py^3 - b11x^3y - b12x^2y^2 - b13xy^3 -}$$

$$\frac{b14xy^3}{b14y^4}\,\dot{y} = 0,$$ ou $$\dot{x} + \frac{b1p^4 + b2p^3x + b3p^3y + b4p^2x^2 +}{\beta1p^4 + \beta2p^3x + \beta3p^3y + \beta4p^2x^2 +}$$

$$\frac{b5p^2xy + b6p^2y^2 + b7px^3 + b8px^2y + b9pxy^2 + b10py^3 + b11x^4 +}{\beta5p^2xy + \beta6p^2y^2 + \beta7px^3 + \beta8px^2y + \beta9pxy^2 + \beta10py^3 + \beta11x^4 +}$$

$$\frac{b12x^3y + b13p^2y^2 + b14xy^3 + b15y^4}{\beta12x^3y + \beta13p^2y^2 + \beta14xy^3 + \beta15y^4}\,\dot{y} = 0.$$

Dans le premier cas je la multiplie par $c1p + c2x + c3y$, & je la compare avec la troiſième formule ; ſi elle n'eſt pas intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite. Dans le ſecond cas, je la multiplie par p, & je la compare avec la troiſième formule; ſi elle n'eſt pas intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite.

V. S'il s'agit de la cinquième équation, elle ſera

$$\dot{x} + \frac{b1p^5 + b2p^4x + b3p^4y + b4p^3x^2 + b5p^3xy + b6p^3y^2 +}{\beta1p^5 + \beta2p^4x + \beta3p^4y + \beta4p^3x^2 + \beta5p^3xy + \beta6p^3y^2 +}$$

$$\frac{b7p^2x^3 + b8p^2x^2y + b9p^2xy^2 + b10p^2y^3 + b11px^4 + b12px^3y +}{\beta7p^2x^3 + \beta8p^2x^2y + \beta9p^2xy^2 + \beta10p^2y^3 + \beta11px^4 + \beta12px^3y +}$$

$$\frac{b13px^2y^2 + b14pxy^3 + b15py^4 + b16x^5 + b17x^4y + b18x^3y^2 +}{\beta13px^2y^2 + \beta14pxy^3 + \beta15py^4 - b16x^4y - b17x^3y^2 - b18x^2y^3 -}$$

$$\frac{b19x^2y^3 + b20xy^4}{b19xy^4 - b20y^5}\,\dot{y} = 0, \text{ ou } \dot{x} + \frac{b1p^5 + b2p^4x + b3p^4y +}{\beta1p^5 + \beta2p^4x + \beta3p^4y +}$$

$$\frac{b4p^3x^2 + b5p^3xy + b6p^3y^2 + b7p^2x^3 + b8p^2x^2y + b9p^2xy^2 +}{\beta4p^3x^2 + \beta5p^3xy + \beta6p^3y^2 + \beta7p^2x^3 + \beta8p^2x^2y + \beta9p^2xy^2 +}$$

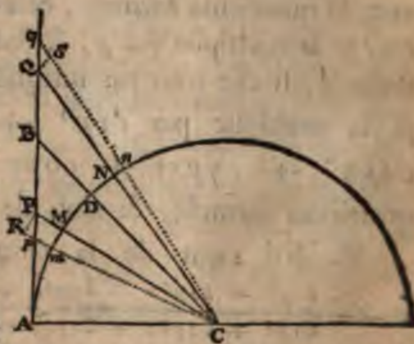
$$\frac{b10p^2y^3 + b11px^4 + b12px^3y + b13px^2y^2 + b14pxy^3 + b15py^4 +}{\beta10p^2y^3 + \beta11px^4 + \beta12px^3y + \beta13px^2y^2 + \beta14pxy^3 + \beta15py^4 +}$$

$$\frac{b16x^5 + b17x^4y + b18x^3y^2 + b19x^2y^3 + b20xy^4 + b21y^5}{\beta16x^5 + \beta17x^4y + \beta18x^3y^2 + \beta19x^2y^3 + \beta20xy^4 + \beta21y^5}\,\dot{y} = 0.$$

Dans le premier cas, je la compare avec la troiſième formule : ſi elle n'eſt pas intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite. Dans le ſecond cas, je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py$, & je la compare avec la quatrième formule ; ſi elle n'eſt pas intégrable par la quatrième formule, je la mnltiplie par $c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3$, & je la compare avec la cinquième formule, & ainſi de ſuite.

EXEMPLE.

AmMDNn eſt un cercle décrit du centre *C* & du rayon *CA*, & *AB* eſt une tangente de ce cercle au point *A*.



Les élémens *CmM* ſont plus grands que les élémens correſpondans *mpPM*, en partant de *A* & en allant vers *D*, & enſuite ils deviennent moindres ; le point où ils ceſſent d'être plus grands & où ils commencent à être moindres, eſt lorſque $AB = AC$. Concevez que pendant

que

que la fécante CP tourne autour de C, & trace l'efpace BCP, la fécante CQ tourne auffi autour de C, & trace l'efpace BCQ, de manière que $DCM - DBPM$ foit toûjours $= BDNQ - DCN$, on aura $PMDB + BDNQ = MCD + DCN$, & par conféquent l'efpace PCQ fera partagé en deux également par l'arc MN; on aura donc $CMN = \frac{1}{2}PCQ$ ou $\frac{1}{2}CA \cdot MN = \frac{1}{4}CA \cdot PQ$; donc $MN = \frac{1}{2}PQ$.

Soit $AC = AB = p$, $BP = x$, $BQ = y$; donc $AP = p - x$, $AQ = p + y$, $CP = \sqrt{[p^2 + (p-x)^2]}$, $CQ = \sqrt{[p^2 + (p+y)^2]}$. Soit $Pp = \dot{x}$, $Qq = \dot{y}$, on aura

$$pR = \frac{-(p-x)\dot{x}}{\sqrt{[p^2 + (p-x)^2]}}, \quad qS = \frac{(p+y)\dot{y}}{\sqrt{[p^2 + (p+y)^2]}},$$

$$PR = \frac{p\dot{x}}{\sqrt{[p^2 + (p-x)^2]}}; \quad QS = \frac{p\dot{y}}{\sqrt{[p^2 + (p+y)^2]}} \text{ \&}$$

$$\sqrt{[p^2 + (p-x)^2]} : \frac{p\dot{x}}{\sqrt{[p^2 + (p-x)^2]}} :: p : Mm = \frac{p^2\dot{x}}{p^2 + (p-x)^2};$$

$$\sqrt{[p^2 + (p+y)^2]} : \frac{p\dot{y}}{\sqrt{[p^2 + (p+y)^2]}} :: p : Nn = \frac{p^2\dot{y}}{p^2 + (p+y)^2};$$

donc $CMm = \frac{1}{2}p \cdot \frac{p^2\dot{x}}{p^2 + (p-x)^2}$, $CNn = \frac{1}{2}p \cdot \frac{p^2\dot{y}}{p^2 + (p+y)^2}$, $CPp = \frac{1}{2}p\dot{x}$, $CQq = \frac{1}{2}p\dot{y}$, $MmpP = \frac{1}{2}p\dot{x} - \frac{\frac{1}{2}p^3\dot{x}}{p^2 + (p-x)^2}$, $NnqQ = \frac{1}{2}p\dot{y} - \frac{\frac{1}{2}p^3\dot{y}}{p^2 + (p+y)^2}$; & en rempliffant la condition du problème, on aura

$$\frac{p^3\dot{x}}{p^2 + (p-x)^2} - \frac{1}{2}p\dot{x} = \frac{1}{2}p\dot{y} - \frac{p^3\dot{y}}{p^2 + (p+y)^2} \text{ ou}$$

$$\dot{x} + \frac{-4p^3y + 4p^2xy - 2p^2y^2 - 2px^2y + 2pxy^2 - x^2y^2}{4p^3x - 2p^2x^2 + 4p^2xy - 2px^2y + 2pxy^2 - x^2y^2}\dot{y} = 0.$$

Il s'agit d'intégrer cette équation, & lorfqu'on l'aura intégrée, de remplir la condition, que x & y foient $= 0$ en même temps. Pour l'intégrer, je la multiplie par p, & je la compare avec la troifième formule; fi elle n'eft pas

R

intégrable par cette formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainsi de suite.

AVERTISSEMENT.

J'ÉTOIS embarrassé au commencement lorsque je voulois me faire des exemples de cette méthode-ci, du succès desquels je fusse assuré.

Il s'agissoit de trouver des cas de cette formule-ci, $\dot{x} + \frac{A1p + A2x + A3y}{B1p + B2x + B3y}\dot{y} = 0$, dont l'intégrale fût du second degré; d'autres, dont l'intégrale fût du troisième degré; d'autres, dont l'intégrale fût du quatrième degré, &c.

Il s'agissoit de trouver des cas de cette formule-ci, $\dot{x} + \frac{A1p^2 + A2px + A3py + A4x^2 + A5xy}{B1p^2 + B2px + B3py - A4xy - A5y^2}\dot{y} = 0$, dont l'intégrale fût du second degré; d'autres dont l'intégrale fût du troisième degré; d'autres dont l'intégrale fût du quatrième degré, &c.

Il s'agissoit de trouver des cas de cette formule-ci, $\dot{x} + \frac{A1p^2 + A2px + A3py + A4x^2 + A5xy + A6y^2}{B1p^2 + B2px + B3py + B4x^2 + B5xy + B6y^2}\dot{y} = 0$, dont l'intégrale fût du second degré, d'autres dont l'intégrale fût du troisième degré, d'autres dont l'intégrale fût du quatrième degré, &c.

Il s'agissoit de trouver des cas de cette formule-ci, $\dot{x} + \frac{A1p^3 + A2p^2x + A3p^2y + A4px^2 + A5pxy + A6py^2 + A7x^3 + A8x^2y + A9xy^2}{B1p^3 + B2p^2x + B2p^3y + B4px^2 + B5pxy + B6py^2 - A7x^2y - A8xy^2 - A9y^3}\dot{y} = 0$, dont l'intégrale fût du troisième degré (car il étoit bien aisé d'en trouver dont l'intégrale fût du second degré) d'autres dont l'intégrale fût du quatrième degré, d'autres dont l'intégrale fût du cinquième degré, &c.

Il s'agiſſoit de trouver des cas de cette formule-ci, $\dot{x} + \frac{A1p^3 + A2p^2x + A3p^2y + A4px^2 + A5pxy + A6py^2 + A7x^3 + A8x^2y + A9xy^2 + A10y^3}{B1p^3 + B2p^2x + B3p^2y + B4px^2 + B5pxy + B6py^2 + B7x^3 + B8x^2y + B9xy^2 + B10y^3}\,\dot{y} = 0$, dont l'intégrale fût du troiſième degré, d'autres dont l'intégrale fût du quatrième degré, d'autres dont l'intégrale fût du cinquième degré, &c.

Si on m'avoit donné ces cas, il m'auroit été bien aiſé de les intégrer, mais la difficulté étoit de les propoſer: voici comment enſuite j'ai réſolu ce problème.

Dans les Tables ſuivantes, je mets pour abréger $a1p +$ au lieu de $a1p + a2x + a3y$, $b1p +$ au lieu de $b1p + b2x + b3y$, &c. $\alpha 1p +$ au lieu de $\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y$, $\beta 1p +$ au lieu de $\beta 1p + \beta 2x + \beta 3y$, &c.

Je mets $a1p^2 +$ au lieu de $a1p^2 + a2px + a3py + a4x^2 + a5xy + a6y^2$, &c.

Je mets $a1p^3 +$ au lieu de $a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4px^2 + a5pxy + a6py^2 + a7x^3 + a8x^2y + a9xy^2 + a10y^3$, &c.

TABLE I.

Qui contient par ordre tous les numérateurs poſſibles de l'intégrale d'une équation différencielle ſans radicaux.

1.ᵈ $a1p +$, p.

2ᵈ $a1p^2 +$, $(a1p +)^2$.

3ᵈ $a1p^3 +$, $(a1p +)^3$, $(a1p +)^2\,(b1p +)$.

4ᵈ $a1p^4 +$, $(a1p^2 +)^2$, $(a1p^2 +)\,(b1p +)^2$, $(a1p +)^4$, $(a1p +)^3\,(b1p +)$.

5ᵈ $a1p^5 +$, $(a1p^3 +)\,(b1p +)^2$, $(a1p^2 +)^2(b1p +)$, $(a1p^2 +)\,(b1p +)^3$, $(a1p +)^5$, $(a1p +)^4\,(b1p +)$, $(a1p +)^3\,(b1p +)^2$.

6^d^ $a1p^6+$, $(a1p^4+)(b1p+)^2$, $(a1p^3+)^2$, $(a1p^3+)(b1p+)^3$, $(a1p^2+)^3$, $(a1p^2+)^2(b1p^2+)$, $(a1p^2+)(b1p+)^4$, $(a1p+)^6$, $(a1p+)^5(b1p+)$, $(a1p+)^4(b1p+)^2$, $(a1p+)^3(b1p+)^2(c1p+)$.

7^d^ $a1p^7+$, $(a1p^5+)(b1p+)^2$, $(a1p^4+)(b1p+)^3$, $(a1p^3+)^2(b1p+)$, $(a1p^3+)(b1p^2+)^2$, $(a1p^3+)(b1p+)^4$, $(a1p^2+)^3(b1p+)$, $(a1p^2+)^2(b1p+)^3$, $(a1p^2+)(b1p+)^5$, $(a1p^2+)(b1p+)^3(c1p+)^2$, $(a1p+)^7$, $(a1p+)^6(b1p+)$, $(a1p+)^5(b1p+)^2$, $(a1p+)^4(b1p+)^3$, $(a1p+)^4(b1p+)^2(c1p+)$.

8^d^ $a1p^8+$, $(a1p^6+)(b1p+)^2$, $(a1p^5+)(b1p+)^3$, $(a1p^4+)^2$, $(a1p^4+)(b1p^2+)^2$, $(a1p^4+)(b1p+)^4$, $(a1p^3+)^2(b1p^2+)$, $(a1p^3+)(b1p+)^5$, $(a1p^3+)(b1p+)^3(c1p+)^2$, $(a1p^2+)^4$, $(a1p^2+)^3(b1p^2+)$, $(a1p^2+)^3(b1p+)^2$, $(a1p^2+)^2(b1p+)^4$, $(a1p^2+)^2(b1p+)^3(c1p+)$, $(a1p^2+)(b1p+)^6$, $(a1p^2+)(b1p+)^4(c1p+)^2$, $(a1p+)^8$, $(a1p+)^7(b1p+)$, $(a1p+)^6(b1p+)^2$, $(a1p+)^5(b1p+)^3$, $(a1p+)^5(b1p+)^2(c1p+)$, $(a1p+)^4(b1p+)^3(c1p+)$.

9^d^ $a1p^9+$, $(a1p^7+)(b1p+)^2$ $(a1p^6+)(b1p+)^3$, $(a1p^5+)(b1p^2+)^2$, $(a1p^5+)(b1p+)^4$, $(a1p^4+)^2(b1p+)$, $(a1p^4+)(b1p+)^5$, $(a1p^4+)(b1p+)^3(c1p+)^2$, $(a1p^3+)^3$, $(a1p^3+)^2(b1p^3+)$, $(a1p^3+)^2$

$(b1p +)^3$, $(a1p^3 +)\,(b1p^2 +)^3$, $(a1p^3 +)$
$(b1p +)^6$, $(a1p^3 +)\,(b1p +)^4\,(c1p +)^2$,
$(a1p^2 +)^4\,(b1p +)$, $(a1p^2 +)^3\,(b1p +)^2$
$(c1p +)$, $(a1p^2 +)^2\,(b1p^2 +)\,(c1p +)^3$,
$(a1p^2 +)^2\,(b1p +)^5$, $(a1p^2 +)^2\,(b1p +)^4$
$(c1p +)$, $(a1p^2 +)\,(b1p +)^7$, $(a1p^2 +)$
$(b1p +)^5\,(c1p +)^2$, $(a1p^2 +)\,(b1p +)^4$
$(c1p +)^3$, $(a1p +)^9$, $(a1p +)^8\,(b1p +)$,
$(a1p +)^7\,(b1p +)^2$, $(a1p +)^6\,(b1p +)^3$,
$(a1p +)^6\,(b1p +)^2\,(c1p +)$, $(a1p +)^5$
$(b1p +)^4$, $(a1p +)^5\,(b1p +)^3\,(c1p +)$,
$(a1p +)^4\,(b1p +)^3\,(c1p +)^2$.

10^d $a1p^{10} +$, $(a1p^8 +)\,(b1p +)^2$, $(a1p^7 +)$
$(b1p +)^3$, $(a1p^6 +)\,(b1p^2 +)^2$, $(a1p^6 +)$
$(b1p +)^4$, $(a1p^5 +)^2$, $(a1p^5 +)\,(b1p +)^5$,
$(a1p^5 +)\,(b1p +)^3\,(c1p +)^2$, $(a1p^4 +)^2$
$(b1p^2 +)$, $(a1p^4 +)\,(b1p^3 +)^2$, $(a1p^4 +)$
$(b1p^2 +)^3$, $(a1p^4 +)\,(b1p +)^6$, $(a1p^4 +)$
$(b1p +)^4\,(c1p +)^2$, $(a1p^3 +)^3\,(b1p +)$,
$(a1p^3 +)^2\,(b1p +)^4$, $(a1p^3 +)^2\,(b1p +)^3$
$(c1p +)$, $(a1p^3 +)\,(b1p^2 +)^2\,(c1p +)^3$,
$(a1p^3 +)\,(b1p +)^7$, $(a1p^3 +)\,(b1p +)^5$
$(c1p +)^2$, $(a1p^3 +)\,(b1p +)^4\,(c1p +)^3$,
$(a1p^2 +)^5$, $(a1p^2 +)^4\,(b1p^2 +)$, $(a1p^2 +)^4$
$(b1p +)^2$, $(a1p^2 +)^3\,(b1p^2 +)\,(c1p +)^2$,
$(a1p^2 +)^3\,(b1p +)^4$, $(a1p^2 +)^2\,(b1p^2 +)$
$(c1p +)^4$, $(a1p^2 +)^2\,(b1p +)^6$, $(a1p^2 +)^2$
$(b1p +)^5\,(c1p +)$, $(a1p^2 +)\,(b1p +)^8$,
$(a1p^2 +)\,(b1p +)^6\,(c1p +)^2$, $(a1p^2 +)$
$(b1p +)^5\,(c1p +)^3$, $(a1p +)^{10}$, $(a1p +)^9$

intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^5 + c2p^4x + c3p^4y + c4p^3x^2 + c5p^3xy + c6p^3y^2 + c7p^2x^3 + c8p^2x^2y + c9p^2xy^2 + c10p^2y^3 + c11px^4 + c12px^3y + c13px^2y^2 + c14pxy^3 + c15py^4 + c16x^5 + c17x^4y + c18x^3y^2 + c19x^2y^3 + c20xy^4 + c21y^5$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite. Dans le ſecond cas, je la multiplie par p, & je la compare avec la ſeconde formule: ſi elle n'eſt pas intégrable par la ſeconde formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2$, & je la compare avec la troiſième formule: ſi elle n'eſt pas intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^5 + c2p^4x + c3p^4y + c4p^3x^2 + c5p^3xy + c6p^3y^2 + c7p^2x^3 + c8p^2x^2y + c9p^2xy^2 + c10p^2y^3 + c11px^4 + c12px^3y + c13px^2y^2 + c14pxy^3 + c15py^4$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite.

III. S'il s'agit de la troiſième équation différencielle, elle ſera $\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2}{\epsilon1p^3 + \epsilon2p^2x + \epsilon3p^2y + \epsilon4px^2 + \epsilon5pxy + \epsilon6py^2 - b7x^2y - b8xy^2 - b9y^3}\dot{y} = 0$, ou $\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3p^2y + b4px^2 + b5pxy + b6py^2 + b7x^3 + b8x^2y + b9xy^2 + b10y^3}{\epsilon1p^3 + \epsilon2p^2x + \epsilon3p^2y + \epsilon4px^2 + \epsilon5pxy + \epsilon6py^2 + \epsilon7x^3 + \epsilon8x^2y + \epsilon9xy^2 + \epsilon10y^3}\dot{y} = 0$.
Dans le premier cas je la compare avec la ſeconde formule: ſi elle n'eſt pas intégrable par la ſeconde formule, je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py + c4x^2 + c5xy + c6y^2$, & je la compare avec la troiſième formule: ſi elle n'eſt pas intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3 + c11x^4 + c12x^3y + c13x^2y^2 + c14xy^3 + c15y^4$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite.

Dans le ſecond cas je la multiplie par $c1p^2 + c2px + c3py$, & je la compare avec la troiſième formule : ſi elle n'eſt pas intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^2x^2 + c5p^2xy + c6p^2y^2 + c7px^3 + c8px^2y + c9pxy^2 + c10py^3$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite.

IV. S'il s'agit de la quatrième équation différencielle, elle ſera

$$\dot{x} + \frac{b1p^4 + b2p^3x + b3p^3y + b4p^2x^2 + b5p^2xy + b6p^2y^2 + b7px^3 + b8px^2y + b9pxy^2 + b10py^3 + b11x^4 + b12x^3y + b13x^2y^2 + b14xy^3}{\mathcal{C}1p^4 + \mathcal{C}2p^3x + \mathcal{C}3p^3y + \mathcal{C}4p^2x^2 + \mathcal{C}5p^2xy + \mathcal{C}6p^2y^2 + \mathcal{C}7px^3 + \mathcal{C}8px^2y + \mathcal{C}9pxy^2 + \mathcal{C}10py^3 - b11x^3y - b12x^2y^2 - b13xy^3 - b14y^4}\,\dot{y} = 0,$$

ou

$$\dot{x} + \frac{b1p^4 + b2p^3x + b3p^3y + b4p^2x^2 + b5p^2xy + b6p^2y^2 + b7px^3 + b8px^2y + b9pxy^2 + b10py^3 + b11x^4 + b12x^3y + b13p^2y^2 + b14xy^3 + b15y^4}{\mathcal{C}1p^4 + \mathcal{C}2p^3x + \mathcal{C}3p^3y + \mathcal{C}4p^2x^2 + \mathcal{C}5p^2xy + \mathcal{C}6p^2y^2 + \mathcal{C}7px^3 + \mathcal{C}8px^2y + \mathcal{C}9pxy^2 + \mathcal{C}10py^3 + \mathcal{C}11x^4 + \mathcal{C}12x^3y + \mathcal{C}13p^2y^2 + \mathcal{C}14xy^3 + \mathcal{C}15y^4}\,\dot{y} = 0.$$

Dans le premier cas je la multiplie par $c1p + c2x + c3y$, & je la compare avec la troiſième formule ; ſi elle n'eſt pas intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2 + c7x^3 + c8x^2y + c9xy^2 + c10y^3$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite. Dans le ſecond cas, je la multiplie par p, & je la compare avec la troiſième formule ; ſi elle n'eſt pas intégrable par la troiſième formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3p^2y + c4px^2 + c5pxy + c6py^2$, & je la compare avec la quatrième formule, & ainſi de ſuite.

V. S'il s'agit de la cinquième équation, elle ſera

$$\dot{x} + \frac{b1p^5 + b2p^4x + b3p^4y + b4p^3x^2 + b5p^3xy + b6p^3y^2 + b7p^2x^3 + b8p^2x^2y + b9p^2xy^2 + b10p^2y^3 + b11px^4 + b12px^3y +}{\mathcal{C}1p^5 + \mathcal{C}2p^4x + \mathcal{C}3p^4y + \mathcal{C}4p^3x^2 + \mathcal{C}5p^3xy + \mathcal{C}6p^3y^2 + \mathcal{C}7p^2x^3 + \mathcal{C}8p^2x^2y + \mathcal{C}9p^2xy^2 + \mathcal{C}10p^2y^3 + \mathcal{C}11px^4 + \mathcal{C}12px^3y +}$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^2}{p^4}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p +)^4}{(a\,1\,p +)^3\,(\mathcal{C}\,1\,p +)}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p +)^4}{p(a\,1\,p^3 +)}}, \quad n = \overset{(1)}{\frac{(a\,1\,p +)^4}{p(a\,1\,p +)^3}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p +)^4}{p(a\,1\,p +)^2(\mathcal{C}\,1\,p +)}},$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p +)^4}{p^2(a\,1\,p^2 +)}}, \quad n = \overset{(1)}{\frac{(a\,1\,p +)^4}{p^3(a\,1\,p +)}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p +)^3(b\,1\,p +)}{(a\,1\,p +)^3(\mathcal{C}\,1\,p +)}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p +)^3\,(b\,1\,p +)}{p\,(a\,1\,p^3 +)}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p +)^3\,(b\,1\,p +)}{p\,(a\,1\,p +)^3}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p +)^3\,(b\,1\,p +)}{p\,(a\,1\,p +)^2\,(\mathcal{C}\,1\,p +)}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p +)^3\,(b\,1\,p +)}{p^2\,(a\,1\,p^2 +)}};$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p +)^3\,(b\,1\,p +)}{p^2\,(a\,1\,p +)^2}}; \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p +)^3\,(b\,1\,p +)}{p^3\,(a\,1\,p +)}}.$$

$$n = \overset{(1)}{\frac{(a\,1\,p +)^3\,(b\,1\,p +)}{p^4}}.$$

5.° $$n = \overset{(9)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{a\,1\,p^5 +}}, \quad n = \overset{(8)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{(a\,1\,p^3 +)\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^2}};$$

$$n = \overset{(7)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{(a\,1\,p^2 +)^2(\mathcal{C}\,1\,p +)}}, \quad n = \overset{(7)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{(a\,1\,p^2 +)\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^3}}, \quad n = \overset{(5)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{(a\,1\,p +)^5}},$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{(a\,1\,p +)^4(\mathcal{C}\,1\,p +)}}; \quad n = \overset{(6)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{(a\,1\,p +)^3(\mathcal{C}\,1\,p +)^2}}, \quad n = \overset{(8)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{p(a\,1\,p^4 +)}};$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{p\,(a\,1\,p^2 +)^2}}; \quad n = \overset{(7)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{p(a\,1\,p^2 +)\,(\mathcal{C}\,1\,p +)^2}}, \quad n = \overset{(5)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{p(a\,1\,p +)^4}},$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{p(a\,1\,p +)^3\,(\mathcal{C}\,1\,p +)}}, \quad n = \overset{(7)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{p^2(a\,1\,p^3 +)}}; \quad n = \overset{(5)}{\frac{a\,1\,p^5 +}{p^2(a\,1\,p +)^3}};$$

$n =$

$$n = \frac{\overset{(6)}{a\,1\,p^5 +}}{p^2(\alpha\,1\,p +)^2(\beta\,1\,p +)},\ n = \frac{\overset{(6)}{a\,1\,p^5 +}}{p^3(\alpha\,1\,p^2 +)},\ n = \frac{\overset{(5)}{a\,1\,p^5 +}}{p^3(\alpha\,1\,p +)^2};$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{a\,1\,p^5 +}}{p^4(\alpha\,1\,p +)},\ n = \frac{\overset{(4)}{a\,1\,p^5 +}}{p^5},\ n = \frac{\overset{(7)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{(\alpha\,1\,p^3 +)(\beta\,1\,p +)^2};$$

$$n = \frac{\overset{(6)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{(\alpha\,1\,p^2 +)^2(\beta\,1\,p +)},\ n = \frac{\overset{(6)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{(\alpha\,1\,p^2 +)(\beta\,1\,p +)^3},$$

$$n = \frac{\overset{(4)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{(\alpha\,1\,p +)^5};\ n = \frac{\overset{(5)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{(\alpha\,1\,p +)^4(\beta\,1\,p +)};$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{(\alpha\,1\,p +)^3(\beta\,1\,p +)^2},\ n = \frac{\overset{(7)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p(\alpha\,1\,p^4 +)},$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p(\alpha\,1\,p^2 +)^2},\ n = \frac{\overset{(6)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p(\alpha\,1\,p^2 +)(\beta\,1\,p +)^2},$$

$$n = \frac{\overset{(4)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p(\alpha\,1\,p +)^4},\ n = \frac{\overset{(5)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p(\alpha\,1\,p +)^3(\beta\,1\,p +)},$$

$$n = \frac{\overset{(6)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p^2(\alpha\,1\,p^3 +)},\ n = \frac{\overset{(4)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p^2(\alpha\,1\,p +)^3},$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p^2(\alpha\,1\,p +)^2(\beta\,1\,p +)},\ n = \frac{\overset{(5)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p^3(\alpha\,1\,p^2 +)},$$

$$n = \frac{\overset{(4)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p^3(\alpha\,1\,p +)^2},\ n = \frac{\overset{(4)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p^4(\alpha\,1\,p +)};$$

$$n = \frac{\overset{(3)}{(a\,1\,p^3 +)(b\,1\,p +)^2}}{p^5},\ n = \frac{\overset{(5)}{(a\,1\,p^2 +)^2(b\,1\,p +)}}{(\alpha\,1\,p^2 +)^2(\beta\,1\,p +)};$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a\,1\,p^2 +)^2(b\,1\,p +)}}{(\alpha\,1\,p^2 +)(\beta\,1\,p +)^3},\ n = \frac{\overset{(3)}{(a\,1\,p^2 +)^2(b\,1\,p +)}}{(\alpha\,1\,p +)^5},$$

$$n = \stackrel{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{(\alpha\,1\,p +)^4\,(\epsilon\,1\,p +)}}, \quad n = \stackrel{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{(\alpha\,1\,p +)^3\,(\epsilon\,1\,p +)^2}};$$

$$n = \stackrel{(6)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p\,(\alpha\,1\,p^4 +)}}, \quad n = \stackrel{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p\,(\alpha\,1\,p^2 +)^2}},$$

$$n = \stackrel{(5)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p\,(\alpha\,1\,p^2 +)\,(\epsilon\,1\,p +)^2}}, \quad n = \stackrel{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p\,(\alpha\,1\,p +)^4}};$$

$$n = \stackrel{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p\,(\alpha\,1\,p +)^3\,(\epsilon\,1\,p +)}}, \quad n = \stackrel{(5)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p^2\,(\alpha\,1\,p^3 +)}};$$

$$n = \stackrel{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p^2\,(\alpha\,1\,p +)^3}}, \quad n = \stackrel{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p^2\,(\alpha\,1\,p +)^2\,(\epsilon\,1\,p +)}},$$

$$n = \stackrel{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p^3\,(\alpha\,1\,p^2 +)}}; \quad n = \stackrel{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p^3\,(\alpha\,1\,p +)^2}};$$

$$n = \stackrel{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p^4\,(\alpha\,1\,p +)}}, \quad n = \stackrel{(2)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)^2\,(b\,1\,p +)}{p^5}};$$

$$n = \stackrel{(5)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^3}{(\alpha\,1\,p^2 +)\,(\epsilon\,1\,p +)^3}}, \quad n = \stackrel{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^3}{(\alpha\,1\,p +)^5}},$$

$$n = \stackrel{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^3}{(\alpha\,1\,p +)^4\,(\epsilon\,1\,p +)}}, \quad n = \stackrel{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^3}{(\alpha\,1\,p +)^3\,(\epsilon\,1\,p +)^2}};$$

$$n = \stackrel{(6)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^3}{p\,(\alpha\,1\,p^4 +)}}, \quad n = \stackrel{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^3}{p\,(\alpha\,1\,p^2 +)^2}},$$

$$n = \stackrel{(5)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^3}{p\,(\alpha\,1\,p^2 +)\,(\epsilon\,1\,p +)^2}}, \quad n = \stackrel{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^3}{p\,(\alpha\,1\,p +)^4}};$$

$$n = \stackrel{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^3}{p\,(\alpha\,1\,p +)^3\,(\epsilon\,1\,p +)}}, \quad n = \stackrel{(5)}{\frac{(a\,1\,p^2 +)\,(b\,1\,p +)^3}{p^2\,(\alpha\,1\,p^3 +)}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a \mid p^{2} +)(b \mid p +)^{3}}{p^{2}(a \mid p +)^{3}}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a \mid p^{2} +)(b \mid p +)^{3}}{p^{2}(a \mid p +)^{2}(\beta \mid p +)}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a \mid p^{2} +)(b \mid p +)^{3}}{p^{3}(a \mid p^{2} +)}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a \mid p^{2} +)(b \mid p +)^{3}}{p^{3}(a \mid p +)^{2}}}.$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a \mid p^{2} +)(b \mid p +)^{3}}{p^{4}(a \mid p +)}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a \mid p^{2} +)(b \mid p +)^{3}}{p^{5}}};$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{(a \mid p +)^{4}(\beta \mid p +)}}; \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{(a \mid p +)^{3}(\beta \mid p +)^{2}}}.$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p(a \mid p^{4} +)}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p(a \mid p^{2} +)^{2}}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p(a \mid p^{2} +)(\beta \mid p +)^{2}}};$$

$$n = \overset{(1)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p(a \mid p +)^{4}}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p(a \mid p +)^{3}(\beta \mid p +)}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p^{2}(a \mid p^{3} +)}};$$

$$n = \overset{(1)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p^{2}(a \mid p +)^{3}}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p^{2}(a \mid p +)^{2}(\beta \mid p +)}}; \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p^{3}(a \mid p^{2} +)}};$$

$$n = \overset{(1)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p^{3}(a \mid p +)^{2}}}, \quad n = \overset{(1)}{\frac{(a \mid p +)^{5}}{p^{4}(a \mid p +)}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a \mid p +)^{4}(b \mid p +)}{(a \mid p +)^{4}(\beta \mid p +)}}.$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a \mid p +)^{4}(b \mid p +)}{(a \mid p +)^{3}(\beta \mid p +)^{2}}}; \quad n = \overset{(5)}{\frac{(a \mid p +)^{4}(\beta \mid p +)}{p(a \mid p^{4} +)}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a \mid p \pm)^{4}(b \mid p +)}{p(a \mid p^{2} +)^{2a}}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a \mid p +)^{4}(b \mid p +)}{p(a \mid p^{2} +)(\beta \mid p +)^{2}}},$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a \mid p +)^{4}(b \mid p +)}{p(a \mid p +)^{4}}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a \mid p +)^{4}(b \mid p +)}{p(a \mid p +)^{3}(\beta \mid p +)}};$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{(a \mid p +)^{4}(b \mid p +)}{p^{2}(a \mid p^{3} +)}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a \mid p +)^{4}(b \mid p +)}{p^{2}(a \mid p +)^{3}}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)}{p^2\,(\alpha\,1\,p+)^2\,(\mathfrak{C}\,1\,p+)}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)}{p^3\,(\alpha\,1\,p^2+)}},$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)}{p^3\,(\alpha\,1\,p+)^2}},\quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)}{p^4\,(\alpha\,1\,p+)}},$$

$$n = \overset{(1)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)}{p^5}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{(\alpha\,1\,p+)^3\,(\mathfrak{C}\,1\,p+)^2}},$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p\,(\alpha\,1\,p^4+)}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p\,(\alpha\,1\,p^2+)^2}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p\,(\alpha\,1\,p^2+)\,(\mathfrak{C}\,1\,p+)^2}},\quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p\,(\alpha\,1\,p+)^4}},$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p\,(\alpha\,1\,p+)^3\,(\mathfrak{C}\,1\,p+)}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p^2\,(\alpha\,1\,p^3+)}};$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p^2\,(\alpha\,1\,p+)^3}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p^2\,(\alpha\,1\,p+)^2\,(\mathfrak{C}\,1\,p+)}},$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p^3\,(\alpha\,1\,p^2+)}},\quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p^3\,(\alpha\,1\,p+)^2}},$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p^4\,(\alpha\,1\,p+)}},\quad n = \overset{(1)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2}{p^5}}.$$

6.° $$n = \overset{(11)}{\frac{a\,1\,p^6+}{\alpha\,1\,p^6+}},\quad n = \overset{(10)}{\frac{a\,1\,p^6+}{(\alpha\,1\,p^4+)\,(\mathfrak{C}\,1\,p+)^2}},\quad n = \overset{(8)}{\frac{a\,1\,p^6+}{(\alpha\,1\,p^3+)^2}};$$

$$n = \overset{(9)}{\frac{a\,1\,p^6+}{(\alpha\,1\,p^3+)\,(\mathfrak{C}\,1\,p+)^3}},\quad n = \overset{(7)}{\frac{a\,1\,p^6+}{(\alpha\,1\,p^2+)^3}},\quad n = \overset{(9)}{\frac{a\,1\,p^6+}{(\alpha\,1\,p^2+)^2\,(\mathfrak{C}\,1\,p^2)}},$$

$$n = \overset{(8)}{\frac{a\,1\,p^6+}{(\alpha\,1\,p^2+)\,(\mathfrak{C}\,1\,p+)^4}},\quad n = \overset{(6)}{\frac{a\,1\,p^6+}{(\alpha\,1\,p+)^6}},\quad n = \overset{(7)}{\frac{a\,1\,p^6+}{(\alpha\,1\,p+)^5\,(\mathfrak{C}\,1\,p+)}},$$

$$n = \overset{(7)}{\frac{a1p^6+}{(\alpha1p+)^4(\beta1p+)^2}}, \quad n = \overset{(8)}{\frac{a1p^6+}{(\alpha1p+)^3(\beta1p+)^2(\gamma1p+)}};$$

$$n = \overset{(10)}{\frac{a1p^6+}{p(\alpha1p^5+)}}, \quad n = \overset{(9)}{\frac{a1p^6+}{p(\alpha1p^3+)(\beta1p+)^2}},$$

$$n = \overset{(8)}{\frac{a1p^6+}{p(\alpha1p^2+)^2(\beta1p+)}}, \quad n = \overset{(8)}{\frac{a1p^6+}{p(\alpha1p^2+)(\beta1p+)^3}};$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{a1p^6+}{p(\alpha1p+)^5}}; \quad n = \overset{(7)}{\frac{a1p^6+}{p(\alpha1p+)^4(\beta1p+)}};$$

$$n = \overset{(8)}{\frac{a1p^6+}{(\alpha1p+)^5(\beta1p+)^2}}; \quad n = \overset{(9)}{\frac{a1p^6+}{p^2(\alpha1p^4+)}},$$

$$n = \overset{(7)}{\frac{a1p^6+}{p^2(\alpha1p^2+)^2}}, \quad n = \overset{(8)}{\frac{a1p^6+}{p^2(\alpha1p^2+)(\beta1p+)^2}},$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{a1p^6+}{p^2(\alpha1p+)^4}}, \quad n = \overset{(7)}{\frac{a1p^6+}{p^2(\alpha1p+)^3(\beta1p+)}},$$

$$n = \overset{(8)}{\frac{a1p^6+}{p^3(\alpha1p^3+)}}, \quad n = \overset{(6)}{\frac{a1p^6+}{p^3(\alpha1p+)^3}}, \quad n = \overset{(7)}{\frac{a1p^6+}{p^3(\alpha1p+)^2(\beta1p+)}},$$

$$n = \overset{(7)}{\frac{a1p^6+}{p^4(\alpha1p^2+)}}; \quad n = \overset{(6)}{\frac{a1p^6+}{p^4(\alpha1p+)^2}}, \quad n = \overset{(6)}{\frac{a1p^6+}{p^5(\alpha1p+)}},$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{a1p^6+}{p^6}}.$$

$$n = \overset{(9)}{\frac{(a1p^4+)(b1p+)^2}{(\alpha1p^4+)(\beta1p+)^2}}, \quad n = \overset{(7)}{\frac{(a1p^4+)(b1p+)^2}{(\alpha1p^3+)^2}},$$

$$n = \overset{(8)}{\frac{(a1p^4+)(b1p+)^2}{(\alpha1p^3+)(\beta1p+)^3}}, \quad n = \overset{(8)}{\frac{(a1p^4+)(b1p+)^2}{(\alpha1p^2+)^2}};$$

$$n = \frac{\overset{(8)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{(\alpha 1 p^2+)^2\,(\beta 1 p^2+)}, \quad n = \frac{\overset{(7)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{(\alpha 1 p^2+)\,(\beta 1 p+)^4},$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{(\alpha 1 p+)^6}, \quad n = \frac{\overset{(6)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{(\alpha 1 p+)^5\,(\beta 1 p+)};$$

$$n = \frac{\overset{(6)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{(\alpha 1 p+)^4\,(\beta 1 p+)^2}, \quad n = \frac{\overset{(7)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{(\alpha 1 p+)^3\,(\beta 1 p+)^2\,(\gamma 1 p+)};$$

$$n = \frac{\overset{(9)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p(\alpha 1 p^5+)}, \quad n = \frac{\overset{(8)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p(\alpha 1 p^3+)\,(\beta 1 p+)^2};$$

$$n = \frac{\overset{(7)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p(\alpha 1 p^2+)^2\,(\beta 1 p+)}, \quad n = \frac{\overset{(7)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p(\alpha 1 p^2+)\,(\beta 1 p+)^3};$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p(\alpha 1 p+)^5}, \quad n = \frac{\overset{(6)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p(\alpha 1 p+)^4\,(\beta 1 p+)};$$

$$n = \frac{\overset{(6)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p(\alpha 1 p+)^3\,(\beta 1 p+)^2}, \quad n = \frac{\overset{(8)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^2(\alpha 1 p^4+)};$$

$$n = \frac{\overset{(6)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^2(\alpha 1 p^2+)^2}, \quad n = \frac{\overset{(7)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^2(\alpha 1 p^2+)\,(\beta 1 p+)^2},$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^2(\alpha 1 p+)^4}, \quad n = \frac{\overset{(6)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^2(\alpha 1 p+)^3\,(\beta 1 p+)},$$

$$n = \frac{\overset{(7)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^3(\alpha 1 p^3+)}, \quad n = \frac{\overset{(5)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^3(\alpha 1 p+)^3},$$

$$n = \frac{\overset{(6)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^3(\alpha 1 p+)^2\,(\beta 1 p+)}; \quad n = \frac{\overset{(6)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^4(\alpha 1 p^2+)};$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^4(\alpha 1 p+)^2}, \quad n = \frac{\overset{(5)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^5(\alpha 1 p+)},$$

$$n = \frac{\overset{(4)}{(a1p^4+)\,(b1p+)^2}}{p^6}.$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{(a1p^3+)^2}{(\alpha 1p^3+)\,(\beta 1p+)^3}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^3+)^2}{(\alpha 1p^2+)^3}},$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{(a1p^3+)^2}{(\alpha 1p^2+)^2\,(\beta 1p^2+)}},\quad n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^3+)^2}{(\alpha 1p^2+)\,(\beta 1p+)^4}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^3+)^2}{(\alpha 1p+)^5\,(\beta 1p+)}},\quad n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^3+)^2}{(\alpha 1p+)^3\,(\beta 1p+)^2\,(\gamma 1p+)}},$$

$$n = \overset{(7)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p(\alpha 1p^3+)}},\quad n = \overset{(6)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p(\alpha 1p^3+)\,(\beta 1p+)^2}};$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p(\alpha 1p^2+)^2\,(\beta 1p+)}},\quad n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p(\alpha 1p^2+)\,(\beta 1p+)^3}},$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p(\alpha 1p+)^5}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p(\alpha 1p+)^4\,(\beta 1p+)}};$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p(\alpha 1p+)^3\,(\beta 1p+)^2}},\quad n = \overset{(6)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p^2(\alpha 1p^4+)}};$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p^2(\alpha 1p^2+)\,(\beta 1p+)^2}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p^2(\alpha 1p+)^3\,(\beta 1p+)}},$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p^3(\alpha 1p^3+)}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p^3(\alpha 1p+)^3}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p^3(\alpha 1p+)^2\,(\beta 1p+)}};$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p^4(\alpha 1p^2+)}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a1p^3+)^2}{p^5(\alpha 1p+)}},\quad n = \overset{(7)}{\frac{(a1p^3+)\,(b1p+)^3}{(\alpha 1p^3+)\,(\beta 1p+)^3}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^3+)\,(b1p+)^3}{(\alpha 1p^2+)^3}},\quad n = \overset{(7)}{\frac{(a1p^3+)\,(b1p+)^3}{(\alpha 1p^2+)^2\,(\beta 1p^2+)}};$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{(a1p^3+)\,(b1p+)^3}{(\alpha 1p^2+)\,(\beta 1p+)^4}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a1p^3+)\,(b1p+)^3}{(\alpha 1p+)^6}};$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{(\alpha{:}p +)^5 (\beta{:}p +)}}, \quad n = \overset{(5)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{(\alpha{:}p +)^4 (\beta{:}p +)^2}},$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{(\alpha{:}p +)^3 (\beta{:}p +)^2 (\gamma{:}p +)}}, \quad n = \overset{(8)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p(\alpha{:}p^5 +)}},$$

$$n = \overset{(7)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p(\alpha{:}p^3 +)(\beta{:}p +)^2}}, \quad n = \overset{(7)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^2(\alpha{:}p^4 +)}},$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^2(\alpha{:}p^2 +)^2}}, \quad n = \overset{(6)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^2(\alpha{:}p^2 +)(\beta{:}p +)^2}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^2(\alpha{:}p +)^4}}, \quad n = \overset{(5)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^2(\alpha{:}p +)^3 (\beta{:}p +)}},$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^3(\alpha{:}p^3 +)}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^3(\alpha{:}p +)^3}},$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^3(\alpha{:}p +)^2 (\beta{:}p +)}}, \quad n = \overset{(5)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^4(\alpha{:}p^2 +)}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^4(\alpha{:}p +)^2}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^5(\alpha{:}p +)}},$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a{:}p^3 +)(b{:}p +)^3}{p^6}}.$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a{:}p^2 +)^3}{(\alpha{:}p^2 +)^2 (\beta{:}p^2 +)}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a{:}p^2 +)^3}{(\alpha{:}p^2 +)(\beta{:}p +)^4}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a{:}p^2 +)^3}{(\alpha{:}p +)^5 (\beta{:}p +)}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a{:}p^2 +)^3}{(\alpha{:}p +)^4 (\beta{:}p +)^2}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a{:}p^2 +)^3}{(\alpha{:}p +)^3 (\beta{:}p +)^2 (\gamma{:}p +)}}, \quad n = \overset{(6)}{\frac{(a{:}p^2 +)^3}{p(\alpha{:}p^5 +)}},$$

$n =$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p(\alpha\,1\,p^3+)(\beta\,1\,p+)^2}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p(\alpha\,1\,p^2+)^2(\beta\,1\,p+)}};$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p(\alpha\,1\,p^2+)(\beta\,1\,p+)^3}},\quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p(\alpha\,1\,p+)^5}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p(\alpha\,1\,p+)^4(\beta\,1\,p+)}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p(\alpha\,1\,p+)^3(\beta\,1\,p+)^2}};$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^2(\alpha\,1\,p^4+)}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^2(\alpha\,1\,p^2+)^2}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^2(\alpha\,1\,p^2+)(\beta\,1\,p+)^2}};$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^2(\alpha\,1\,p+)^4}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^2(\alpha\,1\,p+)^3(\beta\,1\,p+)}};$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^3(\alpha\,1\,p^3+)}};\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^3(\alpha\,1\,p+)^2(\beta\,1\,p+)}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^4(\alpha\,1\,p^2+)}};\quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^4(\alpha\,1\,p+)^2}},\quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^3}{p^5(\alpha\,1\,p+)}};$$

$$n = \overset{(7)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p^2+)}{(\alpha\,1\,p^2+)^2(\beta\,1\,p^2+)}},\quad n = \overset{(6)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p^2+)}{(\alpha\,1\,p^2+)(\beta\,1\,p+)^4}};$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p^2+)}{(\alpha\,1\,p+)^6}},\quad n = \overset{(5)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p^2+)}{(\alpha\,1\,p+)^5(\beta\,1\,p+)}};$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p^2+)}{(\alpha\,1\,p+)^4(\beta\,1\,p+)^2}},\quad n = \overset{(6)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p^2+)}{(\alpha\,1\,p+)^3(\beta\,1\,p+)^2(\gamma\,1\,p+)}};$$

$$n = \overset{(8)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p^2+)}{p(\alpha\,1\,p^5+)}},\quad n = \overset{(7)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p^2+)}{p(\alpha\,1\,p^3+)(\beta\,1\,p+)^2}};$$

$$n = \overset{(6)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p^2+)}{p(\alpha\,1\,p^2+)^2(\beta\,1\,p+)}},\quad n = \overset{(6)}{\frac{(a\,1\,p^2+)^2(b\,1\,p^2+)}{p(\alpha\,1\,p^2+)(\beta\,1\,p+)^3}};$$

$$\overset{(4)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p\,(a\,1\,p+)^5}}, \quad \overset{(5)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p\,(a\,1\,p+)^4\,(C\,1\,p+)}};$$

$$\overset{(5)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p\,(a\,1\,p+)^3\,(C\,1\,p+)^2}}, \quad \overset{(7)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^2\,(a\,1\,p^4+)}},$$

$$\overset{(5)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^2\,(a\,1\,p^2+)^2}}, \quad \overset{(6)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^2\,(a\,1\,p^2+)\,(C\,1\,p+)^2}},$$

$$\overset{(4)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^2\,(a\,1\,p+)^4}}, \quad \overset{(5)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^2\,(a\,1\,p+)^3\,(C\,1\,p+)}},$$

$$\overset{(6)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^3\,(a\,1\,p^3+)}}, \quad \overset{(4)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^3\,(a\,1\,p+)^3}},$$

$$\overset{(5)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^3\,(a\,1\,p+)^2\,(C\,1\,p+)}}, \quad \overset{(5)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^4\,(a\,1\,p^2+)}},$$

$$\overset{(4)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^4\,(a\,1\,p+)^2}}, \quad \overset{(4)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^5\,(a\,1\,p+)}},$$

$$\overset{(3)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)^2\,(b\,1\,p^2+)}{p^6}}.$$

$$\overset{(5)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{(a\,1\,p^2+)\,(C\,1\,p+)^4}}, \quad \overset{(3)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{(a\,1\,p+)^6}},$$

$$\overset{(4)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{(a\,1\,p+)^5\,(C\,1\,p+)}}, \quad \overset{(4)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{(a\,1\,p+)^4\,(C\,1\,p+)^2}},$$

$$\overset{(5)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{(a\,1\,p+)^3\,(C\,1\,p+)^2\,(\gamma\,1\,p+)}}, \quad \overset{(7)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p\,(a\,1\,p^5+)}},$$

$$\overset{(6)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p\,(a\,1\,p^3+)\,(C\,1\,p+)^2}}, \quad \overset{(5)}{n = \frac{(a\,1\,p^2+)\,(b\,1\,p+)^4}{p\,(a\,1\,p^2+)^2\,(C\,1\,p+)}},$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p(a|p^2+)(\beta|p+)^3}, \quad n = \frac{\overset{(3)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p(a|p+)^5};$$

$$n = \frac{\overset{(4)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p(a|p+)^4(\beta|p+)}, \quad n = \frac{\overset{(4)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p(a|p+)^3(\beta|p+)^2},$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^2(a|p^4+)}, \quad n = \frac{\overset{(3)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^2(a|p^2+)^2};$$

$$n = \frac{\overset{(4)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^2(a|p^2+)(\beta|p+)^2}, \quad n = \frac{\overset{(3)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^2(a|p+)^4};$$

$$n = \frac{\overset{(4)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^2(a|p+)^3(\beta|p+)}, \quad n = \frac{\overset{(5)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^3(a|p^3+)},$$

$$n = \frac{\overset{(3)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^3(a|p+)^3}, \quad n = \frac{\overset{(4)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^3(a|p+)^2(\beta|p+)},$$

$$n = \frac{\overset{(4)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^4(a|p^2+)}, \quad n = \frac{\overset{(3)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^4(a|p+)^2},$$

$$n = \frac{\overset{(3)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^5(a|p+)}, \quad n = \frac{\overset{(2)}{(a|p^2+)}\,(b|p+)^4}{p^6}.$$

$$n = \frac{\overset{(2)}{(a|p+)^6}}{(a|p+)^5(\beta|p+)}, \quad n = \frac{\overset{(3)}{(a|p+)^6}}{(a|p+)^3(\beta|p+)^2(\gamma|p+)};$$

$$n = \frac{\overset{(5)}{(a|p+)^6}}{p(a|p^5+)}, \quad n = \frac{\overset{(4)}{(a|p+)^6}}{p(a|p^3+)(\beta|p+)^2};$$

$$n = \frac{\overset{(3)}{(a|p+)^6}}{p(a|p^2+)^2(\beta|p+)}, \quad n = \frac{\overset{(3)}{(a|p+)^6}}{p(a|p^2+)(\beta|p+)^3},$$

$$n = \frac{\overset{(1)}{(a|p+)^6}}{p(a|p+)^5}; \quad n = \frac{\overset{(2)}{(a|p+)^6}}{p(a|p+)^4(\beta|p+)};$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^6}{p(\alpha\,1\,p+)^3(\beta\,1\,p+)^2}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^6}{p^2(\alpha\,1\,p^4+)}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^6}{p^2(\alpha\,1\,p^2+)(\beta\,1\,p+)^2}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^6}{p^2(\alpha\,1\,p+)^3(\beta\,1\,p+)}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^6}{p^3(\alpha\,1\,p^3+)}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^6}{p^3(\alpha\,1\,p+)^2(\beta\,1\,p+)}};$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^6}{p^4(\alpha\,1\,p^2+)}}, \quad n = \overset{(1)}{\frac{(a\,1\,p+)^6}{p^5(\alpha\,1\,p+)}}.$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{(\alpha\,1\,p+)^5(\beta\,1\,p+)}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{(\alpha\,1\,p+)^4(\beta\,1\,p+)^2}};$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{(\alpha\,1\,p+)^3(\beta\,1\,p+)^2(\gamma\,1\,p+)}}, \quad n = \overset{(6)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p^5+)}},$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p^3+)(\beta\,1\,p+)^2}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p^2+)^2(\beta\,1\,p+)}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p^2+)(\beta\,1\,p+)^3}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p+)^5}},$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p+)^4(\beta\,1\,p+)}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p+)^3(\beta\,1\,p+)^2}};$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^2(\alpha\,1\,p^4+)}}, \quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^2(\alpha\,1\,p^2+)^2}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^2(\alpha\,1\,p^2+)(\beta\,1\,p+)^2}}, \quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^2(\alpha\,1\,p+)^4}},$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^2(\alpha\,1\,p+)^3(\beta\,1\,p+)}}, \quad n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^5(b\,1\,p+)}{p^3(\alpha\,1\,p^3+)}},$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^5\,(b\,1\,p+)}{p^3(\alpha\,1\,p+)^3}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^5\,(b\,1\,p+)}{p^3(\alpha\,1\,p+)^2\,(\beta\,1\,p+)}};$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^5\,(b\,1\,p+)}{p^4(\alpha\,1\,p^2+)}},\quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^5\,(b\,1\,p+)}{p^4(\alpha\,1\,p+)^2}},$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^5\,(b\,1\,p+)}{p^5(\alpha\,1\,p+)}},\quad n = \overset{(1)}{\frac{(a\,1\,p+)^5\,(b\,1\,p+)}{p^6}}.$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{(\alpha\,1\,p+)^3\,(\beta\,1\,p+)^2\,(\gamma\,1\,p+)}},\quad n = \overset{(6)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p(\alpha\,1\,p^5+)}};$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p(\alpha\,1\,p^3+)\,(\beta\,1\,p+)^2}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(\beta\,1\,p+)^2}{p(\alpha\,1\,p^2+)^2\,(\beta\,1\,p+)}},$$

$$n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p(\alpha\,1\,p^2+)\,(\beta\,1\,p+)^3}},\quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p(\alpha\,1\,p+)^5}},$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p(\alpha\,1\,p+)^4\,(\beta\,1\,p+)}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p(\alpha\,1\,p+)^3\,(\beta\,1\,p+)^2}},$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p^2(\alpha\,1\,p^4+)}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p^2(\alpha\,1\,p^2+)\,(\beta\,1\,p+)^2}},$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p^2(\alpha\,1\,p+)^3\,(\beta\,1\,p+)}},\quad n = \overset{(4)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p^3(\alpha\,1\,p^3+)}},$$

$$n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p^3(\alpha\,1\,p+)^3}},\quad n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p^3(\alpha\,1\,p+)^2\,(\beta\,1\,p+)}},$$

$$n = \overset{(3)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p^4(\alpha\,1\,p^2+)}},\quad n = \overset{(2)}{\frac{(a\,1\,p+)^4\,(b\,1\,p+)^2}{p^5(\alpha\,1\,p+)}}.$$

$$n = \overset{(5)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2\,(c\,1\,p+)}{(\alpha\,1\,p+)^3\,(\beta\,1\,p+)^2\,(\gamma\,1\,p+)}},\quad n = \overset{(7)}{\frac{(a\,1\,p+)^3\,(b\,1\,p+)^2\,(c\,1\,p+)}{p(\alpha\,1\,p^5+)}},$$

$$\overset{(6)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p^3+)(\beta_1p+)^2}}, \quad \overset{(5)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p^2+)^2(\beta_1p+)}};$$

$$\overset{(5)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p^2+)(\beta_1p+)^3}}, \quad \overset{(3)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p+)^5}},$$

$$\overset{(4)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p+)^4(\beta_1p+)}}, \quad \overset{(4)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p(\alpha_1p+)^3(\beta_1p+)^2}};$$

$$\overset{(6)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^2(\alpha_1p^4+)}}, \quad \overset{(4)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^2(\alpha_1p^2+)^2}},$$

$$\overset{(5)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^2(\alpha_1p^2+)(\beta_1p+)^2}}, \quad \overset{(3)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^2(\alpha_1p+)^4}},$$

$$\overset{(4)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^2(\alpha_1p+)^3(\beta_1p+)}}, \quad \overset{(5)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^3(\alpha_1p^3+)}};$$

$$\overset{(3)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^3(\alpha_1p+)^3}}, \quad \overset{(4)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^3(\alpha_1p+)^2(\beta_1p+)}};$$

$$\overset{(4)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^4(\alpha_1p^2+)}}, \quad \overset{(3)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^4(\alpha_1p+)^2}},$$

$$\overset{(3)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^5(\alpha_1p+)}}, \quad \overset{(2)}{n = \frac{(a_1p+)^3(b_1p+)^2(c_1p+)}{p^6}}.$$

TABLE III.

L'intégrale de l'équation $\dot{x} + A\dot{y} = 0$, est $n = \frac{a_1p + a_2x + a_3y}{p}$.

L'intégrale de l'équation $\dot{x} \pm \frac{A_1p + A_2x}{B_1 - A_2y}\dot{y} = 0$, est $n = \frac{a_1p + a_2x + a_3y}{\alpha_1p + \alpha_2x \pm \alpha_3y}$

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p + A2x + A3y}{B1p + B2x + B3y}\dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a1p^2 +}{p^2}$, $n = \frac{(a1p+)^2}{p(\alpha1p+)}$, $n = \frac{(a1p+)^3}{p(\alpha1p+)^2}$, $n = \frac{(a1p+)^3}{p^2(\alpha1p+)}$, $n = \frac{(a1p+)^2(b1p+)}{p^3}$, $n = \frac{(a1p+)^4}{p(\alpha1p+)^3}$; $n = \frac{(a1p+)^4}{p^3(\alpha1p+)}$, $n = \frac{(a1p+)^3(b1p+)}{p^4}$, $n = \frac{(a1p+)^5}{p(\alpha1p+)^4}$; $n = \frac{(a1p+)^5}{p^2(\alpha1p+)^3}$, $n = \frac{(a1p+)^5}{p^3(\alpha1p+)^2}$, $n = \frac{(a1p+)^5}{p^4(\alpha1p+)}$; $n = \frac{(a1p+)^4(b1p+)}{p^5}$, $n = \frac{(a1p+)^3(b1p+)^2}{p^5}$; $n = \frac{(a1p+)^6}{p^5(\alpha1p+)}$; $n = \frac{(a1p+)^5(b1p+)}{p^6}$, $n = \frac{(a1p+)^6}{p(\alpha1p+)^5}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^2 + A2px + A3py + A4x^2 + A5xy}{B1p^2 + B2px + B3py - A4xy - A5y^2}\dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a1p^2 +}{(\alpha1p+)^2}$, $n = \frac{(a1p+)^3}{(\alpha1p+)^2(\beta1p+)}$, $n = \frac{(a1p+)^4}{(\alpha1p+)^3(\beta1p+)}$, $n = \frac{(a1p+)^5}{(\alpha1p+)^4(\beta1p+)}$, $n = \frac{(a1p+)^5}{(\alpha1p+)^3(\beta1p+)^2}$, $n = \frac{(a1p+)^6}{(\alpha1p+)^5(\beta1p+)}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^2 + A2px + A3py + A4x^2 + A5xy + A6y^2}{B1p^2 + B2px + B3py + B4x^2 + B5xy + B6y^2}\dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a1p^2 +}{p(\alpha1p+)}$, $n = \frac{a1p^3 +}{p^3}$, $n = \frac{(a1p+)^3}{p(\alpha1p^2+)}$, $n = \frac{(a1p+)^2(b1p+)}{p(\alpha1p+)^2}$, $n = \frac{(a1p+)^2(b1p+)}{p^2(\alpha1p+)}$, $n = \frac{(a1p^2+)^2}{p(\alpha1p+)^2}$; $n = \frac{(a1p^2+)^2}{p^3(\alpha1p+)}$, $n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{p^4}$,

$$n = \frac{(a 1 p +)^4}{p(\alpha 1 p +)^2 (\beta 1 p +)}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^4}{p^2(\alpha 1 p^2 +)};$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^3 (b 1 p +)}{p(\alpha 1 p +)^3}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^3 (b 1 p +)}{p^2 (\alpha 1 p +)^2},$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^3 (b 1 p +)}{p^3 (\alpha 1 p +)}; \quad n = \frac{(a 1 p^2 +)^2 (b 1 p +)}{p^5};$$

$$n = \frac{(a 1 p^2 +) (b 1 p +)^3}{p^5}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^5}{p(\alpha 1 p +)^3 (\beta 1 p +)},$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^5}{p^2 (\alpha 1 p +)^2 (\beta 1 p +)}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^5}{p^3 (\alpha 1 p^2 +)};$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^4 (b 1 p +)}{p(\alpha 1 p +)^4}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^4 (b 1 p +)}{p^2 (\alpha 1 p +)^3},$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^4 (b 1 p +)}{p^3 (\alpha 1 p +)^2}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^4 (b 1 p +)}{p^4 (\alpha 1 p +)};$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^3 (b 1 p +)^2}{p(\alpha 1 p +)^4}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^3 (b 1 p +)^2}{p^2 (\alpha 1 p +)^3};$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^3 (b 1 p +)^2}{p^3 (\alpha 1 p +)^2}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^3 (b 1 p +)^2}{p^4 (\alpha 1 p +)};$$

$$n = \frac{(a 1 p^2 +)^3}{p(\alpha 1 p +)^5}, \quad n = \frac{(a 1 p^2 +)^3}{p^2 (\alpha 1 p +)^4}, \quad n = \frac{(a 1 p^2 +)^3}{p^4 (\alpha 1 p +)^2};$$

$$n = \frac{(a 1 p^2 +)^3}{p^5 (\alpha 1 p +)}, \quad n = \frac{(a 1 p^2 +) (b 1 p +)^4}{p^6};$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^6}{p(\alpha 1 p +)^4 (\beta 1 p +)}; \quad n = \frac{(a 1 p +)^6}{p(\alpha 1 p +)^3 (\beta 1 p +)^2};$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^6}{p^2 (\alpha 1 p +)^3 (\beta 1 p +)}; \quad n = \frac{(a 1 p +)^6}{p^3 (\alpha 1 p +)^2 (\beta 1 p +)};$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^6}{p^4 (\alpha 1 p^2 +)}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^5 (b 1 p +)}{p(\alpha 1 p +)^5}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^5 (b 1 p +)}{p^2 (\alpha 1 p +)^4},$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^5 (b 1 p +)}{p^3 (\alpha 1 p +)^3}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^5 (b 1 p +)}{p^4 (\alpha 1 p +)^2},$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^5 (b 1 p +)}{p^5 (\alpha 1 p +)}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^4 (b 1 p +)^2}{p(\alpha 1 p +)^5};$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^4 (b 1 p +)^2}{p^3 (\alpha 1 p +)^3}, \quad n = \frac{(a 1 p +)^4 (b 1 p +)^2}{p^5 (\alpha 1 p +)};$$

$$n = \frac{(a 1 p +)^3 (b 1 p +)^2 (c 1 p +)}{p^6}, \text{ \&c.}$$

Les

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^3 + A2p^2x + A3p^2y + A4px^2 + A5pxy + A6py^2 + A7x^3 + A8x^2y + A9xy^2}{B1p^3 + B2p^2x + B3p^2y + B4px^2 + B5pxy + B6py^2 - A7x^2y - A8xy^2 - A9y^3}\dot{y} = 0$, sont

$$n = \frac{a1p^2 +}{\alpha 1p^2 +},\quad n = \frac{a1p^3 +}{(\alpha 1p +)^3},\quad n = \frac{(a1p +)^2(b1p +)}{(\alpha 1p +)^2(\beta 1p +)},$$

$$n = \frac{(a1p^2 +)^2}{(\alpha 1p +)^3(\beta 1p +)},\quad n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{(\alpha 1p +)^4},$$

$$n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)}{(\alpha 1p +)^3(\beta 1p +)},\quad n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{(\alpha 1p +)^5},$$

$$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{(\alpha 1p +)^5},\quad n = \frac{(a1p +)^4(b1p +)}{(\alpha 1p +)^4(\beta 1p +)},$$

$$n = \frac{(a1p +)^4(b1p +)}{(\alpha 1p +)^3(\beta 1p +)^2},\quad n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)^2}{(\alpha 1p +)^3(\beta 1p +)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^2 +)^3}{(\alpha 1p +)^5(\beta 1p +)},\quad n = \frac{(a1p^2 +)^3}{(\alpha 1p +)^4(\beta 1p +)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^4 +)(b1p +)^4}{(a1p +)^6},\quad n = \frac{(a1p +)^6}{(\alpha 1p +)^3(\beta 1p +)^2(\gamma 1p +)},$$

$$n = \frac{(a1p +)^5(b1p +)}{(\alpha 1p +)^5(\beta 1p +)},\quad n = \frac{(a1p +)^5(b1p +)}{(\alpha 1p +)^4(\beta 1p +)^2},\ \text{\&c.}$$

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^3 + A2p^2x + A3p^2y + A4px^2 + A5pxy + A6py^2 + A7x^3 + A8x^2y + A9xy^2 + A10y^3}{B1p^3 + B2p^2x + B3p^2y + B4px^2 + B5pxy + B6py^2 + B7x^3 + B8x^2y + B9xy^2 + B10y^3}\dot{y} = 0$,

sont $n = \frac{a1p^3 +}{p(\alpha 1p +)^2}$, $n = \frac{a1p^3 +}{p^2(\alpha 1p +)}$, $n = \frac{(a1p +)^2(b1p +)}{p(\alpha 1p^2 +)}$,

$$n = \frac{a1p^4 +}{p^4},\quad n = \frac{(a1p^2 +)^2}{p(\alpha 1p +)^2(\beta 1p +)},\quad n = \frac{(a1p^2 +)^2}{p^2(\alpha 1p^2 +)},$$

$$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{p(\alpha 1p +)^3},\quad n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{p^2(\alpha 1p +)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{p^3(a1p +)},\quad n = \frac{(a1p +)^4}{p(\alpha 1p^3 +)},$$

$$n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)}{p(\alpha 1p +)^2(\beta 1p +)},\quad n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)}{p^2(\alpha 1p^2 +)},$$

V

$$n = \frac{(a1p^3+)(b1p+)^2}{p^5},\quad n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p(\alpha 1p+)^4},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^3(b1p+)}{p^2(\alpha 1p+)^3},\quad n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p^3(\alpha 1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p+)}{p^4(\alpha 1p+)},\quad n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^3}{p(\alpha 1p+)^4},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^3}{p^2(\alpha 1p+)^3},\quad n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^3}{p^3(\alpha 1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^3}{p^4(\alpha 1p+)},\quad n = \frac{(a1p+)^5}{p(\alpha 1p^2+)(\beta 1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a1p+)^5}{p^2(\alpha 1p^3+)},\quad n = \frac{(a1p+)^4(b1p+)}{p(a1p^2+)^2},$$

$$n = \frac{(a1p+)^4(b1p+)}{p(\alpha 1p+)^3(\beta 1p+)},\quad n = \frac{(a1p+)^4(b1p+)}{p^2(\alpha 1p+)^2(\beta 1p+)},$$

$$n = \frac{(a1p+)^4(b1p+)}{p^3(\alpha 1p^2+)},\quad n = \frac{(a1p+)^3(b1p+)^2}{p(\alpha 1p^2+)^2},$$

$$n = \frac{(a1p+)^3(b1p+)^2}{p(\alpha 1p+)^3(\beta 1p+)},\quad n = \frac{(a1p+)^3(b1p+)^2}{p^2(\alpha 1p+)^2(\beta 1p+)},$$

$$n = \frac{(a1p+)^3(b1p+)^2}{p^3(\alpha 1p^2+)},\ \&c.$$

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^4 + A2p^3x + A3p^3y + A4p^2x^2 + A5p^2xy + A6p^2y^2 + A7px^3 + A8px^2y + A9pxy^2 + A10py^3 + A11x^4 + A12x^3y + A13x^2y^2 + A14xy^3}{B1p^4 + B2p^3x + B3p^3y + B4p^2x^2 + B5p^2xy + B6p^2y^2 + B7px^3 + B8px^2y + B9pxy^2 + B10py^3 - A11x^3y - A12x^2y^2 - A13xy^3 - A14y^4}\dot{y} = 0$, ſont

$$n = \frac{a1p^3+}{(\alpha 1p+)^2(\beta 1p+)},\quad n = \frac{a1p^4+}{(\alpha 1p+)^4},\quad n = \frac{(a1p^2+)^2}{(\alpha 1p^2+)(\beta 1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^2}{(\alpha 1p+)^3(\beta 1p+)},\quad n = \frac{(a1p^3+)(b1p+)^2}{(\alpha 1p+)^5},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p+)}{(\alpha 1p+)^4(\beta 1p+)},\quad n = \frac{(a1p^2+)^2(b1p+)}{(\alpha 1p+)^3(\beta 1p+)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^3}{(\alpha 1p+)^4(\beta 1p+)},\quad n = \frac{(a1p^2+)(b1p+)^3}{(\alpha 1p+)^3(\beta 1p+)^2},\ \&c.$$

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^4 + A2p^3x + A3p^3y + A4p^2x^2 + A5p^2xy + A6p^2y^2 + A7px^3 + A8px^2y + A9pxy^2 + A10py^3 + A11x^4 + A12x^3y + A13x^2y^2 + A14xy^3 + A15y^4}{B1p^4 + B2p^3x + B3p^3y + B4p^2x^2 + B5p^2xy + B6p^2y^2 + B7px^3 + B8px^2y + B9pxy^2 + B10py^3 + B11x^4 + B12x^3y + B13x^2y^2 + B14xy^3 + B15y^4}\dot{y} = 0$,

font $n = \frac{a1p^3 +}{p(\alpha 1p^2 +)}$, $n = \frac{a1p^4 +}{p(\alpha 1p +)^3}$, $n = \frac{a1p^4 +}{p^2(\alpha 1p +)^2}$,

$n = \frac{a1p^4 +}{p^3(\alpha 1p +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)^2}{p(\alpha 1p^3 +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{p(\alpha 1p +)^2(\beta 1p +)}$;

$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{p^2(\alpha 1p^2 +)}$, $n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)}{p(\alpha 1p^3 +)}$,

$n = \frac{a1p^5 +}{p^5}$, $n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p(\alpha 1p +)^4}$, $n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p^2(\alpha 1p +)^3}$,

$n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p^3(\alpha 1p +)^2}$, $n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p^4(\alpha 1p +)}$;

$n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{p(\alpha 1p^2 +)^2}$, $n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{p(\alpha 1p +)^3(\beta 1p \mp)}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{p^2(\alpha 1p +)^2(\beta 1p +)}$, $n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{p^3(\alpha 1p^2 +)}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{p(\alpha 1p^2 +)^2}$, $n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{p(\alpha 1p +)^3(\beta 1p +)}$,

$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{p^2(\alpha 1p +)^2(\beta 1p +)}$, $n = \frac{(a1p^2 \mp)(b1p +)^3}{p^3(\alpha 1p^2 +)}$,

$n = \frac{(a1p +)^5}{p(\alpha 1p^4 +)}$, $n = \frac{(a1p +)^4(b1p \pm)}{p(\alpha 1p^2 +)(\beta 1p +)^2}$,

$n = \frac{(a1p +)^4(b1p +)}{p^2(\alpha 1p^3 +)}$, $n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)^2}{p(\alpha 1p^2 +)(\beta 1p +)^2}$,

$n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)^2}{p^2(\alpha 1p^3 +)}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^5 + \ldots + A16x^5 + A17x^4y + A18x^3y^2 + A19x^2y^3 + A20xy^4}{B1p^5 + \ldots - A16x^4y - A17x^3y^2 - A18x^2y^3 - A19xy^4 - A20y^5}\dot{y} = 0$, font

$$n = \frac{a1p^3 +}{\alpha 1p^3 +},\ n = \frac{a1p^4 +}{(\alpha 1p^2 +)^2},\ n = \frac{a1p^4 +}{(\alpha 1p +)^3(\beta 1p +)},$$

$$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{(\alpha 1p^2 +)(\beta 1p +)^2},\quad n = \frac{a1p^5 +}{(\alpha 1p +)^5},$$

$$n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{(\alpha 1p +)^4(\beta 1p +)},\ n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{(\alpha 1p +)^3(\beta 1p +)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{(\alpha 1p^2 +)^2(\beta 1p +)},\ n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{(\alpha 1p^2 +)(\beta 1p +)^3},$$

$$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{(\alpha 1p^2 +)(\beta 1p +)^3},\ \&c.$$

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^5 + \ldots + A16x^5 +}{B1p^5 + \ldots + B16x^5 +}$

$$\frac{A17x^4y + A18x^3y^2 + A19x^2y^3 + A20xy^4 + A21y^5}{B17x^4y + B18x^3y^2 + B19x^2y^3 + B20xy^4 + B21y^5}\dot{y} = 0,$$

sont $n = \frac{a1p^4 +}{p(\alpha 1p +)^2(\beta 1p +)}$, $n = \frac{a1p^4 +}{p^2(\alpha 1p^2 +)}$,

$$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^2}{p(\alpha 1p^3 +)},\ n = \frac{a1p^5 +}{p(\alpha 1p +)^4},\ n = \frac{a1p^5 +}{p^2(\alpha 1p +)^3},$$

$$n = \frac{a1p^5 +}{p^3(\alpha 1p +)^2},\ n = \frac{a1p^5 +}{p^4(\alpha 1p +)},\ n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p(\alpha 1p^2 +)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p(\alpha 1p +)^3(\beta 1p +)},\ n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p^2(\alpha 1p +)^2(\beta 1p +)},$$

$$n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p^3(\alpha 1p^2 +)},\ n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{p(\alpha 1p^2 +)(\beta 1p +)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^2 +)^2(b1p +)}{p^2(\alpha 1p^3 +)},\ n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{p(\alpha 1p^2 +)(\beta 1p +)^2},$$

$$n = \frac{(a1p^2 +)(b1p +)^3}{p^2(\alpha 1p^3 +)},\ n = \frac{(a1p +)^4(b1p +)}{p(\alpha 1p^4 +)},$$

$$n = \frac{(a1p +)^3(b1p +)^2}{p(\alpha 1p^4 +)},\ \&c.$$

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^6 + \ldots + A22x^6 +}{B1p^6 + \ldots - A22x^5y -}$

$$\frac{A23x^5y + A24x^4y^2 + A25x^3y^3 + A26x^2y^4 + A27xy^5}{A23x^4y^2 - A24x^3y^3 - A25x^2y^4 - A26xy^5 - A27y^6}\dot{y} = 0,$$

sont $n = \frac{a1\,p^4 +}{(\alpha1\,p^2+)(\zeta1\,p+)^2}$, $n = \frac{a1\,p^5 +}{(\alpha1\,p+)^4(\zeta1\,p+)}$,
$n = \frac{a1\,p^5 +}{(\alpha1\,p+)^3(\zeta1\,p+)^2}$, $n = \frac{(a1\,p^3+)(b1\,p+)^2}{(\alpha1\,p^2+)^2(\zeta1\,p+)}$,
$n = \frac{(a1\,p^3+)(b1\,p+)^2}{(\alpha1\,p^2+)(\zeta1\,p+)^3}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1\,p^6 + \ldots +}{B1\,p^6 + \ldots +}$
$\frac{A22x^6 + A23x^5y + A24x^4y^2 + A25x^3y^3 + A26x^2y^4 + A27xy^5 +}{B22x^6 + B23x^5y + B24x^4y^2 + B25x^3y^3 + B26x^2y^4 + B27xy^5 +}$
$\frac{A28y^6}{B28y^6}\,\dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a1\,p^4 +}{p(\alpha1\,p^3+)}$, $n = \frac{a1\,p^5 +}{p(\alpha1\,p^2+)^2}$,
$n = \frac{a1\,p^5 +}{p(\alpha1\,p+)^3(\zeta1\,p+)}$, $n = \frac{a1\,p^5 +}{p^2(\alpha1\,p+)^2(\zeta1\,p+)}$,
$n = \frac{a1\,p^5 +}{p^3(\alpha1\,p^2+)}$, $n = \frac{(a1\,p^3+)(b1\,p+)^2}{p(\alpha1\,p^2+)(\zeta1\,p+)^2}$,
$n = \frac{(a1\,p^3+)(b1\,p+)^2}{p^2(\alpha1\,p^3+)}$, $n = \frac{(a1\,p^2+)^2(b1\,p+)}{p(\alpha1\,p^4+)}$,
$n = \frac{(a1\,p^2+)(b1\,p+)^3}{p(\alpha1\,p^4+)}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1\,p^7 + \ldots +}{B1\,p^7 + \ldots -}$
$\frac{A29x^7 + A30x^6y + A31x^5y^2 + A32x^4y^3 + A33x^3y^4 +}{A29x^6y - A30x^5y^2 - A31x^4y^3 - A32x^3y^4 - A33x^2y^5 -}$
$\frac{A34x^2y^5 + A35xy^6}{A34xy^6 - A35y^7}\,\dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a1\,p^4 +}{\alpha1\,p^4 +}$,
$n = \frac{a1\,p^5 +}{(\alpha1\,p^2+)^2(\zeta1\,p+)}$, $n = \frac{a1\,p^5 +}{(\alpha1\,p^2+)(\zeta1\,p+)^3}$;
$n = \frac{(a1\,p^3+)(b1\,p+)^2}{(\alpha1\,p^3+)(\zeta1\,p+)^2}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1\,p^7 + \ldots + A29x^7 +}{B1\,p^7 + \ldots + B29x^7 +}$
$\frac{A30x^6y + A31x^5y^2 + A32x^4y^3 + A33x^3y^4 + A34x^2y^5 +}{B30x^6y + B31x^5y^2 + B32x^4y^3 + B33x^3y^4 + B34x^2y^5 +}$

$\frac{A35xy^6 + A36y^7}{B35xy^6 + B36y^7}\dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a1p^5 +}{p(\alpha 1p^2 +)(\mathfrak{C}1p +)^2}$,

$n = \frac{(a1p^3 +)(b1p +)^2}{p(\alpha 1p^4 +)}$, &c.

Les intégrales de l'éqnation $\dot{x} + \frac{A1p^8 + \ldots + A37x^8 +}{B1p^8 + \ldots - A37x^7y -}$

$\frac{A38x^7y + A39x^6y^2 + A40x^5y^3 + A41x^4y^4 + A42x^3y^5 + A43x^2y^6 +}{A38x^6y^2 - A39x^5y^3 - A40x^4y^4 - A41x^3y^5 - A42x^2y^6 - A43xy^7 -}$

$\frac{A44xy^7}{A44y^8}\dot{y} = 0$, sont $n = \frac{a1p^5 +}{(\alpha 1p^3 +)(\mathfrak{C}1p +)^2}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^8 + \ldots +}{B1p^8 + \ldots +}$

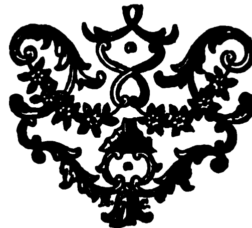
$\frac{A37x^8 + A38x^7y + A39x^6y^2 + A40x^5y^3 + A41x^4y^4 +}{B37x^8 + B38x^7y + B39x^6y^2 + B40x^5y^3 + B41x^4y^4 +}$

$\frac{A42x^3y^5 + A43x^2y^6 + A44xy^7 + A45y^8}{B42x^3y^5 + B43x^2y^6 + B45xy^7 + B45y^8}\dot{y} = 0$, sont

$n = \frac{a1p^5 +}{p(\alpha 1p^4 +)}$, &c.

Les intégrales de l'équation $\dot{x} + \frac{A1p^9 + \ldots + A46x^9}{B1p^9 + \ldots - A46x^8y}$,

sont $n = \frac{a1p^5 +}{\alpha 1p^5 +}$, &c.



APPLICATION DE CETTE MÉTHODE aux équations différencielles affectées de radicaux.

EXEMPLE.

SOIT $\dot{x} + \frac{-2x\sqrt{(px - p^{2})}}{p^{2} + y^{2}}\dot{y} = 0$, l'équation que l'on propose d'intégrer.

Je fais $\sqrt{(px - p^{2})} = z$; donc $z^{2} = px - p^{2}$, $\frac{\dot{z}}{\dot{y}} = 0$, $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{p}{2z}$; l'équation à intégrer sera

$$\dot{x} + \frac{-2xz}{p^{2} + y^{2}}\dot{y} = 0.$$

Soit $n = \frac{a1p + a2x + a3y + a4z}{\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y + \alpha 4z}$; en différenciant, on aura l'équation $\dot{x} + \frac{(\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y + \alpha 4z)\,a3 - (a1p + a2x + a3y + a4z)\,\alpha 3}{(\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y + \alpha 4z)\left(a2 + a4\frac{p}{2z}\right) - (a1p + a2x + a3y + a4z)\left(\alpha 2 + \alpha 4\frac{p}{2z}\right)}\dot{y} = 0$,

ou $\dot{x} + \frac{(\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y + \alpha 4z)\,2a3z - (a1p + a2x + a3y + a4z)\,2\alpha 3z}{(\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y + \alpha 4z)(2a2z + a4p) - (a1p + a2x + a3y + a4z)(2\alpha 2z + \alpha 4p)}\dot{y} = 0$, ou

$$\dot{x} + \frac{2a^{1}3\,p^{2} - 2a^{1}3\,px + 2a^{2}1\,pz + 2a^{1}2\,xz}{+ a^{3}1\,p^{2} - a^{2}2\,px + a^{1}3\,py + 2a^{1}1\,pz - 2a^{1}2\,yz + 2a^{2}2}\dot{y} = 0,$$

qui en supposant la condition $a^{3}1\,a^{1}2 - a^{2}1\,a^{2}2 + a^{1}1\,a^{1}3 = 0$, est la formule de toutes les équations aux premières différences, dont l'intégrale est

$n = \frac{a1p + a2x + a3y + a4z}{\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y + \alpha 4z}$; & comme cette formule ne renferme pas l'équation proposée, il s'ensuit que son

intégrale ne renferme pas non plus celle de notre équation.

Soit $n = \dfrac{a1p^2 + a2px + a3py + a4pz + a5x^2 + a6xy + a7xz + a8y^2 + a9yz}{\alpha 1p^2 + \alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4pz + \alpha 5x^2 + \alpha 6xy + \alpha 7xz + \alpha 8y^2 + \alpha 9yz}$, en différenciant on aura l'équation

$$\dot{x} + \frac{\begin{array}{l} -2a^8 1 p^4 \\ +2a^2 3 \end{array} \begin{array}{l} -2a^7 2 p^3 x \\ +2a^8 1 \\ -2a^1 3 \\ +2a^4 3 \\ -2a^2 4 \end{array} \begin{array}{l} -4a^4 4 p^3 y \end{array} \begin{array}{l} -2a^5 4 p^3 z \\ +2a^2 1 \end{array} \begin{array}{l} -2a^4 5 p^2 x^2 \\ +2a^7 2 \\ -2a^4 3 \\ +2a^2 4 \\ +2a^1 6 \end{array}}{\begin{array}{l} +a^3 1 p^4 \\ -2a^6 1 \\ +2a^2 2 \end{array} \begin{array}{l} -a^2 2 p^3 x \\ +3a^6 1 \\ -4a^1 4 \end{array} \begin{array}{l} -a^1 3 p^3 y \\ -2a^4 3 \\ +a^8 1 \\ +2a^7 2 \\ -2a^2 4 \end{array} \begin{array}{l} -2a^3 4 p^3 z \\ +2a^1 1 \end{array} \begin{array}{l} +3a^1 4 p^2 x^2 \\ +2a^2 5 \\ +a^5 2 \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{l} +4a^4 4 p^2 xy \\ -4a^1 7 \end{array} \begin{array}{l} -2a^2 7 p^2 xz \\ +2a^5 4 \\ +2a^1 2 \\ +2a^5 1 \end{array} \begin{array}{l} +2a^1 8 p^2 y^2 \end{array} \begin{array}{l} +4a^7 1 p^2 yz \end{array} \begin{array}{l} +2a^4 5 p x^3 \\ -2a^1 6 \end{array}}{\begin{array}{l} +a^2 4 p^2 xy \\ +3a^4 3 \\ -a^7 2 \\ +4a^4 5 \end{array} \begin{array}{l} +2a^3 4 p^2 xz \\ +4a^4 1 \end{array} \begin{array}{l} -a^4 4 p^2 y^2 \\ +2a^1 7 \\ +a^6 3 \\ +a^3 6 \end{array} \begin{array}{l} +2a^2 7 p^2 yz \\ -2a^1 2 \\ +2a^5 1 \end{array} \begin{array}{l} -2a^2 5 p x^3 \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{l} +4a^1 7 p x^2 y \end{array} \begin{array}{l} +2a^2 7 p x^2 z \\ -2a^2 3 \\ +2a^4 2 \end{array} \begin{array}{l} -2a^1 8 p x y^2 \end{array} \begin{array}{l} +4a^6 2 p x y z \end{array} \begin{array}{l} +2a^5 3 p y^2 z \end{array}}{\begin{array}{l} +a^1 6 p x^2 y \\ -3a^4 5 \end{array} \begin{array}{l} +2a^3 2 p x^2 z \end{array} \begin{array}{l} -3a^1 7 p x y^2 \\ -a^3 6 \end{array} \begin{array}{l} -2a^2 7 p x y z \\ +4a^2 3 \end{array} \begin{array}{l} +a^1 8 p y^3 \end{array}}$$

$$\frac{+2a^1 5 x^3 z + 4a^3 5 x^2 y z + 2a^2 6 x y^2 z}{\begin{array}{l} -2a^6 2 p y^2 z \\ +2a^1 3 \end{array} -2a^1 5 x^2 y z - 4a^3 5 x y^2 z - 2a^2 6 y^3 z}\ \dot{y} = 0,$$ qui

en supposant les cent vingt-six conditions du Lemme, sera la formule de toutes les équations dont l'intégrale est $n = \dfrac{a1p^2 + }{\alpha 1 p^2 + }$.

Pour pouvoir rapporter notre équation à cette formule, il faut la multiplier par $c1p^2 + c2px - c3py + c4pz + c5x^2 + c6xy + c7xz + c8y^2 + c9yz$, on

on aura $\dot{x} + \dfrac{2c4p^3x - 2c4p^2x^2 + 2c9p^2xy - \atop + 2c7}{c1p^4 + c2p^3x + c3p^3y + c4p^3z + c5p^2x^2 + c6p^2xy +}$

$\dfrac{2c1p^2xz - 2c7px^3 - 2c9px^2y - 2c2px^2z - 2c3pxyz - 2c5x^3z -}{c7p^2xz + c8p^2y^2 + c9p^2yz + c2pxy^2 + c3py^3 + c4py^2z + c5x^2y^2 + \atop + c1}$

$\dfrac{2c6x^2yz - 2c8xy^2z}{c6xy^3 + c7xy^2z + c8y^4 + c9y^3z}\dot{y} = 0$; & en comparant, on aura

$- 2a^8 1 + 2a^1 3 = 0,$
$- 2a^7 2 + 2a^8 1 - 2a^1 3 + 2a^4 3 - 2a^2 4 = 2c4;$
$- 2a^4 5 + 2a^7 2 - 2a^4 3 + 2a^2 4 + 2a^1 6 = - 2c4 + 2c7,$
$2a^4 5 - 2a^1 6 = - 2c7,$
$- a^1 3 - 2a^4 3 + a^8 1 + 2a^7 2 - 2a^2 4 = c3,$
$a^2 4 + 3a^4 3 - a^7 2 + 4a^4 5 = c6,$
$a^1 6 - 3a^4 5 = 0.$

$- 4a^4 4 = 0,$
$4a^4 4 - 4a^1 7 = 2c9,$
$4a^1 7 = - 2c9,$
$a^4 4 + 2a^1 7 + a^6 3 + 2a^3 6 = c8 + c1.$

$- 2a^5 4 + 2a^2 1 = 0,$
$- 2a^2 7 + 2a^5 4 + 2a^1 2 + 2a^5 1 = - 2c1,$
$2a^2 7 - 2a^2 3 + 2a^4 2 = - 2c2,$
$2a^2 7 - 2a^1 2 + 2a^5 1 = c9,$
$- 2a^2 7 + 4a^2 3 = 0.$

$2a^1 8 = 0,$
$- 2a^1 8 = 0,$
$a^1 8 = c3.$ $4a^7 1 = 0.$

$4a^6 2 = - 2c3,$
$- 2a^6 2 + 2a^3 3 = c4.$ $2a^5 3 = 0.$

$2a'5 = -2c5,$
$-2a'5 = 0.$

$4a^35 = -2c6,$
$-4a^35 = c7.$

$2a^26 = -2c8,$
$-2a^26 = c9.$

$a^31 - 2a^61 + 2a^22 = c1,$
$-a^22 + 3a^61 - 4a'4 = c2,$
$3a'4 + 2a^25 + a^52 = c5,$
$-2a^25 = 0.$

$-2a^34 + 2a'1 = c4,$
$2a^34 + 4a^41 = c7.$

$2a^32 = 0. \quad c5 = 0. \quad c6 = 0. \quad c8 = 0.$

donc 1.° $c3 = 0$, $c5 = 0$, $c6 = 0$, $c7 = 0$, $c8 = 0$, $c9 = 0$.

2.° $a^71 = 0,$
$a^32 = 0,\ a^62 = 0,\ a^72 = -\frac{1}{2}c4,$
$a^33 = \frac{1}{2}c4,\ a^43 = 0,\ a^53 = 0,$
$a^24 = -\frac{1}{2}c4,\ a^44 = 0.$
$a'5 = 0,\ a^25 = 0,\ a^35 = 0,\ a^45 = 0,$
$a'6 = 0,\ a^26 = 0.$
$a'7 = 0,$
$a'8 = 0.$

3.° $a^81 - a'3 = 0.$

$a^63 + 2a^36 = c1.$

$$a^{2}1 - a^{5}4 = 0,$$
$$- a^{2}7 + a^{5}4 + a^{1}2 + a^{5}1 = - c1,$$
$$a^{2}7 - a^{2}3 + a^{4}2 = - c2,$$
$$a^{2}7 - a^{1}2 + a^{5}1 = 0,$$
$$2a^{2}3 - a^{2}7 = 0.$$

$$a^{3}1 - 2a^{6}1 + 2a^{2}2 = c1,$$
$$- a^{2}2 + 3a^{6}1 - 4a^{1}4 = c2.$$
$$3a^{1}4 + a^{5}2 = 0.$$

$$a^{1}1 - a^{3}4 = \tfrac{1}{2}c4,$$
$$2a^{4}1 + a^{3}4 = 0.$$

En ſubſtituant pour $a^{7}1$, $a^{3}2$, $a^{6}2$, $a^{7}2$, $a^{3}3$, $a^{4}3$, $a^{5}3$, $a^{2}4$, $a^{4}4$, $a^{1}5$, $a^{2}5$, $a^{3}5$, $a^{4}5$, $a^{1}6$, $a^{2}6$, $a^{1}7$, $a^{1}8$, leurs valeurs dans les cent vingt-ſix conditions de la formule, on aura $a^{3}1a^{1}2 - a^{2}1a^{2}2 + a^{1}1a^{1}3 = 0$, $a^{4}1a^{1}2 + a^{1}1a^{2}3 = 0$, $a^{4}1a^{2}2 + a^{1}1a^{1}4 = 0$, $a^{4}1a^{1}3 - a^{3}1a^{2}3 + a^{2}1a^{1}4 = 0$, $- a^{2}2a^{2}3 + a^{1}2a^{1}4 = 0$, $a^{5}1a^{1}2 - a^{2}1a^{4}2 + \tfrac{1}{2}c4a^{1}1 = 0$, $a^{5}1a^{2}2 - a^{3}1a^{4}2 - \tfrac{1}{2}c4a^{1}1 = 0$, $a^{5}1a^{1}3 - \tfrac{1}{2}c4a^{3}1 - \tfrac{1}{2}c4a^{2}1 = 0$, $a^{4}2a^{1}3 - \tfrac{1}{2}c4a^{2}2 - \tfrac{1}{2}c4a^{1}2 = 0$, $- a^{4}1a^{4}2 = 0$, $a^{5}1a^{2}3 - \tfrac{1}{2}c4a^{4}1 = 0$, $a^{4}2a^{2}3 = 0$, $a^{5}1a^{1}4 - \tfrac{1}{2}c4a^{4}1 = 0$, $a^{4}2a^{1}4 = 0$, $\tfrac{1}{2}c4a^{1}4 + \tfrac{1}{2}c4a^{2}3 = 0$, $a^{6}1a^{1}2 - a^{2}1a^{5}2 = 0$, $a^{6}1a^{2}2 - a^{3}1a^{5}2 + a^{1}1a^{3}4 = 0$, $a^{6}1a^{1}3 + a^{2}1a^{3}4 = 0$, $a^{5}2a^{1}3 + a^{1}2a^{3}4 = 0$, $- a^{4}1a^{5}2 = 0$, $a^{6}1a^{2}3 = 0$, $a^{5}2a^{2}3 = 0$, $a^{6}1a^{1}4 - a^{4}1a^{3}4 = 0$, $a^{5}2a^{1}4 = 0$, $- a^{2}3a^{3}4 = 0$, $a^{6}1a^{4}2 - a^{5}1a^{5}2 = 0$, $\tfrac{1}{2}c4a^{6}1 = 0$; $\tfrac{1}{2}c4a^{5}2 = 0$, $- \tfrac{1}{2}c4a^{6}1 - a^{5}1a^{3}4 = 0$, $- \tfrac{1}{2}c4a^{5}2 = 0$, $- \tfrac{1}{2}c4a^{3}4 = 0$, $a^{8}1a^{1}2 +$

$\frac{1}{2}c4a^{2}1 + a'1\,a^{6}3 = 0$, $a^{8}1\,a^{2}2 + \frac{1}{2}c4a^{3}1 + a'1\,a^{5}4 = 0$, $a^{8}1\,a'3 - a^{3}1\,a^{6}3 + a^{2}1\,a^{5}4 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a'3 - a^{2}2a^{6}3 + a'2\,a^{5}4 = 0$, $\frac{1}{2}c4a^{4}1 = 0$, $a^{8}1\,a^{2}3 - a^{4}1\,a^{6}3 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{2}3 = 0$, $a^{8}1\,a'4 - a^{4}1\,a^{5}4 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a'4 = 0$, $a^{6}3\,a'4 - a^{2}3\,a^{5}4 = 0$, $a^{8}1\,a^{4}2 + \frac{1}{2}c4a^{5}1 + a'1\,a^{3}6 = 0$, $\frac{1}{2}c4a^{8}1 - a^{5}1\,a^{6}3 + a^{2}1\,a^{3}6 = 0$, $-\frac{1}{4}(c4)^{2} - a^{4}2a^{6}3 + a'2\,a^{3}6 = 0$, $-\frac{1}{4}c4a^{8}1 - a^{5}1\,a^{5}4 + a^{3}1\,a^{3}6 = 0$; $\frac{1}{4}(c4)^{2} - a^{4}2a^{5}4 + a^{2}2a^{3}6 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{6}3 - \frac{1}{2}c4a^{5}4 + a'3\,a^{3}6 = 0$, $a^{4}1\,a^{3}6 = 0$, $a^{2}3\,a^{3}6 = 0$, $a'4a^{3}6 = 0$, $a^{8}1\,a^{5}2 + \frac{1}{2}c4a^{6}1 + a'1\,a^{2}7 = 0$, $-a^{6}1\,a^{6}3 + a^{2}1\,a^{2}7 = 0$, $-a^{5}2a^{6}3 + a'2a^{2}7 = 0$, $a^{8}1\,a^{3}4 - a^{6}1\,a^{5}4 + a^{3}1\,a^{2}7 = 0$, $-\frac{1}{2}c4a^{3}4 - a^{5}2a^{5}4 + a^{2}2a^{2}7 = 0$, $a^{6}3\,a^{3}4 + a'3\,a^{2}7 = 0$, $a^{4}1\,a^{2}7 = 0$, $a^{2}3\,a^{2}7 = 0$, $a'4\,a^{2}7 = 0$, $-a^{6}1\,a^{3}6 + a^{5}1\,a^{2}7 = 0$, $-a^{5}2a^{3}6 + a^{4}2a^{2}7 = 0$, $\frac{1}{2}c4a^{2}7 = 0$, $-a^{3}4a^{3}6 - \frac{1}{2}c4a^{2}7 = 0$.

Ou $c4$ eſt $= 0$, ou $c4$ n'eſt pas $= 0$. Je ſuppoſe premièrement que $c4$ n'eſt pas $= 0$; dans ce cas, je puis donner à $c4$ telle valeur que je voudrai. Soit $c4 = 1$, j'aurai $a^{6}1 = 0$, $a^{5}2 = 0$, $a^{3}4 = 0$, $a^{4}1 = 0$, $a^{2}3 = 0$, $a'4 = 0$, $a^{2}7 = 0$; & en ſubſtituant dans les équations (3.°), nous aurons $a^{4}2 = -c2$, $a^{2}2 = -c2$, $a^{3}1 = c1 + 2c2$, $a'1 = \frac{1}{2}$.

Donc 1.° $c3 = 0$, $c4 = 1$, $c5 = 0$, $c6 = 0$, $c7 = 0$ $c8 = 0$, $c9 = 0$.

2.° $a^{1}1 = \frac{1}{2}$, $a^{3}1 = c1 + 2c2$, $a^{4}1 = 0$,

$a^{2}2 = - c2$, $a^{3}2 = 0$, $a^{4}2 = - c2$;

$a^{2}3 = 0$, $a^{3}3 = \frac{1}{2}$, $a^{4}3 = 0$,

$a^{1}4 = 0$, $a^{2}4 = - \frac{1}{2}$, $a^{3}4 = 0$,

$a^{1}5 = 0$, $a^{2}5 = 0$, $a^{3}5 = 0$,

$a^{1}6 = 0$, $a^{2}6 = 0$,

$a^{1}7 = 0$, $a^{2}7 = 0$,

$a^{1}8 = 0$.

$a^{6}1 = 0$, $a^{7}1 = 0$,

$a^{5}2 = 0$, $a^{6}2 = 0$, $a^{7}2 = - \frac{1}{2}$,

$a^{5}3 = 0$,

$a^{4}4 = 0$,

$a^{4}5 = 0$,

3.° $a^{8}1 - a^{1}3 = 0$, $a^{6}3 + 2a^{3}6 = c1$;

$a^{2}1 - a^{5}4 = 0$,

$a^{5}4 + a^{1}2 + a^{5}1 = - c1$,

$- a^{1}2 + a^{5}1 = 0$.

4.° $(c1 + 2c2)a^{1}2 + c2a^{2}1 + \frac{1}{2}a^{1}3 = 0$;

$a^{5}1\,a^{1}2 + c2\,a^{2}1 + \frac{1}{4} = 0$,

$- c2a^{5}1 + c2.(c1 + 2c2) - \frac{1}{4} = 0$,

$a^{5}1\,a^{1}3 - \frac{1}{2}.(c1 + 2c2) - \frac{1}{2}a^{2}1 = 0$,

$- c2a^{1}3 + \frac{1}{2}c2 - \frac{1}{2}a^{1}2 = 0$,

$a^{8}1\,a^{1}2 + \frac{1}{2}a^{2}1 - \frac{1}{2}a^{6}3 = 0$,

$- c2\,a^{8}1 + \frac{1}{2}.(c1 + 2c2) + \frac{1}{2}a^{5}4 = 0$,

$a^{8}1\,a^{1}3 - (c1 + 2c2)\,a^{6}3 + a^{2}1\,a^{5}4 = 0$,

$- \frac{1}{2}a^{1}3 + c2\,a^{6}3 + a^{1}2\,a^{5}4 = 0$,

$- c2\,a^{8}1 + \frac{1}{2}a^{5}1 + \frac{1}{2}a^{3}6 = 0$,

$\frac{1}{2}a^{8}1 - a^{5}1\,a^{6}3 + a^{2}1\,a^{3}6 = 0$,

$- \frac{1}{4} + c2\, a^{5}3 + a'2\, a^{3}6 = 0,$

$- \frac{1}{2} a^{8}1 - a^{5}1\, a^{5}4 + (c1 + 2c2)\, a^{3}6 = 0;$

$\frac{1}{4} + c2\, a^{5}4 - c2\, a^{3}6 = 0,$

$- \frac{1}{2} a^{5}3 - \frac{1}{2} a^{5}4 + a'3\, a^{3}6 = 0.$

Au moyen de la troisième des équations (4.°), on aura $a^{5}1 = \frac{4c1c2 + 8(c2)^2 - 1}{4c2}$; & en substituant dans les équations (3.°), on aura $a'2 = \frac{4c1c2 + 8(c2)^2 - 1}{4c2}$, $a^{5}4 = \frac{-6c1c2 - 8(c2)^2 + 1}{2c2}$, $a^{2}1 = \frac{-6c1c2 - 8(c2)^2 + 1}{2c2}$.

Au moyen de la première des équations (4.°), on aura $a'3 = \frac{-4(c1)^2 c2 - 4c1(c2)^2 + c1}{2c2}$;
& en substituant dans les équations (3.°), on aura $a^{8}1 = \frac{-4(c1)^2 c2 - 4c1(c2)^2 + c1}{2c2}$.

Au moyen de la quatorzième des équations (4.°), on aura $a^{3}6 = \frac{3 - 12c1c2 - 16(c2)^2}{4c2}$;
& en substituant dans les équations (3.°), on aura $a^{6}3 = \frac{-3 + 14c1c2 + 16(c2)^2}{2c2}$.

Les équations auxquelles nous avons encore à satisfaire, sont la seconde, la quatrième, la cinquième, la sixième, la septième, la huitième, la neuvième, la dixième, la onzième, la douzième, la treizième & la quinzième des équations (4.°).

En y substituant pour $a^{5}1$, $a'2$, $a^{5}4$, $a^{2}1$, $a'3$, $a^{8}1$, $a^{3}6$, $a^{6}3$, les valeurs que nous venons de trouver, toutes celles qui ne s'anéantiront pas, donneront $4c1c2 + 4(c2)^2 - 1 = 0$; donc $c1 = \frac{1 - 4(c2)^2}{4c2}$.

Je puis donner à $c2$ telle valeur que je voudrai, excepté que je ne peux pas faire $c2 = 0$.

Soit $c2 = 1$; donc $c1 = -\frac{3}{4}$, on aura

$a^1 1 = \frac{1}{2}$, $a^2 1 = -\frac{5}{4}$, $a^3 1 = \frac{5}{4}$, $a^4 1 = 0$,
$a^1 2 = 1$, $a^2 2 = -1$, $a^3 2 = 0$, $a^4 2 = -1$,
$a^1 3 = 0$, $a^2 3 = 0$, $a^3 3 = \frac{1}{2}$. $a^4 3 = 0$,
$a^1 4 = 0$, $a^2 4 = -\frac{1}{2}$, $a^3 4 = 0$, $a^4 4 = 0$,
$a^1 5 = 0$, $a^2 5 = 0$, $a^3 5 = 0$, $a^4 5 = 0$,
$a^1 6 = 0$, $a^2 6 = 0$, $a^3 6 = -1$,
$a^1 7 = 0$, $a^2 7 = 0$,
$a^1 8 = 0$,

$a^5 1 = 1$, $a^6 1 = 0$, $a^7 1 = 0$, $a^8 1 = 0$,
$a^5 2 = 0$, $a^6 2 = 0$, $a^7 2 = -\frac{1}{2}$,
$a^5 3 = 0$, $a^6 3 = \frac{5}{4}$,
$a^5 4 = -\frac{5}{4}$,

ou $\alpha 1 a 2 - a 1 \alpha 2 = \frac{1}{2}$, $\alpha 1 a 3 - a 1 \alpha 3 = -\frac{5}{4}$,
$\alpha 2 a 3 - a 2 \alpha 3 = 1$, $\alpha 2 a 4 - a 2 \alpha 4 = -1$,
$\alpha 3 a 4 - a 3 \alpha 4 = 0$, $\alpha 3 a 5 - a 3 \alpha 5 = 0$,
$\alpha 4 a 5 - a 4 \alpha 5 = 0$, $\alpha 4 a 6 - a 4 \alpha 6 = -\frac{1}{2}$,
$\alpha 5 a 6 - a 5 \alpha 6 = 0$, $\alpha 5 a 7 - a 5 \alpha 7 = 0$,
$\alpha 6 a 7 - a 6 \alpha 7 = 0$, $\alpha 6 a 8 - a 6 \alpha 8 = 0$,
$\alpha 7 a 8 - a 7 \alpha 8 = 0$, $\alpha 7 a 9 - a 7 \alpha 9 = 0$,
$\alpha 8 a 9 - a 8 \alpha 9 = 0$,

$\alpha 1 a 4 - a 1 \alpha 4 = \frac{5}{4}$, $\alpha 1 a 5 - a 1 \alpha 5 = 0$,
$\alpha 2 a 5 - a 2 \alpha 5 = 0$, $\alpha 2 a 6 - a 2 \alpha 6 = -1$,
$\alpha 3 a 6 - a 3 \alpha 6 = \frac{1}{2}$, $\alpha 3 a 7 - a 3 \alpha 7 = 0$,
$\alpha 4 a 7 - a 4 \alpha 7 = 0$, $\alpha 4 a 8 - a 4 \alpha 8 = 0$,
$\alpha 5 a 8 - a 5 \alpha 8 = 0$, $\alpha 5 a 9 - a 5 \alpha 9 = 0$,
$\alpha 6 a 9 - a 6 \alpha 9 = -1$,

$\alpha 1 a6 - a1 \alpha 6 = 1$, $\alpha 1 a7 - a1 \alpha 7 = 0$;
$\alpha 2 a7 - a2 \alpha 7 = 0$, $\alpha 2 a8 - a2 \alpha 8 = 0$,
$\alpha 3 a8 - a3 \alpha 8 = 0$, $\alpha 3 a9 - a3 \alpha 9 = \frac{5}{4}$,
$\alpha 4 a9 - a4 \alpha 9 = -\frac{5}{4}$,

$\alpha 1 a8 - a1 \alpha 8 = 0$, $\alpha 1 a9 - a1 \alpha 9 = 0$,
$\alpha 2 a9 - a2 \alpha 9 = -\frac{1}{2}$,

donc $\alpha 1 = \frac{\frac{1}{2} + a1 \alpha 2}{a2}$. Je ſubſtitue cette valeur de $\alpha 1$ par-tout où il ſe trouve; j'aurai

$$\alpha 2 a3 - a2 \alpha 3 = \frac{-\frac{1}{4} a2 - \frac{1}{2} a3}{a1} = 1,$$

$$\alpha 2 a4 - a2 \alpha 4 = \frac{\frac{1}{4} a2 - \frac{1}{2} a4}{a1} = -1,$$

$$\alpha 2 a5 - a2 \alpha 5 = \frac{-\frac{1}{2} a5}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2 a6 - a2 \alpha 6 = \frac{a2 - \frac{1}{2} a6}{a1} = -1,$$

$$\alpha 2 a7 - a2 \alpha 7 = \frac{-\frac{1}{2} a7}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2 a8 - a2 \alpha 8 = \frac{-\frac{1}{2} a8}{a1} = 0,$$

$$\alpha 2 a9 - a2 \alpha 9 = \frac{-\frac{1}{2} a9}{a1} = -\frac{1}{2}.$$

$\alpha 2 = \frac{1 + a2 \alpha 3}{a3}$. Je mets cette valeur de $\alpha 2$ par-tout où il ſe trouve; j'aurai $\alpha 3 a4 - a3 \alpha 4 = \frac{-a3 - a4}{a2} = 0$,

$$\alpha 3 a5 - a3 \alpha 5 = \frac{-a5}{a2} = 0,$$

$$\alpha 3 a6 - a3 \alpha 6 = \frac{-a3 - a6}{a2} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha 3 a7 - a3 \alpha 7 = \frac{-a7}{a2} = 0,$$

$$\alpha 3 a8 - a3 \alpha 8 = \frac{-a8}{a2} = 0,$$

$$\alpha 3 a9 - a3 \alpha 9 = \frac{-\frac{1}{2} a3 - a9}{a2} = \frac{5}{4}.$$

$\alpha 3 =$

$\alpha 3 = \frac{a3\,\alpha 4}{a4}$. Je mets cette valeur de $\alpha 3$ par-tout où il se trouve; j'aurai $\alpha 4 a6 - a4\alpha 6 = \frac{\frac{1}{2}a4}{a3} = -\frac{1}{2}$, $\alpha 4 a9 - a4\alpha 9 = \frac{\frac{5}{4}a4}{a3} = -\frac{5}{4}$.

$\alpha 4 = \frac{a4\,\alpha 5}{a5}$. Je substitue cette valeur de $\alpha 4$; j'aurai $\alpha 5 a6 - a5\alpha 6 = \frac{-\frac{1}{2}a5}{a4} = 0$,

$\alpha 5 a9 - a5\alpha 9 = \frac{-\frac{5}{4}a5}{a4} = 0$.

$\alpha 5 = \frac{a5\,\alpha 6}{a6}$. Je substitue cette valeur de $\alpha 5$; j'aurai $a5.(\alpha 6 a9 - a6\alpha 9) = 0$; mais $\alpha 6 a9 - a6\alpha 9 = -1$; donc $a5 = 0$, $a4 = -a3$, $-a3 - 2a9 = \frac{5}{2}a2$, $a8 = 0$, $a7 = 0$, $-a3 - a6 = \frac{1}{2}a2$, $a9 = a1$, $2a2 - a6 = -2a1$, $5a2 - 2a4 = -4a1$, $-5a2 - 2a3 = 4a1$.

Soit $a1 = 1$, $a2 = -1$, on aura les coëfficiens du numérateur de l'intégrale, $a1 = 1$, $a2 = -1$, $a3 = \frac{1}{2}$, $a4 = -\frac{1}{2}$, $a5 = 0$, $a6 = 0$, $a7 = 0$, $a8 = 0$, $a9 = 1$.

Pour avoir ceux du dénominateur, je substitue ces valeurs dans les trente-six équations entre ces coëfficiens; j'aurai $-\alpha 1 - \alpha 2 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\alpha 1 - \alpha 3 = -\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{2}\alpha 1 - \alpha 4 = \frac{5}{4}$, $\alpha 5 = 0$, $\alpha 6 = -1$, $\alpha 7 = 0$, $\alpha 8 = 0$, $\alpha 1 - \alpha 9 = 0$, $\frac{1}{2}\alpha 2 + \alpha 3 = 1$, $-\frac{1}{2}\alpha 2 + \alpha 4 = -1$, $\alpha 2 + \alpha 9 = -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\alpha 3 - \frac{1}{2}\alpha 4 = 0$, $\alpha 3 - \frac{1}{2}\alpha 4 = \frac{5}{4}$, $\alpha 4 + \frac{1}{2}\alpha 9 = -\frac{5}{4}$; donc $\alpha 9 = \alpha 1$, $\alpha 4 = -\alpha 3$, $\alpha 1 + \alpha 2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha 1 - 2\alpha 3 = -\frac{5}{2}$, $\alpha 2 + 2\alpha 3 = 2$.

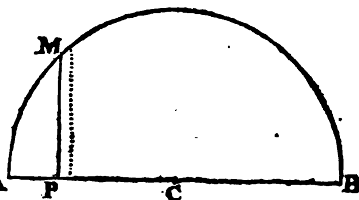
Soit $\alpha 1 = 0$, on aura $\alpha 1 = 0$, $\alpha 2 = -\frac{1}{2}$; $\alpha 3 = \frac{5}{4}$, $\alpha 4 = -\frac{5}{4}$, $\alpha 5 = 0$, $\alpha 6 = -1$, $\alpha 7 = 0$, $\alpha 8 = 0$, $\alpha 9 = 0$; par conséquent l'intégrale de l'équation $\dot{x} + \frac{-2x\sqrt{(px-p^2)}}{p^2+y^2}\dot{y} = 0$; est $n = \frac{p^2 - px + \frac{1}{2}py - \frac{1}{2}p\sqrt{(px-p^2)} + y\sqrt{(px-p^2)}}{-\frac{1}{2}px + \frac{5}{4}py - \frac{5}{4}p\sqrt{(px-p^2)} - xy}$,

ou $n = \frac{2p^2 - 2px + py - p\sqrt{(px-p^2)} + 2y\sqrt{(px-p^2)}}{-2px + 5py - 5p\sqrt{(px-p^2)} - 4xy}$,

ou $n = \frac{5p^2 - 4px + 2xy + 5y\sqrt{(px-p^2)}}{2px - 5py + 5p\sqrt{(px-p^2)} + 4xy}$.



APPLICATION DE CETTE MÉTHODE aux Quadratures.



AMB étant un demi-cercle décrit du centre C & du rayon $CA = p$, soit $AP = x$, PM sera $= \sqrt{(2px - xx)}$; soit l'aire $AMP = \int$, on aura $\dot{\int} = \sqrt{(2px - xx.)}\,\dot{x}$; soit $\int = p\dot{y}$, on aura $\dot{x} + \frac{-p}{\sqrt{(2px - xx)}}\dot{y} = 0$. Je fais $z = \sqrt{(2px - xx)}$; donc $z^2 = 2px - xx$, $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{p - x}{z}$.

L'équation à intégrer sera $\dot{x} + \frac{-p}{z}\dot{y} = 0$; & l'intégrale sera $n = \frac{a1p + a2x + a3y + a4z}{\alpha 1p + \alpha 2x + \alpha 3y + \alpha 4z}$, ou $n = \frac{a1p^2 + a2px + a3py + a4pz + a5x^2 + a6xy + a7xz + a8y^2 + a9yz}{\alpha 1p^2 + \alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4pz + \alpha 5x^2 + \alpha 6xy + \alpha 7xz + \alpha 8y^2 + \alpha 9yz}$, ou $n = \frac{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4p^2z + a5px^2 + a6pxy + a7pxz + a8py^2 + a9pyz + a10x^3 + a11x^2y + a12x^2z + a13xy^2 + a14xyz + a15y^3 + a16y^2z}{\alpha 1p^3 + \alpha 2p^2x + \alpha 3p^2y + \alpha 4p^2z + \alpha 5px^2 + \alpha 6pxy + \alpha 7pxz + \alpha 8py^2 + \alpha 9pyz + \alpha 10x^3 + \alpha 11x^2y + \alpha 12x^2z + \alpha 13xy^2 + \alpha 14xyz + \alpha 15y^3 + \alpha 16y^2z}$, &c.

Mais comme je ne crois pas qu'il soit possible qu'une fonction de dimension nulle de p, de x & de y, autre que $\frac{y}{p} + pc$; soit telle que sa différence égalée à o, étant $\dot{x} + \frac{N}{M}\dot{y} = 0$; M & N ne soient fonctions que de p & de x, lorsque les fonctions N, M seront dans ce cas, pour

rendre la méthode générale des quadratures plus simple, je prendrai toûjours $n = \frac{y}{p} + p\kappa$ pour l'intégrale de l'équation $\dot{x} + \frac{N}{M}\dot{y} = 0$. Par $p\kappa$ j'entends une fonction quelconque de dimension nulle de p & de x.

S'il n'entre aucun radical dans les fonctions N, M, c'est-à-dire, si l'équation proposée est $\dot{x} + \frac{b1p + b2x}{\beta 1p + \beta 2x}\dot{y} = 0$,

ou $\dot{x} + \frac{b1p^2 + b2px + b3x^2}{\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3x^2}\dot{y} = 0$,

ou $\dot{x} + \frac{b1p^3 + b2p^2x + b3px^2 + b4x^3}{\beta 1p^3 + \beta 2p^2x + \beta 3px^2 + \beta 4x^3}\dot{y} = 0$, ou

$\dot{x} + \frac{b1p^4 + b2p^3x + b3p^2x^2 + b4px^3 + b5x^4}{\beta 1p^4 + \beta 2p^3x + \beta 3p^2x^2 + \beta 4px^3 + \beta 5x^4}\dot{y} = 0$, &c.

l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p + d2x}{\delta 1p + \delta 2x}$,

ou $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^2 + d2px + d3x^2}{\delta 1p^2 + \delta 2px + \delta 3x^2}$,

ou $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^3 + d2p^2x + d3px^2 + d4x^3}{\delta 1p^3 + \delta 2p^2x + \delta 3px^2 + \delta 4x^3}$, ou

$n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^4 + d2p^3x + d3p^2x^2 + d4px^3 + d5x^4}{\delta 1p^4 + \delta 2p^3x + \delta 3p^2x^2 + \delta 4px^3 + \delta 5x^4}$, &c.

I.

Soit $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p + d2x}{\delta 1p + \delta 2x} = \frac{d1p^2 + d2px + \delta 1py + \delta 2xy}{\delta 1p^2 + \delta 2px + 0py + 0xy}$

$= \frac{a1p^2 + a2px + a3py + a4xy}{\alpha 1p^2 + \alpha 2px + \alpha 3py + \alpha 4xy}$; en différenciant, on aura

l'équation $\ddot{x} + \frac{a^2 1p^2 + a^1 2px + a^2 2x^2 + a^3 1}{a^1 1p^2}\ddot{y} = 0$; qui, en

supposant $a^3 1 - a^1 2 = 0$, $a^1 3 = 0$, & la condition $a^3 1\, a^1 2 - a^2 1\, a^2 2 + a^1 1\, a^1 3 = 0$, sera

la formule de toutes les équations, dont l'intégrale est $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p + d2x}{\delta 1p + \delta 2x}$.

II.

Soit $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^2 + d2px + d3x^2}{\delta 1p^2 + \delta 2px + \delta 3x^2} =$

$$\frac{d1p^3 + d2p^2x + \delta 1p^2y + d3px^2 + \delta 2pxy + \delta 3x^2y}{\delta 1p^3 + \delta 2p^2x + op^2y + \delta 3px^2 + opxy + ox^2y} =$$

$$\frac{a1p^3 + a2p^2x + a3p^2y + a4px^2 + a5pxy + a6x^2y}{\alpha 1p^3 + \alpha 2p^2x + \alpha 3p^2y + \alpha 4px^2 + \alpha 5pxy + \alpha 6x^2y};$$ en différenciant, on aura l'équation

$$\dot{x} + \frac{\begin{array}{llllll} a^{2}1p^4 & + a^{1}2p^3x & - a^{1}3p^2x^2 & + a^{1}4px^3 & + a^{2}4x^4 \\ & + a^{4}1 & + a^{3}2 & + a^{4}2 & \\ & & + a^{5}1 & & \end{array}}{a^{1}1p^4 + 2a^{3}1p^3x + a^{2}2p^2x^2}\,\dot{y} = 0,$$

qui, en supposant $a^{4}1 - a^{1}2 = 0$, $a^{1}3 + a^{5}1 = 0$, $a^{4}2 - a^{1}4 = 0$, $a^{2}3 = 0$, $a^{1}5 = 0$, $a^{3}3 = 0$, & les quinze conditions du Lemme, sera la formule de toutes les équations, dont l'intégrale est $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^2 + d2px + d3x^2}{\delta 1p^2 + \delta 2px + \delta 3x^2}$.

III.

Soit $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^3 + d2p^2x + d3px^2 + d4x^3}{\delta 1p^3 + \delta 2p^2x + \delta 3px^2 + \delta 4x^3} =$

$$\frac{d1p^4 + d2p^3x + \delta 1p^3y + d3p^2x^2 + \delta 2p^2xy + d4px^3 + \delta 3px^2y + \delta 4x^3y}{\delta 1p^4 + \delta 2p^3x + op^3y + \delta 3p^2x^2 + op^2xy + \delta 4px^3 + opx^2y + ox^3y} =$$

$$\frac{a1p^4 + a2p^3x + a3p^3y + a4p^2x^2 + a5p^2xy + a6px^3 + a7px^2y + a8x^3y}{\alpha 1p^4 + \alpha 2p^3x + \alpha 3p^3y + \alpha 4p^2x^2 + \alpha 5p^2xy + \alpha 6px^3 + \alpha 7px^2y + \alpha 8x^3y};$$

en différenciant, on aura l'équation

$$\dot{x} + \frac{\begin{array}{lllllll} a^{2}1p^6 & + a^{1}2p^5x & - a^{1}3p^4x^2 & - a^{3}3p^3x^3 & - a^{1}5p^2x^4 & + a^{1}6px^5 & + a^{2}6x^6 \\ & + a^{4}1 & + a^{3}2 & + a^{1}4 & + a^{3}4 & + a^{4}4 & \\ & & + a^{6}1 & + a^{5}2 & + a^{6}2 & & \\ & & & + a^{7}1 & & & \end{array}}{\begin{array}{l} a^{1}1p^6 + 2a^{3}1p^5x + a^{2}2p^4x^2 + 2a^{4}2p^3x^3 + a^{2}4p^2x^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 3a^{5}1 \end{array}}\,\dot{y} = 0,$$

qui, en supposant $a^{4}1 - a'2 = 0$, $a'3 + a^{6}1 = 0$; $a^{2}3 = 0$, $a^{5}2 - a'4 + 3a^{3}3 + 3a^{7}1 = 0$, $a^{4}3 = 0$, $a^{6}2 + a'5 = 0$, $a^{2}5 + 3a^{5}3 = 0$, $a^{4}4 - a'6 = 0$, $a^{3}5 = 0$, $a'7 = 0$, & les soixante-dix conditions du Lemme, sera la formule de toutes les équations, dont l'intégrale est $n = \frac{y}{p} + \frac{d1\,p^3 +}{\delta 1\,p^3 +}$.

I V.

Soit $n = \frac{y}{p} + \frac{d1\,p^4 + d2\,p^3x + d3\,p^2x^2 + d4\,px^3 + d5\,x^4}{\delta 1\,p^4 + \delta 2\,p^3x + \delta 3\,p^2x^2 + \delta 4\,px^3 + \delta 5\,x^4} =$

$$\frac{d1\,p^5 + d2\,p^4x + \delta 1\,p^4y + d3\,p^3x^2 + \delta 2\,p^3xy + d4\,p^2x^3 + \delta 3\,p^2x^2y +}{\delta 1\,p^5 + \delta 2\,p^4x + 0p^4y + \delta 3\,p^3x^2 + 0p^3xy + \delta 4\,p^2x^3 + 0p^2x^2y +}$$

$$\frac{d5\,px^4 + \delta 4\,px^3y + \delta 5\,x^4y}{\delta 5\,px^4 + 0px^3y + 0x^4y} = \frac{a1\,p^5 + a2\,p^4x + a3\,p^4y + a4\,p^3x^2 +}{\alpha 1\,p^5 + \alpha 2\,p^4x + \alpha 3\,p^4y + \alpha 4\,p^3x^2 +}$$

$$\frac{a5\,p^3xy + a6\,p^2x^3 + a7\,p^2x^2y + a8\,px^4 + a9\,px^3y + a10\,x^4y}{\alpha 5\,p^3xy + \alpha 6\,p^2x^3 + \alpha 7\,p^2x^2y + \alpha 8\,px^4 + \alpha 9\,px^3y + \alpha 10\,x^4y};$$

en différenciant, on aura l'équation

$$\ddot{x} + \frac{a^{2}1\,p^8 + \begin{array}{l} a'2 \\ + a^{4}1 \end{array} p^7x - \begin{array}{l} a'3 \\ + a'2 \\ + a^{6}1 \end{array} p^6x^2}{+ a'1\,p^8 + 2a^{2}1\,p^7x}$$

$$\frac{- \begin{array}{l} a^{3}3 \\ + a'4 \\ + a^{5}2 \\ + a^{8}1 \end{array} p^5x^3 - \begin{array}{l} a^{5}3 \\ - a'5 \\ + a^{3}4 \\ + a^{7}2 \\ + a^{9}1 \end{array} p^4x^4 - \begin{array}{l} a^{3}5 \\ + a'6 \\ + a^{5}4 \\ + a^{8}2 \end{array} p^3x^5 - \begin{array}{l} a'7 \\ + a^{3}6 \\ + a^{6}4 \end{array} p^2x^6 + \begin{array}{l} a'8 \\ + a^{4}6 \end{array} px^7 + a^{2}8\,x^8}{+ \begin{array}{l} a^{2}2 \\ + 3a^{5}1 \end{array} p^6x^2 + \begin{array}{l} 2a^{4}2 \\ + 4a^{7}1 \end{array} p^5x^3 + \begin{array}{l} 3a^{6}2 \\ + a^{2}4 \end{array} p^4x^4 + 2a^{4}4\,p^3x^5 + a^{2}6\,p^2x^6}\,\ddot{y} = 0;$$

qui, en supposant $- a'2 + a^{4}1 = 0$, $a'3 + a^{6}1 = 0$, $a^{5}2 - a'4 + 3a^{3}3 + 3a^{8}1 = 0$, $2a^{7}2 + 2a'5 + 4a^{5}3 + 4a^{9}1 = 0$, $3a^{8}2 + 3a^{3}5 - a'6 + a^{5}4 = 0$, $2a^{6}4 + 2a'7 = 0$, $a^{4}6 - a'8 = 0$, $a^{2}3 = 0$, $a^{2}5 + 3a^{6}3 = 0$, $2a^{4}5 + 4a^{7}3 = 0$, $3a^{5}5 + a^{2}7 = 0$, $a^{4}3 = 0$, $a^{3}7 = 0$, $a'9 = 0$, & les deux cens dix conditions

du Lemme, sera la formule de toutes les équations, dont l'intégrale est $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^4 +}{\delta 1p^4 +}$.

REMARQUE.

Soit λ le degré du numérateur & du dénominateur de la fonction pc, jamais les fonctions N, M ne seront d'un degré si bas, que lorsque l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} +$ $\frac{d1p^\lambda + d2p^{\lambda-1}x + d3p^{\lambda-2}x^2 + d4p^{\lambda-3}x^3 + \&c. + x^\lambda}{\delta 1p^\lambda}$.

Soit l'intégrale $n = \frac{y}{p} + \frac{Ap + x}{Bp}$, l'équation différencielle sera $\dot{x} + B\dot{y} = 0$, dans laquelle le degré des fonctions N, M est $= 0$; & il est impossible que le degré de ces fonctions dans l'équation différencielle de cette intégrale-ci $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p + d2x}{\delta 1p + x}$, ne soit pas > 0.

Soit l'intégrale $n = \frac{y}{p} + \frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{Cp^2}$, l'équation différencielle sera $\dot{x} + \frac{Cp}{Bp + 2x}\dot{y} = 0$, dans laquelle le degré des fonctions N, M est $= 1$; & il est impossible que le degré de ces fonctions dans l'équation différencielle de cette intégrale-ci $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^2 + d2px + d3x^2}{\delta 1p^2 + \delta 2px + \delta 3x^2}$, ne soit pas > 1.

Soit l'intégrale $n = \frac{y}{p} + \frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{Dp^3}$, l'équation différencielle sera $\dot{x} + \frac{Dp^3}{Bp^2 + 2Cpx + 3x^2}\dot{y} = 0$, dans laquelle le degré des fonctions N, M est $= 0$, & il est impossible que le degré de ces fonctions dans

l'équation différencielle de cette intégrale-ci $n = \frac{y}{p} + \frac{d1p^3 + d2p^2x + d3px^2 + d4x^3}{\delta 1p^3 + \delta 2p^2x + \delta 3px^2 + \delta 4x^3}$, ne soit pas > 2, &c.

Au moyen de cette remarque & des formules précédentes, il n'y a aucune des équations dont nous traitons ici, que je n'intègre, ou dont je ne démontre l'inintégrabilité. S'il s'agit, par exemple, d'une équation où le degré des fonctions N, M est $= 5$, je commence d'abord par m'assurer que ces fonctions n'ont aucun facteur commun, c'est-à-dire, que l'équation proposée ne peut pas devenir une équation où les fonctions N, M soient d'un degré moindre que 5; j'en ai donné le moyen: ensuite je dis que cette équation appartient à la troisième, ou à la quatrième, ou à la cinquième formule. Je la multiplie donc par $c1p + c2x$, & je la compare avec la troisième formule; si elle n'est pas intégrable par cette formule, je la multiplie par $c1p^3 + c2p^2x + c3px^2 + c4x^3$, & je la compare avec la quatrième formule; si elle n'est pas intégrable par cette formule, je la multiplie par $c1p^5 + c2p^4x + c3p^3x^2 + c4p^2x^3 + c5px^4 + c6x^5$, & je la compare avec la cinquième formule; si elle n'est intégrable par aucune de ces trois formules, il sera démontré qu'elle est inintégrable.

L'on intégrera également ces équations-ci, lorsque les fonctions N, M seront affectées de radicaux, ou bien l'on en démontrera l'inintégrabilité.

Pour qu'on voie le procédé de la méthode jusqu'au bout; voici quelques exemples.

La première équation différencielle $\dot{x} + \frac{b1p + x}{\beta 1p + \beta 2x}\dot{y} = 0$; ne peut appartenir à aucune formule; par conséquent elle est inintégrable généralement.

Soit l'équation $\dot{x} + \frac{\frac{25}{2}p^2 - 10px + 2x^2}{3p^2}\dot{y} = 0$; En comparant cette équation avec la première formule, j'aurai

j'aurai $a'1 = 3$, $a^2 1 = \frac{25}{2}$, $a'2 + a^3 1 = -10$,
$a^3 1 - a'2 = 0$.

$a^2 2 = 2$, $a'3 = 0$; donc $a'1 = 3$, $a^2 1 = \frac{25}{2}$,
$a'2 = -5$, $a^2 2 = 2$.
$a'3 = 0$.

$a^3 1 = -5$. En ſubſtituant ces valeurs dans la condition de la formule, j'aurai $-5 \cdot -5 - 25 + 0 = 0$; par conſéquent l'équation propoſée eſt intégrable par cette formule.

Pour l'intégrer, j'aurai $\delta 1 d2 - d1 \delta 2 = 3$;
$\delta 2 \delta 1 = -5$,
$0 = 0$.

$(\delta 1)^2 = \frac{25}{2}$, $\delta 1 \delta 2 = -5$; donc $\delta 1 = \frac{5}{\sqrt{2}}$,
$(\delta 2)^2 = 2$.

$\delta 2 = -\sqrt{2}$ & $\frac{5}{\sqrt{2}} d2 + \sqrt{2} \cdot d1 = 3$. Soit $d1 = \sqrt{2}$, on aura $d2 = \frac{\sqrt{2}}{5}$, & l'intégrale ſera

$$u = \frac{y}{p} + \frac{\sqrt{2} \cdot p + \frac{\sqrt{2}}{5} x}{\frac{5}{\sqrt{2}} p - \sqrt{2}\, x} \text{ ou } u = \frac{y}{p} + \frac{2p + \frac{2}{5} x}{5p - 2x}.$$

Soit l'équation $\dot{x} + \frac{4p^2 - 12px + 9x^2}{p^2 + 4px - 3x^2}\, \dot{y} = 0$; il eſt évident que cette équation ne peut pas ſe rapporter à la première formule, & que pour la rapporter à la ſeconde auſſi généralement qu'elle peut l'être, il ſuffit de la multiplier par p^2, on aura $a'1 = 1$, $a^2 1 = 4$;
$a^3 1 = 2$, $a'2 + a^4 1 = -12$, $a^2 2 = -3$;
$a^4 1 - a'2 = 0$.

$-a'3 + a^3 2 + a^5 1 = 9$, $a'4 + a^4 2 = 0$,
$a'3 + a^5 1 = 0$. $a^4 2 - a'4 = 0$.

$a^2 4 = 0$, $a^2 3 = 0$, $a'5 = 0$, $a^3 3 = 0$.

Donc 1.° $a'1 = 1$, $a^2 1 = 4$, $a^3 1 = 2$, $a^4 1 = -6$.
$a'2 = -6$, $a^2 2 = -3$, $a^4 2 = 0$.
$a^2 3 = 0$, $a^3 3 = 0$,
$a'4 = 0$, $a^2 4 = 0$.
$a'5 = 0$.

2.° $-a'3 + a^3 2 + a^5 1 = 9$,
$a'3 + a^5 1 = 0$.

3.° En ſubſtituant dans les quinze conditions de la formule, la première donnera $-2.6 + 4.3 + a'3 = 0$, c'eſt-à-dire, $a'3 = 0$; donc $a^5 1 = 0$, $a^3 2 = 9$. La ſeconde & toutes les autres donneront $0 = 0$; par conſéquent l'équation propoſée eſt intégrable par la ſeconde formule, & pour l'intégrer, on aura $a'1 = 1$,
$a'2 = -6$,
$a'3 = 0$,
$a'4 = 0$,
$a'5 = 0$.

$a^2 1 = 4$, $a^3 1 = 2$, $a^4 1 = -6$, $a^5 1 = 0$,
$a^2 2 = -3$, $a^3 2 = 9$, $a^4 2 = 0$.
$a^2 3 = 0$, $a^3 3 = 0$.
$a^2 4 = 0$.

ou $\delta 1 d2 - d1 \delta 2 = 1$, $(\delta 1)^2 = 4$,
$\delta 2 \delta 1 = -6$, $\delta 2 d3 - d2 \delta 3 = -3$,
$-\delta 1 \delta 3 = 0$, $0 = 0$,
$\delta 3 \delta 2 = 0$, $(\delta 3)^2 = 0$.
$0 = 0$.

$\delta 1 d3 - d1 \delta 3 = 2$, $\delta 1 \delta 2 = -6$, $\delta 1 \delta 3 = 0$.
$(\delta 2)^2 = 9$, $\delta 2 \delta 3 = 0$.
$0 = 0$.

donc $\delta 1 = 2$, $\delta 2 = -3$, $\delta 3 = 0$, $d3 = 1$. Soit $d1 = 1$, on aura $d2 = -1$, &c. l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{p^2 - px + x^2}{2p^2 - 3px}$.

Ces deux exemples suffiront, d'autant plus que j'ai trouvé une manière d'intégrer ces équations-ci, ou d'en démontrer l'inintégrabilité, plus simplement que par la méthode générale.

AVERTISSEMENT.

Je nommerai intégrale du premier degré, celle où le numérateur & le dénominateur de la fonction pc seront du premier degré; intégrale du second degré, celle où le numérateur & le dénominateur de pc seront du second degré, &c.

Je nommerai équation différencielle du premier degré, celle où les fonctions N, M seront du premier degré; équation différencielle du second degré, celle où les fonctions N, M seront du second degré, &c.

Le chiffre au dessus de chaque formule d'intégrale, désignera le degré de l'équation différencielle de cette intégrale.

LEMME I.

Les intégrales du premier degré sont $n = \frac{y}{p} + \overset{(2)}{\frac{ap + bx}{\alpha p + x}}$; $n = \frac{y}{p} + \overset{(0)}{\frac{ap + bx}{p}}$.

Les intégrales du second degré sont $n = \frac{y}{p} + \overset{(4)}{\frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)(\zeta p + x)}}$, $n = \frac{y}{p} + \overset{(3)}{\frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2}}$,

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(2)}{\frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)}}; \; n = \frac{y}{p} + \overset{(1)}{\frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2}}.$$

Les intégrales du troisième degré sont $n = \frac{y}{p} +$

$$\overset{(6)}{\frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)}}, \; n = \frac{y}{p} + \overset{(5)}{\frac{ap^3 +}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)}};$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(4)}{\frac{ap^3 +}{(\alpha p + x)^3}}, \; n = \frac{y}{p} + \overset{(4)}{\frac{ap^3 +}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)}},$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(3)}{\frac{ap^3 +}{p(\alpha p + x)^2}}, \; n = \frac{y}{p} + \overset{(3)}{\frac{ap^3 +}{p^2(\alpha p + x)}},$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(2)}{\frac{ap^3 +}{p^3}}.$$

Les intégrales du quatrième degré sont $n = \frac{y}{p} +$

$$\overset{(8)}{\frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}}; \; n = \frac{y}{p} +$$

$$\overset{(7)}{\frac{ap^4 +}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)}}, \; n = \frac{y}{p} + \overset{(6)}{\frac{ap^4 +}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2}},$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(6)}{\frac{ap^4 +}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)}}, \; n = \frac{y}{p} + \overset{(5)}{\frac{ap^4 +}{(\alpha p + x)^4}};$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(6)}{\frac{ap^4 +}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)}}, \; n = \frac{y}{p} +$$

$$\overset{(5)}{\frac{ap^4 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)}}, \; n = \frac{y}{p} + \overset{(4)}{\frac{ap^4 +}{p(\alpha p + x)^3}};$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(5)}{\frac{ap^4 +}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)}}, \; n = \frac{y}{p} + \overset{(4)}{\frac{ap^4 +}{p^2(\alpha p + x)^2}};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 +}{p^3(\alpha p + x)} \quad (4), \qquad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 +}{p^4} \quad (3).$$

Les intégrales du cinquième degré sont

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)} \quad (10),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)} \quad (9),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2(\gamma p + x)} \quad (8), \qquad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)(\gamma p + x)} \quad (8),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2} \quad (7),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^4(\beta p + x)} \quad (7), \qquad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(\alpha p + x)^5} \quad (6);$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)} \quad (8),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)(\gamma p + x)} \quad (7);$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2} \quad (6), \qquad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)^3(\beta p + x)} \quad (6),$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(\alpha p + x)^4} \quad (5);$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)} \quad (7);$$

(6)

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^2(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}$, $n = \frac{y}{p} +$

(5) (6)

$\frac{ap^5 +}{p^2(\alpha p + x)^3}$; $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^3(\alpha p + x)(\beta p + x)}$,

(5) (5)

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^3(\alpha p + x)^2}$; $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^4(\alpha p + x)}$;

(4)

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^5}$;

Les intégrales du sixième degré sont $n = \frac{y}{p} +$

(12)

$$\frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)(\zeta p + x)};$$

(11)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)},$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2(\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2(\gamma p + x)^2};$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(9)

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2(\gamma p + x)}$, $n = \frac{y}{p} +$

(8) (9)

$\frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^3}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^4(\beta p + x)(\gamma p + x)}$,

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(8)}{\frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^4 \; (\beta p + x)^2}},\; n = \frac{y}{p} + \overset{(8)}{\frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^5 \; (\beta p + x)}},\; n = \frac{y}{p} + \overset{(7)}{\frac{ap^6 +}{(\alpha p + x)^6}},$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(10)}{\frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}},$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(9)}{\frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}};$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(8)}{\frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)}},$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(8)}{\frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)(\gamma p + x)}},$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(7)}{\frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2}},\; n = \frac{y}{p} + \overset{(7)}{\frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)}},\; n = \frac{y}{p} + \overset{(6)}{\frac{ap^6 +}{p(\alpha p + x)^5}};$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(9)}{\frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}},$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(8)}{\frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)}},$$

$$n = \frac{y}{p} + \overset{(7)}{\frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2}},\; n = \frac{y}{p} + \overset{(7)}{\frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)}},\; n = \frac{y}{p} + \overset{(6)}{\frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^4}},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(8)}{ap^6 +}}{p^3(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(7)}{ap^6 +}}{p^2(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(6)}{ap^6 +}}{p^3(\alpha p + x)^3}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(7)}{ap^6 +}}{p^4(\alpha p + x)(\beta p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(6)}{ap^6 +}}{p^4(\alpha p + x)^2}; \quad n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(6)}{ap^6 +}}{p^5(\alpha p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(5)}{ap^6 +}}{p^6}.$$

Les intégrales du septième degré sont $n = \frac{y}{p} +$

$$\frac{\overset{(14)}{ap^7 + bp^6x + cp^5x^2 + dp^4x^3 + ep^3x^4 + fp^2x^5 + gpx^6 + hx^7}}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)(\zeta p + x)(\eta p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(13)}{ap^7 +}}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)(\zeta p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(12)}{ap^7 +}}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(11)}{ap^7 +}}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2(\gamma p + x)^2(\delta p + x)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(12)}{ap^7 +}}{(\alpha p +)^3(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(11)}{ap^7 +}}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2(\gamma p + x)(\delta p + x)};$$

$n =$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2},$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^3 (\gamma p + x)};$$

(11)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)};$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(9) (10)

$$\frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^3}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^5 (\beta p + x)(\gamma p + x)};$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^5 (\beta p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(9) (8)

$$\frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^6 (\beta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{(\alpha p + x)^7};$$

(12)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)(\zeta p + x)};$$

(11)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)};$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2};$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)};$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(8) (9)

$$\frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^3}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)(\gamma p + x)},$$

(8)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(8) (7)

$$\frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^5 (\beta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(\alpha p + x)^6},$$

(11)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)},$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^2(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^2(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^2(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)(\gamma p + x)},$$

(8)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^2(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} +$$

(8) (7)

$$\frac{ap^7 +}{p^2(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^2(\alpha p + x)^5},$$

(10)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^3(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)},$$

(9)

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^3(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(8)}{ap^7 +}}{p^2(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(8)}{ap^7 +}}{p^3(\alpha p + x)^3\ (\zeta p + x)}; \quad n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(7)}{ap^7 +}}{p^3(\alpha p + x)^4};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(9)}{ap^7 +}}{p^4(\alpha p + x)\ (\zeta p + x)\ (\gamma p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(8)}{ap^7 +}}{p^4(\alpha p + x)^2(\zeta p + x)}; \quad n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(7)}{ap^7 +}}{p^4(\alpha p + x)^3}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(8)}{ap^7 +}}{p^5(\alpha p + x)\ (\zeta p + x)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(7)}{ap^7 +}}{p^5(\alpha p + x)^2}, \quad n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(7)}{ap^7 +}}{p^6(\alpha p + x)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{\overset{(6)}{ap^7 +}}{p^7}.$$

LEMME II.

En parcourant ces intégrales l'une après l'autre, je vois tout de suite de quel degré sera l'équation différencielle de chaque intégrale, & je le marque à mesure par le chiffre que je mets au dessus entre deux parenthèses. Je vois, par exemple, que l'équation différencielle de cette intégrale-ci

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^2\ (\zeta p + x)\ (\gamma p + x)},$$

sera du septième degré: la démonstration que je vais en donner servira pour tous les autres cas.

Soit donc $n = \frac{y}{p} + \frac{L}{p(\alpha p + x)^2 (\zeta p + x)(\gamma p + x)}$;

je mets, pour ab:éger, L au lieu du numérateur de pc; en diffćienciⅈnt, on aura

$$\frac{\ddot{y}}{p} + \frac{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)\frac{\dot{L}}{\dot{x}} - L(\alpha p + x)^2 (\beta p + x) - L(\alpha p + x)^2(\gamma p + x) - 2L(\beta p + x)(\gamma p + x)(\alpha p + x)}{p(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2}\,\dot{x} = 0;$$

ou $\dot{x} + \dfrac{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)\frac{\dot{L}}{\dot{x}} - L(\alpha p + x)(\beta p + x) - L(\alpha p + x)(\gamma p + x) - 2L(\beta p + x)(\gamma p + x)}\,\dot{y} = 0$. Pour que cette équation pût devenir d'un degré < 7, il faudroit que ſon dénominateur fût diviſible par $\alpha p + x$ ou par $\beta p + x$, c'eſt-à-dire, que $2L(\beta p + x)(\gamma p + x)$ fût diviſible par $\alpha p + x$, ou que $L(\alpha p + x)(\gamma p + x)$ fût diviſible par $\beta p + x$ contre l'hypothèſe.

LEMME III.

L'équation différencielle du o degré ne peut être produite que par l'intégrale $n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p}$.

Celle du premier degré ne peut être produite que par l'intégrale $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2}$.

Celle du ſecond degré ne peut être produite que par les trois intégrales $n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{ap + x}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(ap + x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3}$.

Celle du troiſième degré ne peut être produite que par les quatre intégrales $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(ap + x)^2}$; $n = \frac{y}{p} +$

$\frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cp^2x + dx^3}{p^2(\alpha p + x)}$,

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^4}$.

Celle du quatrième degré ne peut être produite que par les ſept intégrales $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{\alpha p^2 + \beta px + x^2}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^3}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}$,

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^3}$;

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2}$;

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(\alpha p + x)}$;

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^5}$.

Celle du cinquième degré ne peut être produite que par les neuf intégrales $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}$,

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^4}$;

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}$;

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}$;

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^4}$,

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^2(\alpha p + x)^3}$,

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dpx^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^3(\alpha p + x)^2}$,

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^4(\alpha p + x)}$,

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^6}.$$

Celle du sixième degré ne peut être produite que par les quinze intégrales $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3}$,

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{(\alpha p + x)^5},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^3(\beta p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^2(\alpha p + x)^2(\beta p + x)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^3(\alpha p^2 + \beta px + x^2)},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p(\alpha p + x)^5},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^2(\alpha p + x)^4},$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^3(\alpha p + x)^3};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^4(\alpha p + x)^2};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^5(\alpha p + x)};$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 + bp^6x + cp^5x^2 + dp^4x^3 + ep^3x^4 + fp^2x^5 + gpx^6 + hx^7}{p^7},$$

Celle du septième degré ne peut être produite que par les dix-neuf intégrales $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 +}{(ap+x)^2(\beta p^2 + \gamma px + x^2)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(ap+x)^3(\beta p + x)^2}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{(ap+x)^4(\beta p + x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p(ap+x)^2(\beta p^2 + \gamma px + x^2)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^2(ap^3 + \beta p^2 x + \gamma px^2 + x^3)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{(ap+x)^6}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(ap+x)^3(\beta p + x)^2}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p(ap+x)^4(\beta p + x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(ap^2 + \beta px + x^2)^2}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(ap+x)^3(\beta p + x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^3(ap+x)^2(\beta p + x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^4(ap^2 + \beta px + x^2)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p(ap+x)^6}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^2(ap+x)^5}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^3(ap+x)^4}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^4(ap+x)^3}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^5(ap+x)^2}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^6(ap+x)}$, $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^8 +}{p^8}$, &c.

CONCLUSION.

1.° Si l'équation du o degré est $\dot{y} + b\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p}$.

2.° Si l'équation du premier degré est $\dot{y} + \frac{bp + 2cx}{p}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2}$; & dans tout autre cas, elle sera inintégrable.

3.° Si l'équation du second degré eſt $\dot{y} + \frac{(\alpha b - a).p^2}{(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{\alpha p + x}$. Si elle eſt $\dot{y} + \frac{(\alpha b - a).p^2 + 2\alpha cpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)}$. Si elle eſt $\dot{y} + \frac{bp^2 + 2cpx + 3dx^2}{p^2}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3}$; & dans tout autre cas, elle ſera inintégrable.

4.° Si l'équation du troiſième degré eſt $\ddot{y} + \frac{(\alpha b - 2a).p^3 + (2\alpha c - b).p^2x}{(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2}$. Si elle eſt $\ddot{y} + \frac{(\alpha b - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2x + 3\alpha dpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2}$. Si elle eſt $\ddot{y} + \frac{(\alpha b - a).p^3 + 2\alpha cp^2x + (3\alpha d + c).px^2 + 2dx^3}{p(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)}$. Si elle eſt $\dot{y} + \frac{bp^3 + 2cp^2x + 3dpx^2 + 4ex^3}{p^3}\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^4}$; & dans tout autre cas, elle ſera inintégrable.

5.° Si l'équation du quatrième degré eſt $\dddot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^4 + (2\alpha c - 2a)p^3x + (-b + \beta c)p^2x^2}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}\dddot{x} = 0$; ſon

ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{\alpha p^2 + \beta px + x^2}$. Si elle eſt

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 3a)p^4 + (2\alpha c - 2b)p^3x + (3\alpha d - c)p^2x^2}{(\alpha p + x)^4}\,\dot{x} = 0,$$

ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^3}$.

Si elle eſt $\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)\,p^4 + (2\alpha c - 2a)p^3x + (3\alpha d + \beta c - b)p^2x^2 + 2\beta dpx^3 + dx^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}\,\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}$. Si elle eſt

$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 3a)p^4 + (2\alpha c - 2b)\,p^3x + (3\alpha d - c)p^2x^2 + 4\alpha epx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^4}\,\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^3}$. Si elle

eſt $\dot{y} + \frac{(\alpha b - 2a)p^4 + (2\alpha c - b)p^3x + 3\alpha dp^2x^2 + (4\alpha e + d)px^3 + 2ex^4}{p(\alpha p + x)^3}\,\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2}$. Si elle

eſt $\dot{y} + \frac{(\alpha b - a)p^4 + 2\alpha cp^3x + (3\alpha d + c)p^2x^2 + (4\alpha e + 2d)px^3 + 3ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2}\,\dot{x} = 0$, ſon intégrale ſera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(\alpha p + x)}$. Si elle eſt

$$\dot{y} + \frac{bp^4 + 2cp^3x + 3dp^2x^2 + 4epx^3 + 5fx^4}{p^4}\,\dot{x} = 0,$$

ſon intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^5}$; & dans tout autre cas, elle ſera inintégrable.

6.° Si l'équation du cinquième degré est

$$\dot{y} + \frac{[\alpha\beta b - (\alpha + 2\beta).a]p^5 + (-\beta b + 2\alpha\beta c - 3a)p^4x + (-2b + \alpha c + 3\alpha\beta d)p^3x^2 + [-c + (2\alpha + \beta).d]p^2x^3}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0,$$

son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}$.

Si elle est $\dot{y} + \frac{(\alpha b - 4a)p^5 + (2\alpha c - b)p^4x + (3\alpha d - 2c)p^3x^2 + (4\alpha e - d)p^2x^3}{(\alpha p + x)^5}\dot{x} = 0$, son intégrale sera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^4}$. Si elle est

$$\dot{y} + \frac{[\alpha\beta b - (\alpha + 2\beta).a]p^5 + (2\alpha\beta c - \beta b - 3a)p^4x + (3\alpha\beta d + \alpha c - 2b)p^3x^2 + [4\alpha\beta e + (2\alpha + \beta)d - c]p^2x^3 + (3\alpha + 2\beta)epx^4 + ex^5}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0,$$

son intégrale sera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}$. Si elle est

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^5 + (2\alpha c - 2a)p^4x + (3\alpha d + \beta c - b)p^3x^2 + (4\alpha e + 2\beta d)p^2x^3 + (3\beta e + d)px^4 + 2ex^5}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}\dot{x} = 0,$$

son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}$.

Si elle est $\dot{y} + \frac{(\alpha b - 4a)p^5 + (2\alpha c - 3b)p^4x + (3\alpha d - 2c)p^3x^2 + (4\alpha e - d)p^2x^3 + 5\alpha fpx^4 + fx^5}{(\alpha p + x)^5}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^4}$.

Si elle est $\dot{y} + \frac{(\alpha b - 3a)p^5 + (2\alpha c - 2b)p^4x + (3\alpha d - c)p^3x^2 + 4\alpha ep^2x^3 + (5\alpha f + e)px^4 + 2fx^5}{p(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0$, son intégrale sera

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^2(\alpha p + x)^3}.$$

Si elle est $\dot{y} + \frac{(\alpha b - 2a)p^5 + (2\alpha c - b)p^4x + 3\alpha dp^3x^2 + (4\alpha e + d)p^2x^3 + (5\alpha f + 2e)px^4 + 3fx^5}{p^2(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^3(\alpha p + x)^2}$.

Si elle est $\dot{y} + \frac{(\alpha b - a)p^5 + 2\alpha cp^4x + (3\alpha d + c)p^3x^2 + (4\alpha e + 2d)p^2x^3 + (5\alpha f + 3e)px^4 + 4fx^5}{p^3(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0$, son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^4(\alpha p + x)}$.

Si elle est

$$\dot{y} + \frac{bp^5 + 2cp^4x + 3dp^3x^2 + 4ep^2x^3 + 5fpx^4 + 6gx^5}{p^5}\dot{x} = 0,$$

son intégrale sera

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p^6};$$

& dans tout autre cas, elle sera inintégrable.

7.° Si l'équation du sixième degré est

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^6 + (2\alpha c - 2\gamma a)p^5x + (-\gamma b + \beta c + 3\alpha d - 3a)p^4x^2 + (-2b + 2\beta d)p^3x^3 + (-c + \gamma d)p^2x^4}{(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)^2}\dot{x} = 0,$$

son intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3}$. Si elle est

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 2a\beta)p^6 + (2c\alpha - b\beta - 4a)p^5x + (3d\alpha - 3b)p^4x^2 + (4e\alpha + d\beta - 2c)p^3x^3 + (2e\beta - d)p^2x^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^3}\dot{x} = 0,$$ son inté-

grale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}$.

Si elle est $\dot{y} + \frac{[b\alpha\beta - a.(\alpha + 3\beta)]p^6 + (2c\alpha\beta - 2b\beta - 4a)p^5x + [3d\alpha\beta + c.(\alpha - \beta) - 3b]p^4x^2 + (4e\alpha\beta + 2d\alpha - 2c)p^3x^3 + [e.(3\alpha + \beta) - d]p^2x^4}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2}\dot{x} = 0$, l'intégrale sera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)}$.

Si elle est $\dot{y} + \frac{(b\alpha - a\beta)p^6 + (2c\alpha - 2a\gamma)p^5x + (3d\alpha + c\beta - b\gamma - 3a)p^4x^2 + (4e\alpha + 2d\beta - 2b)p^3x^3 + (3e\beta + d\gamma - c)p^2x^4 + 2e\gamma px^5 + ex^6}{(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)^2}\dot{x} = 0$, l'intégrale sera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)}$.

Si elle est $\dot{y} + \frac{(b\alpha - 5a)p^6 + (2c\alpha - 4b)p^5x + (3d\alpha - 3c)p^4x^2 + (4e\alpha - 2d)p^3x^3 + (5f\alpha - e)p^2x^4}{(\alpha p + x)^6}\dot{x} = 0$, l'intégrale sera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{(\alpha p + x)^5}$.

Si elle est $\dot{y} + \frac{(b\alpha - a\beta)p^6 + (2c\alpha - 2a)p^5x + (3d\alpha + c\beta - b)p^4x^2 + (4e\alpha + 2d\beta)p^3x^3 + (5f\alpha + 3e\beta + d)p^2x^4 + (4f\beta + 2e)px^5 + 3fx^6}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^3}\dot{x} = 0$, l'intégrale sera

$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}$.

Si elle est $\dot{y} + \frac{[b\alpha\beta - a.(\alpha + 3\beta)]p^6 + (2\alpha\beta c - 2b\beta - 4a)p^5x + [3\alpha\beta d + c.(\alpha - \beta) - 3b]p^4x^2 +}{}$

$$\frac{(4\alpha\beta e + 2d\alpha - 2c)p^3x^3 + [5f\alpha\beta + e.(3\alpha + \beta) - d]p^2x^4 + f.(4\alpha + 2\beta)px^5 + fx^6}{(\alpha p + x)^4\,(\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0,$$ l'intégrale sera

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^3\,(\beta p + x)}.$$

Si elle est $\dot{y} + \frac{[b\alpha\beta - a.(\alpha + 2\beta)]p^6 + (2c\alpha\beta - b\beta - 3a)p^5x + (3d\alpha\beta + c\alpha - 2b)p^4x^2 + [4e\alpha\beta + d.(2\alpha + \beta) - c]p^3x^3 + [5f\alpha\beta + e.(3\alpha + 2\beta)]p^2x^4 + [f.(4\alpha + 3\beta) + e]px^5 + 2fx^6}{p(\alpha p + x)^3\,(\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0$, l'intégrale sera

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^2(\alpha p + x)^2\,(\beta p + x)}.$$

Si elle est $\dot{y} + \frac{(b\alpha - a\beta)p^6 + (2c\alpha - 2a)p^5x + (3d\alpha + c\beta - b)p^4x^2 + (4e\alpha + 2d\beta)p^3x^3 + (5f\alpha + 3e\beta + d)p^2x^4 + (4f\beta + 2e)px^5 + 3fx^6}{p^2(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}\,\dot{x} = 0$, l'intégrale sera

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^3(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}.$$

Si elle est $\dot{y} + \frac{(b\alpha - 5a)p^6 + (2c\alpha - 4b)p^5x + (3d\alpha - 3c)p^4x^2 + (4e\alpha - 2d)p^3x^3 + (5f\alpha - e)p^2x^4 + 6g\alpha px^5 + gx^6}{(\alpha p + x)^6}\,\dot{x} = 0$, l'intégrale sera

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p(\alpha p + x)^5},$$

Si elle est $\dot{y} + \frac{(b\alpha - 4a)p^6 + (2c\alpha - 3b)p^5x + (3d\alpha - 2c)p^4x^2 + (4e\alpha - d)p^3x^3 + 5f\alpha p^2x^4 + (6g\alpha + f)px^5 + 2gx^6}{p(\alpha p + x)^5}\,\dot{x} = 0$, l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^4}$. Si elle est

$\dot{y} + \frac{(ba - 3a)p^6 + (2ca - 2b)p^5 x + (3da - c)p^4 x^2 + 4eap^3 x^3 + (5fa + e)p^2 x^4 + (6ga + 2f)px^5 + 3gx^6}{p^2(ap + x)^4}\dot{x} = 0$, l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^3(ap + x)^3}$. Si elle est

$\dot{y} + \frac{(ba - 2a)p^6 + (2ca - b)p^5 x + 3dap^4 x^2 + (4ea + d)p^3 x^3 + (5fa + 2e)p^2 x^4 + (6ga + 3f)px^5 + 4gx^6}{p^3(ap + x)^3}\dot{x} = 0$, l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{dp^6 +}{p^4(ap + x)^2}$. Si elle est

$\dot{y} + \frac{(ba - a)p^6 + 2cap^5 x + (3da + c)p^4 x^2 + (4ea + 2d)p^3 x^3 + (5fa + 3e)p^2 x^4 (6ga + 4f)px^5 + 5gx^6}{p^4(ap + x)^2}\dot{x} = 0$, l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^5(ap + x)}$. Si elle est

$\dot{y} + \frac{bp^6 + 2cp^5 x + 3dp^4 x^2 + 4ep^3 x^3 + 5fp^2 x^4 + 6gpx^5 + 7hx^6}{p^6}\dot{x} = 0$, l'intégrale sera $n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^7}$; & dans tout autre cas, elle sera inintégrable.

L'on pourra donc construire la Table qui suit.



TABLE PREMIÉRE.

FORMULES DES FLUXIONS, ET DE LEURS FLÜENTES.

0[d]

$\dot{y} + b\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p}.$

1[d]

$\dot{y} + \frac{bp + 2cx}{p}\dot{x} = 0 \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2}.$

2[d]

$\dot{y} + \frac{(\alpha b - a).p^2}{(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{\alpha p + x}.$

$\dot{y} + \frac{(\alpha b - a).p^2 + 2\alpha cpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)}.$

$\dot{y} + \frac{bp^2 + 2cpx + 3dx^2}{p^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3}.$

3[d]

$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 2a).p^3 + (2\alpha c - b).p^2x}{(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2}.$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2x + 3\alpha dpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - a).p^3 + 2\alpha c\,p^2x + (3\alpha d + c).px^2 + 2dx^3}{p(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{bp^3 + 2cp^2x + 3dpx^2 + 4ex^3}{p^3}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^4}.$$

4^d

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^4 + (2\alpha c - 2a)p^3x + (-b + \beta c)p^2x^2}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{\alpha p^2 + \beta px + x^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 3a)p^4 + (2\alpha c - 2b)p^3x + (3\alpha d - c)p^2x^2}{(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^4 + (2\alpha c - 2a)p^3x + (3\alpha d + \beta c - b)p^2x^2 + 2\beta dpx^3 + dx^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 3a)p^4 + (2\alpha c - 2b)p^3x + (3\alpha d - c)p^2x^2 + 4\alpha epx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^3}.$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 2a)p^4 + (2\alpha c - b)p^3x + 3\alpha dp^2x^2 + (4\alpha e + d)px^3 + 2ex^4}{p(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - a)p^4 + 2\alpha cp^3x + (3\alpha d + c)p^2x^2 + (4\alpha e + 2d)px^3 + 3ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(\alpha p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{bp^4 + 2cp^3x + 3dp^2x^2 + 4epx^3 + 5fx^4}{p^4}\dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^5}.$$

5^d

$$\dot{y} + \frac{[\alpha\beta b - (\alpha + 2\beta).a]p^5 + (-\beta b + 2\alpha\beta c - 3a)p^4x + (-2b + \alpha c + 3\alpha\beta d)p^3x^2 + [-c + (2\alpha + \beta).d]p^2x^3}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 4a)p^5 + (2\alpha c - b)p^4x + (3\alpha d - 2c)p^3x^2 + (4\alpha e - d)p^2x^3}{(\alpha p + x)^5}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^4};$$

$$\dot{y} + \frac{[\alpha\beta b - (\alpha + 2\beta).a]p^5 + (2\alpha\beta c - \beta b - 3a)p^4x + (3\alpha\beta d + \alpha c - 2b)p^3x^2 + (3\alpha + 2\beta)epx^4 + ex^5}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^5 + (2\alpha c - 2a)p^4x + (3\alpha d + \beta c - b)p^3x^2 + (4\alpha e + 2\beta d)p^2x^3 + (3\beta e + d)px^4 + 2ex^5}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 4a)p^5 + (2\alpha c - 3b)p^4x + (3\alpha d - 2c)p^3x^2 + (4\alpha e - d)p^2x^3 + 5\alpha fpx^4 + fx^5}{(\alpha p + x)^5}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 3a)p^5 + (2\alpha c - 2b)p^4x + (3\alpha d - c)p^3x^2 + 4\alpha ep^2x^3 + (5\alpha f + e)px^4 + 2fx^5}{p(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^2(\alpha p + x)^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 2a)p^5 + (2\alpha c - b)p^4x + 3\alpha dp^3x^2 + (4\alpha e + d)p^2x^3 + (5\alpha f + 2e)px^4 + 3fx^5}{p^2(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^3(\alpha p + x)^2};$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - a)p^5 + 2\alpha cp^4x + (3\alpha d + c)p^3x^2 + (4\alpha e + 2d)p^2x^3 + (5\alpha f + 3e)px^4 + 4fx^5}{p^3(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^4(\alpha p + x)};$$

$$\dot{y} + \frac{bp^5 + 2cp^4x + 3dp^3x^2 + 4ep^2x^3 + 5fpx^4 + 6gx^5}{p^5}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^6};$$

6d.

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^6 + (2\alpha c - 2\gamma a)p^5x + (-\gamma b + \beta c + 3\alpha d - 3a)p^4x^2 + (-2b + 2\beta d)p^3x^3 + (-c + \gamma d)p^2x^4}{(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 2\beta a)p^6 + (-\beta b + 2\alpha c - 4a)p^5x + (-3b + 3\alpha d)p^4x^2 + (-2c + \beta d + 4\alpha e)p^3x^3 + (-d + 2\beta e)p^2x^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^3}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha\beta b - \alpha a - 3\beta a)p^6 + (2\alpha\beta c - 2\beta b - 4a)p^5x + (3\alpha\beta d + \alpha c - \beta c - 3b)p^4x^2 + (4\alpha\beta e + 2\alpha d - 2c)p^3x^3 + (3\alpha e + \beta e - d)p^2x^4}{(\alpha p + x)^4(\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^6 + (2\alpha c - 2\gamma a)p^5x + (3\alpha d + \beta c - \gamma b - 3a)p^4x^2 + (4\alpha e + 2\beta d - 2b)p^3x^3 + (3\beta e + \gamma d - c)p^2x^4 + 2\gamma epx^5 + ex^6}{(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 5a)p^6 + (2\alpha c - 4b)p^5x + (3\alpha d - 3c)p^4x^2 + (4\alpha e - 2d)p^3x^3 + (5\alpha f - e)p^2x^4}{(\alpha p + x)^6}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{(\alpha p + x)^5}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^6 + (2\alpha c - 2a)p^5 x + (3\alpha d + \beta c - b)p^4 x^2 + (4\alpha e + 2\beta d)p^3 x^3 + (5\alpha f + 3\beta e + d)p^2 x^4 + (4\beta f + 2e)px^5 + 3fx^6}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^3}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4 x + cp^3 x^2 + dp^2 x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha\beta b - \alpha a - 3\beta a)p^6 + (2\alpha\beta c - 2\beta b - 4a)p^5 x + (3\alpha\beta d + \alpha c - \beta c - 3b)p^4 x^2 + (4\alpha\beta e + 2\alpha d - 2c)p^3 x^3 + (5\alpha\beta f + 3\alpha e + \beta e - d)p^2 x^4 + (4\alpha f + 2\beta f)px^5 + fx^6}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4 x + cp^3 x^2 + dp^2 x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha\beta b - \alpha a - 2\beta a)p^6 + (2\alpha\beta c - \beta b - 3a)p^5 x + (3\alpha\beta d + \alpha c - 2b)p^4 x^2 + (4\alpha\beta e + 2\alpha d + \beta d - c)p^3 x^3 + (5\alpha\beta f + 3\alpha e + 2\beta e)p^2 x^4 + (4\alpha f + 3\beta f + e)px^5 + 2fx^6}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4 x + cp^3 x^2 + dp^2 x^3 + epx^4 + fx^5}{p^2(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - \beta a)p^6 + (2\alpha c - 2a)p^5 x + (3\alpha d + \beta c - b)p^4 x^2 + (4\alpha e + 2\beta d)p^3 x^3 + (5\alpha f + 3\beta e + d)p^2 x^4 + (4\beta f + 2e)px^5 + 3fx^6}{p^2(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}\,\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4 x + cp^3 x^2 + dp^2 x^3 + epx^4 + fx^5}{p^3(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 5a)p^6 + (2\alpha c - 4b)p^5x + (3\alpha d - 3c)p^4x^2 + (4\alpha e - 2d)p^3x^3 + (5\alpha f - e)p^2x^4 + 6\alpha gpx^5 + gx^6}{(\alpha p + x)^6}\dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5x + cp^4x^2 + dp^3x^3 + ep^2x^4 + fpx^5 + gx^6}{p(\alpha p + x)^5}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 4a)p^6 + (2\alpha c - 3b)p^5x + (3\alpha d - 2c)p^4x^2 + (4\alpha e - d)p^3x^3 + 5\alpha fp^2x^4 + (6\alpha g + f)px^5 + 2gx^6}{p(\alpha p + x)^5}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^2(\alpha p + x)^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 3a)p^6 + (2\alpha c - 2b)p^5x + (3\alpha d - c)p^4x^2 + 4\alpha ep^3x^3 + (5\alpha f + e)p^2x^4 + (6\alpha g + 2f)px^5 + 3gx^6}{p^2(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0.\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^3(\alpha p + x)^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - 2a)p^6 + (2\alpha c - b)p^5x + 3\alpha dp^4x^2 + (4\alpha e + d)p^3x^3 + (5\alpha f - 2e)p^2x^4 + (6\alpha g + 3f)px^5 + 4gx^6}{p^3(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0.\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{dp^6 +}{p^4(\alpha p + x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(\alpha b - a)p^6 + 2\alpha cp^5x + (3\alpha d + c)p^4x^2 + (4\alpha e + 2d)p^3x^3 + (5\alpha f + 3e)p^2x^4\ (6\alpha g + 4f)px^5 + 5gx^6}{p^4(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0.\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 +}{p^5(\alpha p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{bp^6 + 2cp^5x + 3dp^4x^2 + 4ep^3x^3 + 5fp^2x^4 + 6gpx^5 + 7hx^6}{p^6}\dot{x} = 0.\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^7 +}{p^7}.$$

Soit, par exemple, l'équation

$$\dot{y} + \frac{-8p^2x^3 + px^4 + x^5}{-4p^5 + 8p^4x - p^3x^2 - 5p^2x^3 + px^4 + x^5}\,\dot{x} = 0,$$

cette équation ne peut ſe rapporter qu'à la troiſième ou à la cinquième formule de ſon degré. En la rapportant à la troiſième formule, j'aurai

$$-4p^5 + 8p^4x - p^3x^2 - 5p^2x^3 + px^4 + x^5 = (\alpha p + x)^3\,(\beta p + x)^2 = \alpha^3\beta^2p^5 + \begin{matrix} 3\alpha^2\beta^2 \\ +\,2\alpha^3\beta \end{matrix}\,p^4x$$

$$+ \begin{matrix} 3\alpha\beta^2 \\ +\,6\alpha^2\beta \\ +\,\alpha^3 \end{matrix}\,p^3x^2 + \begin{matrix} \beta^2 \\ +\,6\alpha\beta \\ +\,3\alpha^2 \end{matrix}\,p^2x^3 + \begin{matrix} 2\beta \\ +\,3\alpha \end{matrix}\,px^4 + x^5;$$

donc $\alpha^3\beta^2 + 4 = 0$, $3\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^3\beta - 8 = 0$, $3\alpha\beta^2 + 6\alpha^2\beta + \alpha^3 + 1 = 0$, $\beta^2 + 6\alpha\beta + 3\alpha^2 + 5 = 0$, $2\beta + 3\alpha - 1 = 0$; donc $\beta = \frac{1 - 3\alpha}{2}$; donc $5\alpha^2 - 2\alpha - 7 = 0$; $5\alpha^3 + 6\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$, $15\alpha^4 - 14\alpha^3 + 3\alpha^2 - 32 = 0$, $9\alpha^5 - 6\alpha^4 + \alpha^3 + 16 = 0$; donc $\alpha^2 = \frac{2\alpha + 7}{5}$, $\alpha^2 = \frac{3\alpha + 4}{5\alpha + 6}$. En égalant ces deux valeurs de α^2, on aura $5\alpha^2 + 16\alpha + 11 = 0$, ou $\alpha^2 = \frac{-16\alpha - 11}{5}$; donc $2\alpha + 7 = -16\alpha - 11$; donc $\alpha = -1$.

Cette valeur de α ſatisfait à toutes nos équations, on aura $\beta = 2$. Je ſubſtitue ces valeurs de α & de β dans le numérateur de la formule, pour le comparer enſuite avec celui de l'équation donnée. J'aurai $-2b - 3a = 0$, $-4c - 2b - 3a = 0$; donc $c = 0$. J'aurai $3d + b = 0$, $e = 1$. Soit $b = 0$, j'aurai $d = 0$, $a = 0$, & l'intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{x^4}{p(-p + x)^2(2p + x)}$.

Si l'on eut donné à b quelqu'autre valeur, l'on auroit eu la même intégrale ſous une autre forme : cet exemple eſt celui de M. Newton dans ſon *Traité des Quadratures.*

Soit l'équation

$$\dot{y} + \frac{-12p^5x - 12p^3x^3}{p^6 - 2p^5x - p^4x^2 + 4p^3x^3 - p^2x^4 - 2px^5 + x^6}\dot{x} = 0,$$

le dénominateur du coëfficient de $\dot{x}$ dans cette équation peut ſe rapporter au dénominateur du coëfficient de $\dot{x}$ de la première, ſeconde, troiſième, quatrième, cinquième, ſixième, ſeptième & dixième formule; mais le numérateur du coëfficient de $\dot{x}$ ne peut ſe rapporter qu'au numérateur de la première, ſeconde, troiſième & cinquième formule; par conſéquent ſi cette équation eſt intégrable, elle le ſera par la première, ou par la ſeconde, ou par la troiſième, ou par la cinquième formule.

Soit donc 1.° $p^6 - 2p^5x - p^4x^2 + 4p^3x^3 - p^2x^4 - 2p^5 + x^6 = (\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)^2 =$

$$\alpha^2p^6 + 2\alpha\beta p^5x + \begin{matrix}\beta^2 \\ + 2\alpha\gamma\end{matrix}\, p^4x^2 + \begin{matrix}2\beta\gamma \\ + 2\alpha\end{matrix}\, p^3x^3 + \begin{matrix}\gamma^2 \\ + 2\beta\end{matrix}\, p^2x^4$$

$+ 2\gamma px^5 + x^6$; donc $\gamma = -1, \beta = -1, \alpha = 1$. Je ſubſtitue ces valeurs dans le numérateur de la formule, pour le comparer avec celui de l'équation. J'aurai $(b + a)p^6 + (2c + 2a)p^5x + (b - c + 3d - 3a)p^4x^2 + (-2b - 2d)p^3x^3 + (-c - d)p^2x^4 = -12p^5x - 12p^3x^3$; donc $b + a = 0$, $c + a = -6$, $b - c + 3d - 3a = 0$, $b + d = 6$, $(c + d) = 0$; donc $b - c = 6$, & $b - c = 0$, ce qui eſt abſurde; par conſéquent notre équation n'appartient pas à la première formule.

De l'opération précédente il ſuit que le dénominateur $p^6 - 2p^5x -$ &c. eſt un quarré, & que par conſéquent notre équation ne peut pas appartenir à la ſeconde formule; elle ne peut pas non plus appartenir à la cinquième, car nous avons trouvé $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -1$, & dans la cinquième formule α étant $= 1$, β ſeroit $= 3$, & $\gamma = 3$; il ne reſte donc plus que la troiſième formule à laquelle notre équation puiſſe ſe rapporter. On aura $p^6 - 2p^5x - p^4x^2 + 4p^3x^3 - p^2x^4 - 2px^5 + x^6 = (\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2 = (\alpha^2\beta p^3 + \begin{smallmatrix} 2\alpha\beta \\ +\alpha^2 \end{smallmatrix} p^2x + \begin{smallmatrix} \beta \\ +2\alpha \end{smallmatrix} px^2 + x^3)^2$; donc $\alpha^2\beta = 1$, $2\alpha\beta + \alpha^2 = -1$, $2\alpha + \beta = -1$; donc $\beta = -2\alpha - 1$; donc $-2\alpha^3 - \alpha^2 = 1$, $3\alpha^2 + 2\alpha = 1$; donc $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$; donc $\alpha + 1 = 0$; donc $\alpha = -1$; donc $\beta = 1$. Je ſubſtitue ces valeurs de α & de β dans le numérateur de la troiſième formule, pour le comparer enſuite avec celui de l'équation. J'aurai $-b - 2a = 0$, $-2c - 2b - 4a = -12$, $-3d - 2c - 3b = 0$, $-4e - 2d - 2c = -12$, $-2e - d = 0$; donc $b = -2a$, $d = -2e$; donc $c = 6$, donc $e - 2 + a = 0$. Soit $e = 2$; donc $a = 0$, $b = 0$, $d = -4$, l'intégrale ſera $n = \frac{y}{p} + \frac{6p^2x^2 - 4px^3 + 2x^4}{(-p+x)^3\,(p+x)}$.

L'on voit qu'il faut bien des conditions pour qu'une de ces équations-ci ſoit intégrable; mais ſi elle n'eſt pas intégrable abſolument, elle pourroit être intégrable par logarithmes, & ſi elle n'eſt intégrable ni abſolument, ni par logarithmes,

logarithmes, elle pourroit être intégrable en partie absolument & en partie par logarithmes.

Quoique tout ceci n'appartienne pas à notre sujet, ayant trouvé la solution complète de ce problème, j'ai cru que je ne ferois pas mal de la mettre ici.

De même que nous avons construit la Table précédente qui contient par ordre toutes les équations différencielles possibles à intégrales absolues, l'on construira la Table suivante qui contient aussi par ordre toutes les équations différencielles possibles à intégrales purement logarithmiques.

TABLE II.

DES FLUXIONS LOGARITHMIQUES, ET DE LEURS FLUENTES.

1^{d}

$$\dot{y} + \frac{qp}{Ap+x}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap+x}{p}.$$

2^{d}

$$\dot{y} + \frac{\begin{matrix}+qBp^2 + qpx\\ +rA \quad +r\end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap+x}{p} + r\,l\,\frac{Bp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2}.$$

$$\dot y + \frac{\begin{matrix} + qBCp^3 & + q(B+C)p^2x & + qpx^2 \\ + rAC & + r(A+C) & + r \\ + sAB & + s(A+B) & + s \end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)}\,\dot x = 0 \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap+x}{p} + rl\,\frac{Bp+x}{p} + sl\,\frac{Cp+x}{p}.$$

$$\dot y + \frac{\begin{matrix} + qBCp^3 & + q(B+2C)p^2x & + 2qpx^2 \\ + rA & + rB & + r \end{matrix}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)}\,\dot x = 0 \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap^2+Bpx+x^2}{p^2} + rl\,\frac{Cp+x}{p}.$$

$$\dot y + \frac{qBp^3 + 2qCp^2x + 3qpx^2}{Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3}\,\dot x = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3}{p^3}.$$

4d

$$\dot y + \frac{\begin{matrix} + qBCDp^4 & + q(BC+BD+CD)p^3x \\ + rACD & + r(AC+AD+CD) \\ + sABD & + s(AB+AD+BD) \\ + tABC & + t(AB+AC+BC) \end{matrix} \quad \begin{matrix} + q(B+C+D)p^2x^2 & + qpx^3 \\ + r(A+C+D) & + r \\ + s(A+B+D) & + s \\ + t(A+B+C) & + t \end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)(Dp+x)}\,\dot x = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap+x}{p} + rl\,\frac{Bp+x}{p} + sl\,\frac{Cp+x}{p} + tl\,\frac{Dp+x}{p}.$$

$$\dot y + \frac{\begin{matrix} + qBCDp^4 & + q(BC+BD+2C\ldots \\ + rAD & + r(A+BD) \\ + sAC & + s(A+BC) \end{matrix} \quad \begin{matrix} + q(B+2C+2D)p^2x^2 & + 2qpx^3 \\ + r(B+D) & + r \\ + s(B+C) & + s \end{matrix}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)(Dp+x)}\,\dot x = \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{Cp + x}{p} + s\,l\,\frac{Dp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + qBCp^4 & + q(BD + 2C)p^3x & + q(B + 2D)p^2x^2 & + 2qpx^3 \\ + rAD & + r(BD + 2A) & + r(D + 2B) & + 2r \end{array}}{(Ap^2 + Bpx + x^2)\,(Cp^2 + Dpx + x^2)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{Cp^2 + Dpx + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + qBDp^4 & + q(2CD + B)p^3x & + q(3D + 2C)p^2x^2 & + 3qpx^3 \\ + rA & + rB & + rC & + r \end{array}}{(Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3)\,(Dp + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3} + r\,l\,\frac{Dp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^4 + 2qCp^3x + 3qDp^2x^2 + 4qpx^3}{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}{p^4}.$$

Le coëfficient de $\dot{x}$ de chaque équation différencielle de la première Table, peut ſe trouver avec le coëfficient de $\dot{x}$ de toutes celles de la ſeconde; ce qui formera la Table III, où le chiffre mis au deſſus de l'équation réſultante, marque le degré de cette équation.

Je forme la Table III, en ſuppoſant que je ne veux réſoudre le problème que je me ſuis propoſé, que pour les équations différencielles depuis le degré o juſqu'au degré 4 incluſivement; l'on pourra la former de même pour un degré ſupérieur lorſqu'on voudra.

TABLE III.

Qui contient les équations intégrables en partie absolument & en partie par logarithmes.

(1)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{qp}{Ap + x}\right)\dot{x} = 0.$$

(2)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{ll} +qBp^2 & +qpx \\ +rA & +r \end{array}}{(Ap + x)(Bp + x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(2)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{+qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2}\right)\dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{lll} +qBCp^3 & +q(B + C)p^2x & +qpx^2 \\ +rAC & +r(A + C) & +r \\ +sAB & +s(A + B) & +s \end{array}}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)}\right)\dot{x} =$$

(3)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{lll} +qBCp^3 & +q(B + 2C)p^2x & +2qpx^2 \\ +rA & +rB & +r \end{array}}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp + x)}\right)\dot{x} =$$

(3)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{qBp^3 + 2qCp^2x + 3qpx^2}{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}\right)\dot{x} =$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{ll} +qBCDp^4 & +q(BC + BD + C \\ +rACD & +r(AC + AD + \\ +sABD & +s(AB + AD + \\ +tABC & +t(AB + AC + \end{array}}{}\right.$$

$$\left.\frac{\begin{array}{ll} +q(B + C + D)p^2x^2 & +qpx^3 \\ +r(A + C + D) & +r \\ +s(A + B + D) & +s \\ +t(A + B + C) & +t \end{array}}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)(Dp + x)}\right);$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{l}+qBCDp^4 \\ +rAD \\ +sAC\end{array} \begin{array}{l}+q(BC+BD+2CD)p^3x \\ +r(A+BD) \\ +s(A+BC)\end{array} \begin{array}{l}+q(B+2C+2D)p^2x^2 \\ +r(B+D) \\ +s(B+C)\end{array} \begin{array}{l}+2qpx^3 \\ +r \\ +s\end{array}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)(Dp+x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{l}+qBCp^4 \\ +rAD\end{array} \begin{array}{l}+q(BD+2C)p^3x \\ +r(BD+2A)\end{array} \begin{array}{l}+q(B+2D)p^2x^2 \\ +r(D+2B)\end{array} \begin{array}{l}+2qpx^3 \\ +2r\end{array}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp^2+Dpx+x^2)}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{l}+qBDp^4 \\ +rA\end{array} \begin{array}{l}+q(2CD+B)p^3x \\ +rB\end{array} \begin{array}{l}+q(3D+2C)p^2x^2 \\ +rC\end{array} \begin{array}{l}+3qpx^3 \\ +r\end{array}}{(Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3)(Dp+x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{qBp^4 + 2qCp^3x + 3qDp^2x^2 + 4qpx^3}{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}\right)\dot{x} = 0.$$

(2)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp + 2cx}{p} + \frac{qp}{Ap + x}\right)\dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp + 2cx}{p} + \frac{\begin{array}{l}+qBp^2 \\ +rA\end{array} \begin{array}{l}+qpx \\ +r\end{array}}{(Ap+x)(Bp+x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp + 2cx}{p} + \frac{qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2}\right)\dot{x} = 0.$$

3^d

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{lll} + qBCp^3 & + q(B+C)p^2x & + qpx^2 \\ + rAC & + r(A+C) & + r \\ + sAB & + s(A+B) & + s \end{array}}{(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap+x}{p} + rl\,\frac{Bp+x}{p} + sl\,\frac{Cp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{lll} + qBCp^3 & + q(B+2C)p^2x & + 2qpx^2 \\ + rA & + rB & + r \end{array}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap^2+Bpx+x^2}{p^2} + rl\,\frac{Cp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^3 + 2qCp^2x + 3qpx^2}{Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3}{p^3}.$$

4^d

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + qBCDp^4 & + q(BC+BD+CD)p^3x & + q(B+C+D)p^2x^2 & + qpx^3 \\ + rACD & + r(AC+AD+CD) & + r(A+C+D) & + r \\ + sABD & + s(AB+AD+BD) & + s(A+B+D) & + s \\ + tABC & + t(AB+AC+BC) & + t(A+B+C) & + t \end{array}}{(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)(Dp+x)}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap+x}{p} + rl\,\frac{Bp+x}{p} + sl\,\frac{Cp+x}{p} + tl\,\frac{Dp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + qBCDp^4 & + q(BC+BD+2CD)p^3x & + q(B+2C+2D)p^2x^2 & + 2qpx^3 \\ + rAD & + r(A+BD) & + r(B+D) & + r \\ + sAC & + s(A+BC) & + s(B+C) & + s \end{array}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)(Dp+x)}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{Cp + x}{p} + s\,l\,\frac{Dp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + qBCp^4 & + q(BD + 2C)p^3x & + q(B + 2D)p^2x^2 & + 2qpx^3 \\ + rAD & + r(BD + 2A) & + r(D + 2B) & + 2r \end{array}}{(Ap^2 + Bpx + x^2)\,(Cp^2 + Dpx + x^2)}\,\dot{x} = 0\ldots\ldots;$$

$$n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{Cp^2 + Dpx + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + qBDp^4 & + q(2CD + B)p^3x & + q(3D + 2C)p^2x^2 & + 3qpx^3 \\ + rA & + rB & + rC & + r \end{array}}{(Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3)\,(Dp + x)}\,\dot{x} = 0\ldots\ldots;$$

$$n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3} + r\,l\,\frac{Dp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^4 + 2qCp^3x + 3qDp^2x^2 + 4qpx^3}{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}\,\dot{x} = 0\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}{p^4}.$$

Le coëfficient de $\dot{x}$ de chaque équation différencielle de la première Table, peut se trouver avec le coëfficient de $\dot{x}$ de toutes celles de la seconde; ce qui formera la Table III, où le chiffre mis au dessus de l'équation résultante, marque le degré de cette équation.

Je forme la Table III, en supposant que je ne veux résoudre le problème que je me suis proposé, que pour les équations différencielles depuis le degré 0 jusqu'au degré 4 inclusivement; l'on pourra la former de même pour un degré supérieur lorsqu'on voudra.

TABLE III.

Qui contient les équations intégrables en partie absolument & en partie par logarithmes.

(1)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{qp}{Ap + x}\right)\dot{x} = 0.$$

(2)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{ll} +qBp^2 & +qpx \\ +rA & +r \end{array}}{(Ap + x)(Bp + x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(2)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{+qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2}\right)\dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{lll} +qBCp^3 & +q(B + C)p^2x & +qpx^2 \\ +rAC & +r(A + C) & +r \\ +sAB & +s(A + B) & +s \end{array}}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{lll} +qBCp^3 & +q(B + 2C)p^2x & +2qpx^2 \\ +rA & +rB & +r \end{array}}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp + x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(3')

$$\dot{y} + \left(b + \frac{qBp^3 + 2qCp^2x + 3qpx^2}{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{array}{llll} +qBCDp^4 & +q(BC + BD + CD)p^3x & +q(B + C + D)p^2x^2 & +qpx^3 \\ +rACD & +r(AC + AD + CD) & +r(A + C + D) & +r \\ +sABD & +s(AB + AD + BD) & +s(A + B + D) & +s \\ +tABC & +t(AB + AC + BC) & +t(A + B + C) & +t \end{array}}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)(Dp + x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{matrix} +qBCDp^4 \\ +rAD \\ +sAC \end{matrix} \begin{matrix} +q(BC+BD+2CD)p^3x \\ +r(A+BD) \\ +s(A+BC) \end{matrix} \begin{matrix} +q(B+2C+2D)p^2x^2 \\ +r(B+D) \\ +s(B+C) \end{matrix} \begin{matrix} +2qpx^3 \\ +r \\ +s \end{matrix}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)(Dp+x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{matrix} +qBCp^4 \\ +rAD \end{matrix} \begin{matrix} +q(BD+2C)p^3x \\ +r(BD+2A) \end{matrix} \begin{matrix} +q(B+2D)p^2x^2 \\ +r(D+2B) \end{matrix} \begin{matrix} +2qpx^3 \\ +2r \end{matrix}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp^2+Dpx+x^2)}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{\begin{matrix} +qBDp^4 \\ +rA \end{matrix} \begin{matrix} +q(2CD+B)p^3x \\ +rB \end{matrix} \begin{matrix} +q(3D+2C)p^2x^2 \\ +rC \end{matrix} \begin{matrix} +3qpx^3 \\ +r \end{matrix}}{(Ap^3+Bp^2x+Cpx^2+x^3)(Dp+x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(b + \frac{qBp^4 + 2qCp^3x + 3qDp^2x^2 + 4qpx^3}{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}\right)\dot{x} = 0.$$

(2)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp+2cx}{p} + \frac{qp}{Ap+x}\right)\dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp+2cx}{p} + \frac{\begin{matrix} +qBp^2 \\ +rA \end{matrix} \begin{matrix} +qpx \\ +r \end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp+2cx}{p} + \frac{qBp^2+2qpx}{Ap^2+Bpx+x^2}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp + 2cx}{p} + \frac{\begin{array}{lll} + qBCp^3 & + q(B + C)p^2x & + qpx^2 \\ + rAC & + r(A + C) & + r \\ + sAB & + s(A + B) & + s \end{array}}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp + 2cx}{p} + \frac{\begin{array}{lll} + qBCp^3 & + q(B + 2C)p^2x & + 2qpx^2 \\ + rA & + rB & + r \end{array}}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{bp + 2cx}{p} + \frac{qBp^3 + 2qCp^2x + 3qpx^2}{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - a)p^2}{(ap + x)^2} + \frac{qp}{Ap + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(2)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - a)p^2}{(ap + x)^2} + \frac{qp}{ap + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - a)p^2}{(ap + x)^2} + \frac{\begin{array}{ll} + qBp^2 & + qpx \\ + rA & + r \end{array}}{(Ap + x)(Bp + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - a)p^2}{(ap + x)^2} + \frac{\begin{array}{ll} + qAp^2 & + qpx \\ + ra & + r \end{array}}{(ap + x)(Ap + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - a)p^2}{(ap + x)^2} + \frac{qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^2}{(\alpha p + x)^2} + \frac{\begin{matrix} + qB\alpha p^3 & + q(B + \alpha)p^2 x & + qpx^2 \\ + rA\alpha & + r(A + \alpha) & + r \\ + sAB & + s(A + B) & + s \end{matrix}}{(\alpha p + x)(Ap + x)(Bp + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^2}{(\alpha p + x)^2} + \frac{\begin{matrix} + qB\alpha p^2 & + q(B + 2\alpha)p^2 x & + 2qpx^2 \\ + rA & + rB & + r \end{matrix}}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(\alpha p + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^2 + 2\alpha cpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2} + \frac{qp}{Ap + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(2)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^2 + 2\alpha cpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2} + \frac{qp}{\alpha p + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^2 + 2\alpha cpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2} + \frac{\begin{matrix} + qBp^2 & + qpx \\ + rA & + r \end{matrix}}{(Ap + x)(Bp + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^2 + 2\alpha cpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2} + \frac{\begin{matrix} + q\alpha p^2 & + qpx \\ + rA & + r \end{matrix}}{(\alpha p + x)(Ap + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^2 + 2\alpha cpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2} + \frac{qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^2 + 2\alpha c p x + c x^2}{(\alpha p + x)^2} + \frac{\begin{array}{lll} + qB\alpha p^3 & + q(B + \alpha)p^2 x & + qpx^2 \\ + rA\alpha & + r(A + \alpha) & + r \\ + sAB & + s(A + B) & + s \end{array}}{(\alpha p + x)(Ap + x)(Bp + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^2 + 2\alpha c p x + c x^2}{(\alpha p + x)^2} + \frac{\begin{array}{lll} + qB\alpha p^3 & + q(B + 2\alpha)p^2 x & + 2qpx^2 \\ + rA & + rB & + r \end{array}}{(\alpha p + x)(Ap^2 + Bpx + x^2)} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\ddot{y} + \left(\frac{bp^2 + 2cpx + 3dx^2}{p^2} + \frac{qp}{Ap + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{bp^2 + 2cpx + 3dx^2}{p^2} + \frac{\begin{array}{ll} + qBp^2 & + qpx \\ + rA & + r \end{array}}{(Ap + x)(Bp + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{bp^2 + 2cpx + 3dx^2}{p^2} + \frac{qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(\alpha b - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2 x}{(\alpha p + x)^3} + \frac{qp}{Ap + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(3)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(\alpha b - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2 x}{(\alpha p + x)^3} + \frac{qp}{\alpha p + x} \right) \dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(\alpha b - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2 x}{(\alpha p + x)^3} + \frac{\begin{array}{ll} + q\alpha p^2 & + qpx \\ + rA & + r \end{array}}{(\alpha p \pm x)(Ap + x)} \right) \dot{x} = 0.$$

$\ddot{y} +$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2 x + 3\alpha d p x^2 + d x^3}{(\alpha p + x)^2} + \frac{qp}{Ap + x}\right)\dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2 x + 3\alpha d p x^2 + d x^3}{(\alpha p + x)^2} + \frac{qp}{\alpha p + x}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - 2a)p^3 + (2\alpha c - b)p^2 x + 3\alpha d p x^2 + d x^3}{(\alpha p + x)^2} + \frac{\begin{matrix} + q\alpha p^2 + qpx \\ + rA \quad + r \end{matrix}}{(\alpha p + x)(Ap + x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - a)p^3 + 2\alpha c p^2 x + (3\alpha d + c)p x^2 + 2 d x^3}{p(\alpha p + x)^2} + \frac{qp}{Ap + x}\right)\dot{x} = 0.$$

(3)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - a)p^3 + 2\alpha c p^2 x + (3\alpha d + c)p x^2 + 2 d x^3}{p(\alpha p + x)^2} + \frac{qp}{\alpha p + x}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(ab - a)p^3 + 2\alpha c p^2 x + (3\alpha d + c)p x^2 + 2 d x^3}{p(\alpha p + x)^2} + \frac{\begin{matrix} + q\alpha p^2 + qpx \\ + rA \quad + r \end{matrix}}{(\alpha p + x)(Ap + x)}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} \pm \left(\frac{bp^3 + 2cp^2 x + 3dpx^2 + 4ex^3}{p^3} \pm \frac{qp}{Ap + x}\right)\dot{x} = 0.$$

Eç

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(\alpha b - \beta a)p^4 + (2\alpha c - 2a)p^3x + (-b + \beta c)p^2x^2}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2} + \frac{q\beta p^2 + 2qpx}{\alpha p^2 + \beta px + x^2}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\dot{y} + \left(\frac{(\alpha b - 3a)p^4 + (2\alpha c - 2b)p^3x + (3\alpha d - c)p^2x^2}{(\alpha p + x)^4} + \frac{qp}{\alpha p + x}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(\alpha b - \beta a)p^4 + (2\alpha c - 2a)p^3x + (3\alpha d + \beta e - b)p^2x^2 + 4\alpha epx^3 + ex^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2} + \frac{q\beta p^2 + 2qpx}{\alpha p^2 + \beta px + x^2}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^4 + (2\alpha c - 2b)p^3x + (3\alpha d - c)p^2x^2 + 4\alpha epx^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^4} + \frac{qp}{\alpha p + x}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(\alpha b - 2a)p^4 + (2\alpha c - b)p^3x + 3\alpha dp^2x^2 + (4\alpha e + d)px^3 + 2ex^4}{p(\alpha p + x)^3} + \frac{qp}{\alpha p + x}\right)\dot{x} = 0.$$

(4)

$$\ddot{y} + \left(\frac{(\alpha b - a)p^4 + 2\alpha cp^3x + (3\alpha d + c)p^2x^2 + (4\alpha e + 2d)px^3 + 3ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2} + \frac{qp}{\alpha p + x}\right)\dot{x} = 0.$$

Ayant ces trois Tables, l'on en tirera la Table IV, qui contient la ſolution complète du problème que nous nous ſommes propoſé.

$$\dot{y} + \frac{(qB + bA)p^3 + (2qC + bB)p^2x + (3q + bC)px^2 + bx^3}{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rA)p^3 + [q(B + 2C) + rB]p^2x + (2q + r)px^2}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + rl\frac{Cp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rA + bAC)p^3 + [q(B + 2c) + rB + b(BC + A)]p^2x + [2q + r + b(B + C)]px^2 + bx^3}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + rl\frac{Cp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rAC + sAB)p^3 + [q(B + C) + r(A + C) + s(A + B)]p^2x + (q + r + s)px^2}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{Bp + x}{p} + sl\frac{Cp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rAC + sAB + bABC)p^3 + [q(B + C) + r(A + C) + s(A + B) + b(AB + AC + BC)]p^2x + [q + r + s + b(A + B + C)]px^2 + bx^3}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{Bp + x}{p} + sl\frac{Cp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(ba - a)p^2 + 2capx + cx^2}{(ap+x)^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(ap+x)};$$

$$\dot{y} + \frac{(bap + qa - a)p^2 + (2ca + q)px + cx^2}{(ap+x)^2}\,\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(ap+x)} + ql\,\frac{ap+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^2 + 2qpx}{Ap^2 + Bpx + x^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2};$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + qB)p^2 + (bB + 2q)px + bx^2}{Ap^2 + Bpx + x^2}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qB + rA)p^2 + (q + r)px}{(Ap+x)(Bp+x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap+x}{p} + rl\,\frac{Bp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bAB + qB + rA)p^2 + [b(A+B) + q + r]px + bx^2}{(Ap+x)(Bp+x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\,\frac{Ap+x}{p} + rl\,\frac{Bp+x}{p}.$$

3^{d}

$$\dot{y} + \frac{bp^3 + 2cp^2x + 3dpx^2 + 4ex^3}{p^3}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + x^4}{p^4},$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + q)p^3 + (b + 2cA)p^2x + (2c + 3dA)px^2 + 3dx^3}{p^2(Ap+x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + ql\,\frac{Ap+x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - a)p^3 + 2c\alpha p^2 x + (3d\alpha + c)px^2 + 2dx^3}{p(\alpha p + x)^2}\,\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha + q\alpha - a)p^3 + (2c\alpha + q)p^2x + (3d\alpha + c)px^2 + 2dx^3}{p(\alpha p + x)^2}\,\dot{x} = 0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + qB)p^3 + (bB + 2cA + 2q)p^2x + (b + 2cB)px^2 + 2cx^3}{p(Ap^2 + Bpx + x^2)}\,\dot{x} = 0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bAB + qB + rA)p^3 + [b(A + B) + 2cAB + q + r]p^2x + [b + 2c(A + B)]px^2 + 2cx^3}{p(Ap + x)(Bp + x)}\,\dot{x} = 0.\ \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p} + r\,l\,\frac{Bp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 2a)p^3 + (2c\alpha - b)p^2x}{(\alpha p + x)^3}\,\dot{x} = 0.\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha + q\alpha^2 - b)p^3 + (2\alpha c + 2q\alpha - b)p^2x + qpx^2}{(\alpha p + x)^3}\,\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 2a)p^3 + (2c\alpha - b)p^2x + 3d\alpha px^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^3}\,\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha + q\alpha^2 - 2a)p^3 + (2c\alpha + 2q\alpha - b)p^2x + (3d\alpha + q)px^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^3}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2)p^3 + (b\alpha - a + 2q\alpha)p^2x + qpx^2}{(\alpha p + x)^2\,(Ap + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{\alpha p + x} + ql\,\frac{Ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2 + r\alpha A)p^3 + [b\alpha - a + 2q\alpha + r(\alpha + A)]p^2x + (q + r)px^2}{(\alpha p + x)^2\,(Ap + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{\alpha p + x} + ql\,\frac{Ap + x}{p} + rl\,\frac{\alpha p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2)p^3 + (b\alpha - a + 2q\alpha + 2c\alpha A)p^2x + [c(2\alpha + A) + q]px^2 + cx^3}{(\alpha p + x)^2\,(Ap + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\,\frac{Ap + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2 + r\alpha A)p^3 + [b\alpha - a + 2q\alpha + 2c\alpha A + r(\alpha + A)]p^2x + [c(2\alpha + A) + q + r]px^2 + cx^3}{(\alpha p + x)^2\,(Ap + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\,\frac{Ap + x}{p} + rl\,\frac{\alpha p + x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^3 + 2qCp^2x + 3qpx^2}{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qB + bA)p^3 + (2qC + bB)p^2x + (3q + bC)px^2 + bx^3}{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\,\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rA)p^3 + [q(B + 2C) + rB]p^2x + (2q + r)px^2}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + rl\,\frac{Cp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rA + bAC)p^3 + [q(B + 2C) + rB + b(BC + A)]p^2x + [2q + r + b(B + C)]px^2 + bx^3}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + rl\,\frac{Cp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rAC + sAB)p^3 + [q(B + C) + r(A + C) + s(A + B)]p^2x + (q + r + s)px^2}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap + x}{p} + rl\,\frac{Bp + x}{p} + sl\,\frac{Cp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rAC + sAB + bABC)p^3 + [q(B + C) + r(A + C) + s(A + B) + b(AB + AC + BC)]p^2x + [q + r + s + b(A + B + C)]px^2 + bx^3}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\,\frac{Ap + x}{p} + rl\,\frac{Bp + x}{p} + sl\,\frac{Cp + x}{p}.$$

4^d

$$\dot{y} + \frac{bp^4 + 2cp^3x + 3dp^2x^2 + 4epx^3 + 5fx^4}{p^4}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^5}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + q)p^4 + (2cA + b)p^3x + (3dA + 2c)p^2x^2 + (4eA + 3d)px^3 + 4ex^4}{p^3(Ap + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^4} + ql\,\frac{Ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - a)p^4 + 2c\alpha p^3x + (3d\alpha + c)p^2x^2 + (4e\alpha + 2d)px^3 + 3ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(\alpha p + x)}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - a + q\alpha)p^4 + (2c\alpha + q)p^3x + (3d\alpha + c)p^2x^2 + (4e\alpha + 2d)px^3 + 3ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + qB)p^4 + (bB + 2cA + 2q)p^3x + (b + 2cB + 3dA)p^2x^2 + (2c + 3dB)px^3 + 3dx^4}{p^2(Ap^2 + Bpx + x^2)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + ql\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2};$$

$\dot{y}$ +

$$\dot{y} + \frac{(bAB + qB + rA)p^4 + [b(A + B) + 2cAB + q + r]p^3x + [b + 2c(A + B) + 3dAB]p^2x^2 + [2c + 3d(A + B)]px^3 + 3dx^4}{p^2(Ap + x)(Bp + x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\; n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p} + r\,l\,\frac{Bp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 2a)p^4 + (2c\alpha - b)p^3x + 3d\alpha p^2x^2 + (4e\alpha + d)px^3 + 2ex^4}{p(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\; n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 2a + q\alpha^2)p^4 + (2c\alpha - b + 2q\alpha)p^3x + (3d\alpha + q)p^2x^2 + (4e\alpha + d)px^3 + 2ex^4}{p(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$\ldots\; n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2)p^4 + (2c\alpha A + b\alpha - a + 2q\alpha)p^3x + [3d\alpha A + c(A + 2\alpha) + q]p^2x^2 + [d(3\alpha + 2A) + c]px^3 + 2dx^4}{p(\alpha p + x)^2(Ap + x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)^2} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - aA + q\alpha^2 + r\alpha A)p^4 + [2c\alpha A + b\alpha - a + 2q\alpha + r(\alpha + A)]p^3x + [3d\alpha A + c(A + 2\alpha) + q + r]p^2x^2 + [d(3\alpha + 2A) + c]px^3 + 2dx^4}{p(\alpha p + x)^2(Ap \pm x)}\dot{x} = 0. \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(ap + x)} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p} + r\,l\,\frac{ap + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + qB)p^4 + (bB + 2cA + 2qC)p^3x + (bC + 2cB + 3q)p^2x^2 + (b + 2cC)px^3 + 2cx^4}{p(Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3)}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bAC + qBC + rA)p^4 + [b(A + BC) + 2cAC + q(B + 2C) + rB]p^3x + [b(A + C) + 2c(A + BC) + 2q + r]p^2x^2 + [b + 2c(B + C)]px^3 + 2cx^4}{p(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{Cp + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(bABC + qBC + rAC + sAB)p^4 + [b(AB + AC + BC) + 2cABC + q(B + C) + r(A + C) + s(A + B)]p^3x + [b(A + B + C) + 2c(AB + AC + BC) + q + r + s]p^2x^2 + [b + 2c(A + B + C)]px^3 + 2cx^4}{p(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p} + r\,l\,\frac{Bp + x}{p} + s\,l\,\frac{Cp + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{(ba - 3a)p^4 + (2ca - 2b)p^3x + (3da - c)p^2x^2}{(ap + x)^4}\,\dot{x} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(ap + x)^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 3a + q\alpha^3)p^4 + (2c\alpha - 2b + 3q\alpha^2)p^3x + (3d\alpha - c + 3q\alpha)p^2x^2 + qpx^3}{(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{(\alpha p + x)^3} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 3a)p^4 + (2c\alpha - 2b)p^3x + (3d\alpha - c)p^2x^2 + 4e\alpha px^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - 3a + q\alpha^3)p^4 + (2c\alpha - 2b + 3q\alpha^2)p^3x + (3d\alpha - c + 3q\alpha)p^2x^2 + (4e\alpha + q)px^3 + ex^4}{(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^3} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - 2aA + q\alpha^3)p^4 + [2c\alpha A + b(\alpha - A) - 2a + 3q\alpha^2]p^3x + (2c\alpha - b + 3q\alpha)p^2x^2 + qpx^3}{(\alpha p + x)^3(Ap + x)}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha A - 2aA + q\alpha^3 + r\alpha^2A)p^4 + [2c\alpha A + b(\alpha - A) - 2a + 3q\alpha^2 + r(\alpha^2 + 2\alpha A)]p^3x + [2c\alpha - b + 3q\alpha + r(2\alpha + A)]p^2x^2 + (q + r)px^3}{(\alpha p + x)^3(Ap + x)}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)^2} + q\,l\,\frac{Ap + x}{p} + r\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{lll} + b\alpha ABp^4 & + 2c\alpha ABp^3x & + c(AB + 2\alpha A + 2\alpha B)p^2x^2 \\ - aAB & + b\alpha A + \alpha B & + b\alpha \\ + q\alpha^2 B & - a(A + B) & - a \\ + r\alpha^2 A & + q(2\alpha B + \alpha^2) & + q(2\alpha + B) \\ & + r(2\alpha A + \alpha^2) & + r(2\alpha + A) \end{array} \begin{array}{ll} + c(A + B + 2\alpha)px^3 & + cx^4 \\ + q & \\ + r & \end{array}}{(\alpha p + x)^2 (Ap + x)(Bp + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\,\frac{Ap + x}{p} + rl\,\frac{Bp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{lll} + b\alpha ABp^4 & + 2c\alpha ABp^3x & + c(AB + 2\alpha A + 2\alpha B)p^2x^2 \\ - aAB & + b(\alpha A + \alpha B) & + b\alpha \\ + q\alpha^2 B & - a(A + B) & - a \\ + r\alpha^2 A & + q(2\alpha B + \alpha^2) & + q(2\alpha + B) \\ + s\alpha AB & + r(2\alpha A + \alpha^2) & + r(2\alpha + A) \\ & + s(A\alpha + B\alpha + AB) & + s(\alpha + A + B) \end{array} \begin{array}{ll} + c(A + B + 2\alpha)px^3 & + cx^4 \\ + q & \\ + r & \\ + s & \end{array}}{(\alpha p + x)^2 (Ap + x)(Bp + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\,\frac{Ap + x}{p} + rl\,\frac{Bp + x}{p} + sl\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^4 + 2qCp^3x + 3qDp^2x^2 + 4qpx^3}{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\,\frac{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}{p^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bA + qB)p^4 + (bB + 2qC)p^3x + (bC + 3qD)p^2x^2 + (bD + 4q)px^3 + bx^4}{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\,\frac{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}{p^4}.$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{(b\alpha - a\beta + q\alpha\beta)p^4 + [2c\alpha - 2a + q(2\alpha + \beta^2)]p^3x + (c\beta - b + 3d\alpha + 3q\beta)p^2x^2 + (2d\beta + 2q)px^3 + dx^4}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2}\,\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\; n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{[b\alpha\beta - a(\alpha + \beta) + q\alpha\beta^2]p^4 + [2c\alpha\beta - 2a + q(2\alpha\beta + \beta^2)]p^3x + [c(\alpha + \beta) - b + q(\alpha + 2\beta)]p^2x^2 + qpx^3}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0.\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\; n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)(\beta p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{[b\alpha\beta - a(\alpha + \beta) + q\alpha\beta^2 + r\alpha^2\beta]p^4 + [2c\alpha\beta - 2a + q(2\alpha\beta + \beta^2) + r(2\alpha\beta + \alpha^2)]p^3x + [c(\alpha + \beta) - b + q(\alpha + 2\beta) + r(\beta + 2\alpha)]p^2x^2 + (q + r)px^3}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0.\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\; n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{(\alpha p + x)(\beta p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + \ldots\; r\,l\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{[b\alpha\beta - a(\alpha + \beta) + q\alpha\beta^2)]p^4 + [2c\alpha\beta - 2a + q(2\alpha\beta + \beta^2)]p^3x + [3d\alpha\beta + c(\alpha + \beta) - b + q(\alpha + 2\beta)]p^2x^2 + [2d(\alpha + \beta) + q]px^3 + dx^4}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0.\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\; n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)} + \ldots\; q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{llll} +ba ABp^4 & +2c\alpha ABp^3x & +c(AB+2\alpha A+2\alpha B)p^2x^2 & +c(A+B+2\alpha)px^3 + cx^4 \\ -aAB & +b\alpha A+\alpha B & +b\alpha & +q \\ +q\alpha^2 B & -a(A+B) & -a & +r \\ +r\alpha^2 A & +q(2\alpha B+\alpha^2) & +q(2\alpha+B) & \\ & +r(2\alpha A+\alpha^2) & +r(2\alpha+A) & \end{array}}{(\alpha p+x)^2(Ap+x)(Bp+x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{p(\alpha p+x)} + ql\frac{Ap+x}{p} + rl\frac{Bp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{llll} +ba ABp^4 & +2c\alpha ABp^3x & +c(AB+2\alpha A+2\alpha B)p^2x^2 & +c(A+B+2\alpha)px^3 + cx^4 \\ -aAB & +b(\alpha A+\alpha B) & +b\alpha & +q \\ +q\alpha^2 B & -a(A+B) & -a & +r \\ +r\alpha^2 A & +q(2\alpha B+\alpha^2) & +q(2\alpha+B) & +s \\ +s\alpha AB & +r(2\alpha A+\alpha^2) & +r(2\alpha+A) & \\ & +s(A\alpha+B\alpha+AB) & +s(\alpha+A+B) & \end{array}}{(\alpha p+x)^2(Ap+x)(Bp+x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2+bpx+cx^2}{p(\alpha p+x)} + ql\frac{Ap+x}{p} + rl\frac{Bp+x}{p} + sl\frac{\alpha p+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{qBp^4 + 2qCp^3x + 3qDp^2x^2 + 4qpx^3}{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}{p^4};$$

$$\dot{y} + \frac{(bA+qB)p^4 + (bB+2qC)p^3x + (bC+3qD)p^2x^2 + (bD+4q)px^3 + bx^4}{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{p} + ql\frac{Ap^4 + Bp^3x + Cp^2x^2 + Dpx^3 + x^4}{p^4}.$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{(qBD + rA)p^4 + [q(2CD + B) + rB]p^3x + [q(3D + 2C) + rC]p^2x^2 + (3q + r)px^3}{(Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3)(Dp + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3} + r\,l\,\frac{Dp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bAD + qBD + rA)p^4 + [b(A + BD) + q(2CD + B) + rB]p^3x + [b(B + CD) + q(3D + 2C) + rC]p^2x^2 + [b(C + D) + 3q + r]px^3 + bx^4}{(Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3)(Dp + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{Ap^3 + Bp^2x + Cpx^2 + x^3}{p^3} + r\,l\,\frac{Dp + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{(qBC + rAD)p^4 + [q(BD + 2C) + r(BD + 2A)]p^3x + [q(B + 2D) + r(D + 2B)]p^2x^2 + (2q + 2r)px^3}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp^2 + Dpx + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{Cp^2 + Dpx + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{(bAC + qBC + rAD)p^4 + [b(AD + BC) + q(BD + 2C) + r(BD + 2A)]p^3x + [b(A + C + BD) + q(B + 2D) + r(D + 2B)]p^2x^2 + [b(B + D) + 2q + 2r]px^3 + bx^4}{(Ap^2 + Bpx + x^2)(Cp^2 + Dpx + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{Ap^2 + Bpx + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{Cp^2 + Dpx + x^2}{p^2}.$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{matrix} +qBCDp^4 \\ +rAD \\ +sAC \end{matrix} \quad \begin{matrix} +q(BC+BD+2CD)p^3x \\ +r(BD+A) \\ +s(BC+A) \end{matrix} \quad \begin{matrix} +q(B+2C+2D)p^2x^2 \\ +r(B+D) \\ +s(B+C) \end{matrix} \quad \begin{matrix} +2qpx^3 \\ +r \\ +s \end{matrix}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)(Dp+x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap^2+Bpx+x^2}{p^2} + rl\frac{Cp+x}{p} + sl\frac{Dp+x}{p}.$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{matrix} +bACDp^4 \\ +qBCD \\ +rAD \\ +sAC \end{matrix} \quad \begin{matrix} +b(AC+AD+BCD)p^3x \\ +q(BC+BD+2CD) \\ +r(BD+A) \\ +s(BC+A) \end{matrix} \quad \begin{matrix} +b(A+BC+BD+CD)p^2x^2 \\ +q(B+2C+2D) \\ +r(B+D) \\ +s(B+C) \end{matrix} \quad \begin{matrix} +b(B+C+D)px^3+bx^4 \\ +2q \\ +r \\ +s \end{matrix}}{(Ap^2+Bpx+x^2)(Cp+x)(Dp+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap+bx}{p} + ql\frac{Ap^2+Bpx+x^2}{p^2} + rl\frac{Cp+x}{p} + sl\frac{Dp+x}{p}.$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{matrix} +qBCDp^4 \\ +rACD \\ +sABD \\ +tABC \end{matrix} \quad \begin{matrix} +q(BC+BD+CD)p^3x \\ +r(AC+AD+CD) \\ +s(AB+AD+BD) \\ +t(AB+AC+BC) \end{matrix} \quad \begin{matrix} +q(B+C+D)p^2x^2 \\ +r(A+C+D) \\ +s(A+B+D) \\ +t(A+B+C) \end{matrix} \quad \begin{matrix} +qpx^3 \\ +r \\ +s \\ +t \end{matrix}}{(Ap+x)(Bp+x)(Cp+x)(Dp+x)}\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + ql\frac{Ap+x}{p} + rl\frac{Bp+x}{p} + sl\frac{Cp+x}{p} + tl\frac{Dp+x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{\begin{array}{ll} + bACDBp^4 & + b(ABC + ABD + ACD + BCD)p^3x \\ + qBCD & + q(BC + BD + CD) \\ + rACD & + r(AC + AD + CD) \\ + sABD & + s(AB + AD + BD) \\ + tABC & + t(AB + AC + BC) \end{array}}{}$$

$$\frac{\begin{array}{l} + b(AB + AC + AD + BC + BD + CD)p^2x^2 \\ + q(B + C + D) \\ + r(A + C + D) \\ + s(A + B + D) \\ + t(A + B + C) \end{array}}{}$$

$$\frac{\begin{array}{l} + b(A + B + C + D)px^3 + bx^4 \\ + q \\ + r \\ + s \\ + t \end{array}}{(Ap + x)(Bp + x)(Cp + x)(Dp + x)}\dot{x} = 0 \ldots ;$$

$$\ldots\ldots\; n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{Ap + x}{p} + rl\frac{Bp + x}{p} + sl\frac{Cp + x}{p} + tl\frac{Dp + x}{p};$$

J'ai voulu faire connoître la méthode qui m'avoit conduit, à cause de l'usage que l'on pourra en faire pour intégrer les élémens affectés de radicaux; car il eut suffi de donner la Table suivante, dans laquelle N désigne le numérateur du coëfficient de $\dot{x}$ dans l'équation différencielle donnée, & où, à la suite de chaque formule d'équation différencielle, est celle de son intégrale.



TABLE V.

o^d

$$\dot{y} + N\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p}.$$

1^d

$$\dot{y} + \frac{N}{p}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{ap + x}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{ap + x}{p}.$$

2^d

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(ap + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + ql\frac{ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(ap + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(ap + x)} + ql\frac{ap + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{ap^2 + \epsilon px + x^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{ap^2 + \epsilon px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)(\beta p + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

3[d]

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\frac{\alpha p + x}{p} + rl\frac{\beta p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3} \dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3}{p^3};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{\alpha p^2 + \beta p x + x^2}{p^2} + rl\frac{\gamma p + x}{p},$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\frac{\alpha p + x}{p} + rl\frac{\beta p + x}{p} + sl\frac{\gamma p + x}{p};$$

4^d

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4} x = 0 \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p^5};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^4} + ql\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^3(\alpha p + x)} + ql\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \beta px + x^2)}\dot{x} = 0 \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + ql\frac{\alpha p^2 + \beta px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)}\dot{x} = 0 \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^3} + ql\frac{\alpha p + x}{p} + rl\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0 \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p^2(\alpha p + x)^2} + ql\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}\dot{x} = 0 \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p^2(\alpha p + x)} + ql\frac{\alpha p + x}{p} + rl\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)}\dot{x} = 0 \ldots \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + ex^2}{p^2} + ql\frac{\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3}{p^3},$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta p x + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\gamma p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p} + s\,l\,\frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^3} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta p x + x^2}{p^2};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p};$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2(\beta p^2 + \gamma p x + x^2)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p^2 + \gamma p x + x^2}{p^2}.$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p} + s\,l\cdot\frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4} \dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4}{p^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3}{p^3} + r\,l\,\frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta p x + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\gamma p^2 + \delta p x + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta p x + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\gamma p + x}{p} + s\,l\,\frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p} + s\,l\,\frac{\gamma p + x}{p} + t\,l\,\frac{\delta p + x}{p}.$$

5[d]

$$\dot{y} + \frac{N}{p^5}\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^6 + bp^5 +}{p^6}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x +}{p^5} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x +}{p^4(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x +}{p^4} + ql\,\frac{\alpha p^2 + \mathfrak{C}px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)(\mathfrak{C}p + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x +}{p^4} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\mathfrak{C}p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x +}{p^3(\alpha p + x)^2} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\mathfrak{C}p + x)}\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x +}{p^3(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\mathfrak{C}p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)}\,\dot{x} = 0 \ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2 x +}{p^3} + q\,l\,\frac{\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)\,(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 +}{p^3} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta p x + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)\,(\beta p + x)\,(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 +}{p^3} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p} + s\,l\,\frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^4}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 +}{p^2(\alpha p + x)^3} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3 x +}{p^2(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta p x + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3\,(\beta p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3 x +}{p^2(\alpha p + x)^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2\,(\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3 x +}{p^2(\alpha p + x)\,(\beta p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2\,(\alpha p^2 + \gamma p x + x^2)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2 x +}{p^2(\alpha p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\mathcal{C}p^2 + \gamma p x + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2\,(\mathcal{C}p + x)\,(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2 x +}{p^2(\alpha p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\mathcal{C}p + x}{p} + s\,l\,\frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^4 + \mathcal{C}p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p^4 + \mathcal{C}p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4}{p^4}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \mathcal{C}p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)\,(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p^3 + \mathcal{C}p^2 x + \gamma p x^2 + x^3}{p^3} + r\,l\,\frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2)\,(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\gamma p^2 + \delta p x + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2)\,(\gamma p + x)\,(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \mathcal{C}px + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\gamma p + x}{p} + s\,l\,\frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p} + s\,l\,\frac{\gamma p + x}{p} + t\,l\,\frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap^5 + bp^4x + cp^3x^2 + dp^2x^3 + epx^4 + fx^5}{p(\alpha p + x)^4} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4(\beta p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^3} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^4 + bp^3x + cp^2x^2 + dpx^3 + ex^4}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p^2 + \beta px + x^2)} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta px + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\beta p^2 + \gamma px + x^2)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p^2 + \gamma px + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3\,(\beta p + x)\,(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)^2} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\beta p + x}{p} + sl\,\frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p + x)^2\,(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^3 + bp^2x + cpx^2 + dx^3}{p(\alpha p + x)\,(\beta p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\beta p + x}{p} + sl\,\frac{\gamma p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p^3 + \gamma p^2x + \delta px^2 + x^3)}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\beta p^3 + \gamma p^2x + \delta px^2 + x^3}{p^3}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p^2 + \gamma px + x^2)\,(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\beta p^2 + \gamma px + x^2}{p^2} + sl\,\frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p + x)\,(\gamma p + x)\,(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap^2 + bpx + cx^2}{p(\alpha p + x)} + ql\,\frac{\alpha p + x}{p} + rl\,\frac{\beta p + x}{p} + sl\,\frac{\gamma p + x}{p} + tl\,\frac{\delta p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^5 + \beta p^4x + \gamma p^3x^2 + \delta p^2x^3 + \varepsilon px^4 + x^5}\,\dot{x} = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + ql\,\frac{\alpha p^5 + \beta p^4x + \gamma p^3x^2 + \delta p^2x^3 + \varepsilon px^4 + x^5}{p^5}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)(\epsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p^4 +}{p^4} + r\,l\,\frac{\epsilon p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^2 + \epsilon p x + x^2)} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p^3 +}{p^3} + r\,l\,\frac{\delta p^2 + \epsilon p x + x^2}{p^2}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)(\epsilon p + x)} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p^3 +}{p^3} + r\,l\,\frac{\delta p + x}{p} + s\,l\,\frac{\epsilon p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\epsilon p + x)} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{\alpha p + x} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta p x + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\gamma p^2 + \delta p x + x^2}{p^2} + s\,l\,\frac{\epsilon p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p^2 + \beta p x + x^2}{p^2} + r\,l\,\frac{\gamma p + x}{p} + s\,l\,\frac{\delta p + x}{p} + t\,l\,\frac{\epsilon p + x}{p}.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)} \dot{x} = 0 \ldots$$

$$\ldots\ldots n = \frac{y}{p} + \frac{ap + bx}{p} + q\,l\,\frac{\alpha p + x}{p} + r\,l\,\frac{\beta p + x}{p} + s\,l\,\frac{\gamma p + x}{p} + t\,l\,\frac{\delta p + x}{p} + u\,l\,\frac{\epsilon p + x}{p}.$$

6[d]

$$\dot{y} + \frac{N}{p^6}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^5(\alpha p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)(\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^3(\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\beta p^2 + \gamma p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\cdot p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)}\dot{x} = 0.$$

$\dot{y} +$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^5}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^4(\beta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3(\beta p^2 + \gamma p x + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3(\beta p + x)(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2(\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\beta p^2 + \gamma p x + x^2)(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^5 + \beta p^4 x + \gamma p^3 x^2 + \delta p^2 x^3 + \varepsilon p x^4 + x^5)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)(\varepsilon p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^6}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5(\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2(\gamma p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4(\beta p^2 + \gamma p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4(\beta p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^2(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2(\beta p + x)^2(\gamma p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3(\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2\,(\gamma p + x)\,(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3\,(\beta p^2 + \gamma px + x^2)\,(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p + x)^2\,(\gamma p^2 + \beta px + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3\,(\beta p + x)\,(\gamma p + x)\,(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p + x)^2\,(\gamma p + x)\,(\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p^4 + \gamma p^3x + \delta p^2x^2 + \varepsilon px^3 + x^4)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p^3 + \gamma p^2x + \delta px^2 + x^3)\,(\varepsilon p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p^2 + \gamma px + x^2)\,(\delta p^2 + \varepsilon px + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p^2 + \gamma px + x^2)\,(\delta p + x)\,(\varepsilon p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2\,(\beta p + x)\,(\gamma p + x)\,(\delta p + x)\,(\varepsilon p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^6 + \beta p^5x + \gamma p^4x^2 + \delta p^3x^3 + \varepsilon p^2x^4 + \zeta px^5 + x^6}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^5 + \beta p^4x + \gamma p^3x^2 + \delta p^2x^3 + \varepsilon px^4 + x^5)\,(\zeta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \beta p^3x + \gamma p^2x^3 + \delta px^3 + x^4)\,(\varepsilon p^2 + \zeta px + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)\,(\delta p^3 + \varepsilon p^2x + \zeta px^2 + x^3)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2x + \gamma px^2 + x^3)\,(\delta p^2 + \varepsilon px + x^2)\,(\zeta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)\,(\gamma p^2 + \delta px + x^2)\,(\varepsilon p^2 + \zeta px + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \beta p^3x + \gamma p^2x^2 + \delta px^3 + x^4)\,(\varepsilon p + x)\,(\zeta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)(\epsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\epsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

7.^{d}

$$\dot{y} + \frac{N}{p^7}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^6(\alpha p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^5(\alpha p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^5(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^5(\alpha p + x)(\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)^2(\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^4(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^4}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2 (\beta p + x) (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^2 + \beta p x + x^2) (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p^2 + \beta p x + x^2) (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^3(\alpha p + x)^2 (\beta p + x) (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^5} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^3 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^3 (\beta p + x) (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\beta p^2 + \gamma p x + x^2)(\delta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)^2(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^5 + \beta p^4 x + \gamma p^3 x^2 + \delta p^2 x^3 + \epsilon p x^4 + x^5)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)(\epsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^2 + \epsilon p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)(\epsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\epsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p^2(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\epsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^6}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^5(\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^4(\beta p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3(\beta p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2(\gamma p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^4(\beta p^2 + \gamma p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^4 (\beta p + x) (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{y} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^3 (\beta p + x) (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p^4 + \gamma p^3 x + \delta p^2 x^2 + \epsilon p x^3 + x^4)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3) (\epsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2) (\delta p^2 + \epsilon p x + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2) (\delta p + x) (\epsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)^2 (\beta p + x) (\gamma p + x) (\delta p + x) (\epsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^6 + \beta p^5 x + \gamma p^4 x^2 + \delta p^3 x^3 + \epsilon p^2 x^4 + \zeta p + x^5 + x^6} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^5 + \beta p^4 x + \gamma p^3 x^2 + \delta p^2 x^3 + \epsilon p x^4 + x^5) (\zeta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^3 + \varepsilon p^2 x + \zeta p x^2 + x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p^2 + \delta p x + x^2)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{p(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^7}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^6 (\beta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\beta p + x)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^3}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^3 (\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2)^2}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2)}\dot{y} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\beta p + x)(\gamma p + x)}\dot{x} = 0.$$

$\dot{y}$ +

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^3 (\gamma p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)^2 (\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2) (\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x) (\gamma p + x) (\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x) (\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p^4 + \gamma p^3 x + \delta p^2 x^2 + \varepsilon p x^3 + x^4)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 (\gamma p^3 + \delta p^2 x + \varepsilon p x^2 + x^3)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3) (\varepsilon p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p^3 + \delta p^2 x + \varepsilon p x^2 + x^3)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 (\gamma p^2 + \delta p x + x^2) (\varepsilon p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p^2 + \gamma p x + x^2) (\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2 (\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p^2 + \gamma px + x^2)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p^2 + \delta px + x^2)(\varepsilon p + x)}x = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p^5 + \gamma p^4 x + \delta p^3 x^2 + \varepsilon p^2 x^3 + \zeta p x^4 + x^5)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p^4 + \gamma p^3 x + \delta p^2 x^2 + \varepsilon p x^3 + x^4)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)(\varepsilon p^2 + \zeta px + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\;p^2 + \gamma px + x^2)(\delta p^2 + \varepsilon px + x^2)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p^2 + \gamma px + x^2)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^7 + \beta p^6 x + \gamma p^5 x^2 + \delta p^4 x^3 + \varepsilon p^3 x^4 + \zeta p^2 x^5 + \eta p x^6 + x^7}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^6 + \beta p^5 x + \;)(\eta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^5 + \beta p^4 x + \;)(\zeta p^2 + \eta px + x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \;)(\varepsilon p^3 + \;)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^5 + \;)(\zeta p + x)(\eta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 +)\ (\varepsilon p^2 + \zeta px + x)\ (\eta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 +)(\delta p^3 +)(\eta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 +)\ (\delta p^2 + \varepsilon px + x)\ (\zeta p^2 + \eta px + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 +)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)\ (\delta p^2 + \varepsilon px + x^2)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)\ (\gamma p^2 + \delta px + x^2)\ (\varepsilon p^2 + \zeta px + x^2)\ (\eta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)\ (\delta p + x)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)\ (\gamma p^2 + \delta px + x^2)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)\ (\gamma p + x)\ (\delta p + x)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)\ (\beta p + x)\ (\gamma p + x)\ (\delta p + x)\ (\varepsilon p + x)\ (\zeta p + x)\ (\eta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

8 d

Pour avoir toutes les formules de ce degré, l'on récrira premièrement toutes celles du degré précédent, en multipliant par p le dénominateur de chaque formule; après quoi on aura

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^8}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^4}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^7\ (\beta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^6\ (\beta p + x)^2}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\beta p + x)^3} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^4} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^3 (\gamma p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p^2 + \gamma px + x^2)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^6 (\beta p^2 + \gamma px + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^6 (\beta p + x) (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^3 (\gamma p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^3 (\gamma p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \beta p^3 x + \gamma p^2 x^2 + \delta p x^3 + x^4)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma p x^2 + x^3)^2 (\delta p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^3 (\gamma p^2 + \delta px + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2 (\gamma p^2 + \delta px + x^2)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^3 (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p \pm x)^3 (\beta p^2 + \gamma px \pm x^2)^2 (\delta p \pm x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\beta p^2 + \gamma px + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2 (\gamma p^2 + \delta px + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^3 (\gamma p^2 + \delta px + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^5 (\beta p + x) (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^3 (\gamma p + x) (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 (\beta p + x)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x)^2} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p^4 + \gamma p^3 x + \delta p^2 x^2 + \epsilon px^3 + x^4)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma px^2 + x^3)^2 (\delta p^2 + \epsilon px + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \beta p^2 x + \gamma px^2 + x^3)^2 (\delta p + x) (\epsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta px^2 + x^3) (\epsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 (\beta p + x)^2 (\gamma p^3 + \delta p^2 x + \epsilon px^2 + x^3)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p^2 + \epsilon px + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 (\beta p^2 + \gamma px + x^2) (\delta p^2 + \epsilon px + x^2)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)^2 (\gamma p + x)^2 (\delta p + x) (\epsilon p + x)} \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 \, (\beta p^2 + \gamma p x + x^2) \, (\delta p + x) \, (\varepsilon p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 \, (\beta p + x)^2 \, (\gamma p^2 + \delta p x + x^2) \, (\varepsilon p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 \, (\beta p + x)^2 \, (\gamma p + x)^2 \, (\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^4 \, (\beta p + x) \, (\gamma p + x) \, (\delta p + x) \, (\varepsilon p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 \, (\beta p + x)^2 \, (\gamma p + x) \, (\delta p + x) \, (\varepsilon p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 \, (\beta p + x)^2 \, (\gamma p + x)^2 \, (\delta p + x) \, (\varepsilon p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 \, (\beta p^5 + \gamma p^4 x + \delta p^3 x^2 + \varepsilon p^2 x^3 + \zeta p x^4 + x^5)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 \, (\gamma p^4 + \delta p^3 x + \varepsilon p^2 x^2 + \zeta p x^3 + x^4)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 \, (\beta p^4 + \gamma p^3 x + \delta p^2 x^2 + \varepsilon p x^3 + x^4) \, (\zeta p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 \, (\beta p + x)^2 \, (\gamma p^4 + \delta p^3 x + \varepsilon p^2 x^2 + \zeta p x^3 + x^4)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 \, (\gamma p^3 + \delta p^2 x + \varepsilon p x^2 + x^3) \, (\zeta p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x^3) \, (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3) \, (\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 \, (\gamma p^2 + \delta p x + x^2) \, (\varepsilon p^2 + \zeta p x + x^2)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 \, (\beta p^3 + \gamma p^2 x + \delta p x^2 + x^3) \, (\varepsilon p + x) \, (\zeta p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^2 \, (\beta p + x)^2 \, (\gamma p^3 + \delta p^2 x + \varepsilon p x^2 + x^3) \, (\zeta p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta p x + x^2)^2 \, (\gamma p^2 + \delta p x + x^2) \, (\varepsilon p + x) \, (\zeta p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)^3 \, (\beta p^2 + \gamma p x + x^2) \, (\delta p^2 + \varepsilon p x + x^2) \, (\zeta p + x)} \, \dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p+x)^2(\gamma p^2+\delta px+x^2)(\epsilon p^2+\zeta px+x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2+\beta px+x^2)^2(\gamma p+x)(\delta p+x)(\epsilon p+x)(\zeta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^3(\beta p^2+\gamma px+x^2)(\delta p+x)(\epsilon p+x)(\zeta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p+x)^2(\gamma p^2+\delta px+x^2)(\epsilon p+x)(\zeta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^3(\beta p+x)(\gamma p+x)(\delta p+x)(\epsilon p+x)(\zeta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p+x)^2(\gamma p+x)(\delta p+x)(\epsilon p+x)(\zeta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p^6+\gamma p^5x+\delta p^4x^2+\epsilon p^3x^3+\zeta p^2x^4+\eta px^5+x^6)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p^5+\gamma p^4x+\delta p^3x^2+\epsilon p^2x^3+\zeta px^4+x^5)(\eta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p^4+\gamma p^3x+\delta p^2x^2+\epsilon px^3+x^4)(\zeta p^2+\eta px+x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p^3+\gamma p^2x+\delta px^2+x^3)(\epsilon p^3+\zeta p^2x+\eta px^2+x^3)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p^4+\gamma p^3x+\delta p^2x^2+\epsilon px^3+x^4)(\zeta p+x)(\eta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p^3+\gamma p^2x+\delta px^2+x^3)(\epsilon p^2+\zeta px+x^2)(\eta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p^2+\gamma px+x^2)(\delta p^2+\epsilon px+x^2)(\zeta p^2+\eta px+x^2)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p^3+\gamma p^2x+\delta px^2+x^3)(\epsilon p+x)(\zeta p+x)(\eta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p^2+\gamma px+x^2)(\delta p^2+\epsilon px+x^2)(\zeta p+x)(\eta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p^2+\gamma px+x^2)(\delta p+x)(\epsilon p+x)(\zeta p+x)(\eta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p+x)^2(\beta p+x)(\gamma p+x)(\delta p+x)(\epsilon p+x)(\zeta p+x)(\eta p+x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{\alpha p^8+\beta p^7x+\gamma p^6x^2+\delta p^5x^3+\epsilon p^4x^4+\zeta p^3x^5+\eta p^2x^6+\theta px^7+x^8}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^7 + \;)\;(\theta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^6 + \;)\;(\eta p^2 + \theta p x + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^5 + \;)\,(\zeta p^3 + \;)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \;)\;(\epsilon p^4 + \;)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^6 + \;)\;(\eta p + x)\;(\theta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^5 + \;)\,(\zeta p^2 + \eta p x + x^2)\,(\theta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \;)\;(\epsilon p^3 + \;)\;(\theta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \;)\,(\epsilon p^2 + \zeta p x + x^2)\,(\eta p^2 + \theta p x + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \;)\;(\delta p^3 + \;)\;(\eta p^2 + \theta p x + x^2)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^5 + \;)\,(\zeta p + x)\,(\eta p + x)\,(\theta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \;)\,(\epsilon p^2 + \zeta p x + x^2)\,(\eta p + x)\,(\theta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \;)\,(\delta p^3 + \;)\,(\eta p + x)\,(\theta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \;)(\delta p^2 + \epsilon p x + x^2)(\zeta p^2 + \eta p x + x^2)\,(\theta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \;)\,(\gamma p^2 + \;)\,(\epsilon p^2 + \;)\,(\eta p^2 + \;)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^4 + \;)\,(\epsilon p + x)\,(\zeta p + x)\,(\eta p + x)\,(\theta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 + \;)\,(\delta p^2 + \epsilon p x + x^2)\,(\zeta p + x)\,(\eta p + x)\,(\theta p + x)}\,\dot{x} = 0.$$

$\dot{y}$ +

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)(\gamma p^2 + \delta px + x^2)(\varepsilon p^2 + \zeta px + x^2)(\eta p + x)(\theta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^3 +)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)(\eta p + x)(\theta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)(\gamma p^2 + \delta px + x^2)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)(\eta p + x)(\theta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p^2 + \beta px + x^2)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)(\eta p + x)(\theta p + x)}\dot{x} = 0.$$

$$\dot{y} + \frac{N}{(\alpha p + x)(\beta p + x)(\gamma p + x)(\delta p + x)(\varepsilon p + x)(\zeta p + x)(\eta p + x)(\theta p + x)}\dot{x} = 0.$$



APPLICATION DE LA MÉTHODE

AUX

ÉQUATIONS AUX SECONDES DIFFÉRENCES.

FORMULES de toutes les Équations possibles aux secondes différences sans radicaux.

PREMIÈRE SUITE. $\ddot{y} + \dfrac{b_1\dot{x}^2 + b_2\dot{x}\dot{y} + b_3\dot{y}^2}{\mathcal{C}_1 p + \mathcal{C}_2 x + \mathcal{C}_3 y} = 0,$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{lll} + b_1 p\dot{x}^2 & + b_4 p\dot{x}\dot{y} & + b_7 p\dot{y}^2 \\ + b_2 x & + b_5 x & + b_8 x \\ + b_3 y & + b_6 y & + b_9 y \end{array}}{\mathcal{C}_1 p^2 + \mathcal{C}_2 px + \mathcal{C}_3 py + \mathcal{C}_4 x^2 + \mathcal{C}_5 xy + \mathcal{C}_6 y^2} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{lll} + b_1 p^2\dot{x}^2 & + b_7 p^2\dot{x}\dot{y} & + b_{13} p^2\dot{y}^2 \\ + b_2 px & + b_8 px & + b_{14} px \\ + b_3 py & + b_9 py & + b_{15} py \\ + b_4 x^2 & + b_{10} x^2 & + b_{16} x^2 \\ + b_5 xy & + b_{11} xy & + b_{17} xy \\ + b_6 y^2 & + b_{12} y^2 & + b_{18} y^2 \end{array}}{\begin{array}{c} \mathcal{C}_1 p^3 + \mathcal{C}_2 p^2 x + \mathcal{C}_3 p^2 y + \mathcal{C}_4 px^2 + \mathcal{C}_5 pxy + \\ \mathcal{C}_6 py^2 + \mathcal{C}_7 x^3 + \mathcal{C}_8 x^2 y + \mathcal{C}_9 xy^2 + \mathcal{C}_{10} y^3 \end{array}} = 0, \text{ \&c.}$$

SECONDE SUITE. $\ddot{y} + \dfrac{b_1\dot{x}^3 + b_2\dot{x}^2\dot{y} + b_3\dot{x}\dot{y}^2 + b_4\dot{y}^3}{\begin{array}{ll} + \mathcal{C}_1 p\dot{x} & + \mathcal{C}_4 p\dot{} \\ + \mathcal{C}_2 x & + \mathcal{C}_5 x \\ + \mathcal{C}_3 y & + \mathcal{C}_6 y \end{array}} = 0,$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + b_1 p\dot{x}^3 & + b_4 p\dot{x}^2\dot{y} & + b_7 p\dot{x}\dot{y}^2 & + b_{10} p\dot{y}^3 \\ + b_2 x & + b_5 x & + b_8 x & + b_{11} x \\ + b_3 y & + b_6 y & + b_9 y & + b_{12} y \end{array}}{\begin{array}{ll} + \mathcal{C}_1 p^2\dot{x} & + \mathcal{C}_7 p^2\dot{y} \\ + \mathcal{C}_2 px & + \mathcal{C}_8 px \\ + \mathcal{C}_3 py & + \mathcal{C}_9 py \\ + \mathcal{C}_4 x^2 & + \mathcal{C}_{10} x^2 \\ + \mathcal{C}_5 xy & + \mathcal{C}_{11} xy \\ + \mathcal{C}_6 y^2 & + \mathcal{C}_{12} y^2 \end{array}} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + b1p^2\dot{x}^3 & + b7p^2\dot{x}^2\dot{y} & + b13p^2\dot{x}\dot{y}^2 & + b19p^2\dot{y}^3 \\ + b2px & + b8px & + b14px & + b20px \\ + b3py & + b9py & + b15py & + b21py \\ + b4x^2 & + b10x^2 & + b16x^2 & + b22x^2 \\ + b5xy & + b11xy & + b17xy & + b23xy \\ + b6y^2 & + b12y^2 & + b18y^2 & + b24y^2 \end{array}}{\begin{array}{ll} + \beta1p^3\dot{x} & + \beta11p^3\dot{y} \\ + \beta2p^2x & + \beta12p^2x \\ + \beta3p^2y & + \beta13p^2y \\ + \beta4px^2 & + \beta14px^2 \\ + \beta5pxy & + \beta15pxy \\ + \beta6py^2 & + \beta16py^2 \\ + \beta7x^3 & + \beta17x^3 \\ + \beta8x^2y & + \beta18x^2y \\ + \beta9xy^2 & + \beta19xy^2 \\ + \beta10y^3 & + \beta20y^3 \end{array}} = 0, \text{\&c.}$$

III.e SUITE. $$\ddot{y} + \frac{b1\dot{x}^4 + b2\dot{x}^3\dot{y} + b3\dot{x}^2\dot{y}^2 + b4\dot{x}\dot{y}^3 + b5\dot{y}^4}{\begin{array}{lll} + \beta1p\dot{x}^2 & + \beta4p\dot{x}\dot{y} & + \beta7p\dot{y}^2 \\ + \beta2x & + \beta5x & + \beta8x \\ + \beta3y & + \beta6y & + \beta9y \end{array}} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{lllll} + b1p\dot{x}^4 & + b4p\dot{x}^3\dot{y} & + b7p\dot{x}^2\dot{y}^2 & + b10p\dot{x}\dot{y}^3 & + b14p\dot{y}^4 \\ + b2x & + b5x & + b8x & + b12x & + b15x \\ + b3y & + b6y & + b9y & + b13y & + b16y \end{array}}{\begin{array}{lll} + \beta1p^2\dot{x}^2 & + \beta7p^2\dot{x}\dot{y} & + \beta13p^2\dot{y}^2 \\ + \beta2px & + \beta8px & + \beta14px \\ + \beta3py & + \beta9py & + \beta15py \\ + \beta4x^2 & + \beta10x^2 & + \beta16x^2 \\ + \beta5xy & + \beta11xy & + \beta17xy \\ + \beta6y^2 & + \beta12y^2 & + \beta18y^2 \end{array}} = 0, \text{\&c.}$$

IV.e SUITE. $$\ddot{y} + \frac{b1\dot{x}^5 + b2\dot{x}^4\dot{y} + b3\dot{x}^3\dot{y}^2 + b4\dot{x}^2\dot{y}^3 + b5\dot{x}\dot{y}^4 + b6\dot{y}^5}{\begin{array}{llll} + \beta1p\dot{x}^3 & + \beta4p\dot{x}^2\dot{y} & + \beta7p\dot{x}\dot{y}^2 & + \beta10p\dot{y}^3 \\ + \beta2x & + \beta5x & + \beta8x & + \beta11x \\ + \beta3y & + \beta6y & + \beta9y & + \beta12y \end{array}} = 0, \text{\&c.}$$

FORMULES de toutes les Intégrales possibles d'équations aux secondes différences sans radicaux.

PREMIÈRE SUITE. $$n = \frac{\begin{array}{ll} + a1p\dot{x} & + a4p\dot{y} \\ + a2x & + a5x \\ + a3y & + a6y \end{array}}{\begin{array}{ll} + \alpha1p\dot{x} & + \alpha4p\dot{y} \\ + \alpha2x & + \alpha5x \\ + \alpha3y & + \alpha6y \end{array}},$$

$$n = \frac{\begin{matrix} + a1p^2\dot{x} & + a7p^2\dot{y} \\ + a2px & + a8px \\ + a3py & + a9py \\ + a4x^2 & + a10x^2 \\ + a5xy & + a11xy \\ + a6y^2 & + a12y^2 \end{matrix}}{\begin{matrix} + \alpha1p^2\dot{x} & + \alpha7p^2\dot{y} \\ + \alpha2px & + \alpha8px \\ + \alpha3py & + \alpha9py \\ + \alpha4x^2 & + \alpha10x^2 \\ + \alpha5xy & + \alpha11xy \\ + \alpha6y^2 & + \alpha12y^2 \end{matrix}},\ n = \frac{\begin{matrix} + a1p^3\dot{x} & + a11p^3\dot{y} \\ + a2p^2x & + a12p^2x \\ + a3p^2y & + a13p^2y \\ + a4px^2 & + a14px^2 \\ + a5pxy & + a15pxy \\ + a6py^2 & + a16py^2 \\ + a7x^3 & + a17x^3 \\ + a8x^2y & + a18x^2y \\ + a9xy^2 & + a19xy^2 \\ + a10y^3 & + a20y^3 \end{matrix}}{\begin{matrix} + \alpha1p^3\dot{x} & + \alpha11p^3\dot{y} \\ + \alpha2p^2x & + \alpha12p^2x \\ + \alpha3p^2y & + \alpha13p^2y \\ + \alpha4px^2 & + \alpha14px^2 \\ + \alpha5pxy & + \alpha15pxy \\ + \alpha6py^2 & + \alpha16py^2 \\ + \alpha7x^3 & + \alpha17x^3 \\ + \alpha8x^2y & + \alpha18x^2y \\ + \alpha9xy^2 & + \alpha19xy^2 \\ + \alpha10y^3 & + \alpha20y^3 \end{matrix}},\ \&c.$$

IIe SUITE. $$n = \frac{\begin{matrix} + a1p\dot{x}^2 & + a4p\dot{x}\dot{y} & + a7p\dot{y}^2 \\ + a2x & + a5x & + a8x \\ + a3y & + a6y & + a9y \end{matrix}}{\begin{matrix} + \alpha1p\dot{x}^2 & + \alpha4p\dot{x}\dot{y} & + \alpha7p\dot{y}^2 \\ + \alpha2x & + \alpha5x & + \alpha8x \\ + \alpha3y & + \alpha6y & + \alpha9y \end{matrix}};$$

$$n = \frac{\begin{matrix} + a1p^2\dot{x}^2 & + a7p^2\dot{x}\dot{y} & + a13p^2\dot{y}^2 \\ + a2px & + a8px & + a14px \\ + a3py & + a9py & + a15py \\ + a4x^2 & + a10x^2 & + a16x^2 \\ + a5xy & + a11xy & + a17xy \\ + a6y^2 & + a12y^2 & + a18y^2 \end{matrix}}{\begin{matrix} + \alpha1p^2\dot{x}^2 & + \alpha7p^2\dot{x}\dot{y} & + \alpha13p^2\dot{y}^2 \\ + \alpha2px & + \alpha8px & + \alpha14px \\ + \alpha3py & + \alpha9py & + \alpha15py \\ + \alpha4x^2 & + \alpha10x^2 & + \alpha16x^2 \\ + \alpha5xy & + \alpha11xy & + \alpha17xy \\ + \alpha6y^2 & + \alpha12y^2 & + \alpha18y^2 \end{matrix}},\ \&c.$$

IIIe SUITE. $$n = \frac{\begin{matrix} + a1p\dot{x}^3 & + a4p\dot{x}^2\dot{y} & + a7p\dot{x}\dot{y}^2 & + a10p\dot{y}^3 \\ + a2x & + a5x & + a8x & + a11x \\ + a3y & + a6y & + a9y & + a12y \end{matrix}}{\begin{matrix} + \alpha1p\dot{x}^3 & + \alpha4p\dot{x}^2\dot{y} & + \alpha7p\dot{x}\dot{y}^2 & + \alpha10p\dot{y}^3 \\ + \alpha2x & + \alpha5x & + \alpha8x & + \alpha11x \\ + \alpha3y & + \alpha6y & + \alpha9y & + \alpha12y \end{matrix}}.$$

I.

Soit $n = \dfrac{\begin{array}{l} + a1p\dot{x} + a4p\dot{y} \\ + a2x \;\; + a5x \\ + a3y \;\; + a6y \end{array}}{\begin{array}{l} + \alpha 1p\dot{x} + \alpha 4p\dot{y} \\ + \alpha 2x \;\; + \alpha 5x \\ + \alpha 3y \;\; + \alpha 6y \end{array}}$ en différenciant, on aura l'équation

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{l} + a^{1}1p\dot{x}^{3} + (-a^{2}2 + a^{2}1 + a^{4}1)p\dot{x}^{2}\dot{y} \\ - a^{1}2y \quad\;\; + a^{1}2x \\ \qquad\qquad\quad\; + (-a^{4}2 + a^{2}3)y \\ + (-a^{1}3 + a^{1}4 + a^{5}1)p\dot{x}\dot{y}^{2} \;\; + a^{2}4p\dot{y}^{3} \\ + (-a^{2}3 + a^{4}2)x \qquad\qquad\;\; + a^{1}5x \\ - a^{1}5y \end{array}}{\begin{array}{l} + a^{1}1p^{2}\dot{x} \\ + (a^{2}2 + a^{4}1)px \\ + (a^{1}3 + a^{5}1)py \\ + a^{1}2x^{2} \\ + (a^{2}3 + a^{4}2)xy \\ + a^{3}3y^{2} \end{array}} = 0,$$

qui, en supposant les quinze premières conditions du Lemme, sera la formule de toutes les équations dont l'intégrale est $n =$, &c.

Il n'y a que les deux premières équations de la première Suite, & les deux premières de la seconde, qui puissent appartenir à la première formule, & dont par conséquent l'intégrale puisse être celle de cette formule.

Soit $n = \dfrac{\begin{array}{l} + a1p^{2}\dot{x} + a7p^{2}\dot{y} \\ + a2px \;\; + a8px \\ + a3py \;\; + a9py \\ + a4x^{2} \;\; + a10x^{2} \\ + a5xy \;\; + a11xy \\ + a6y^{2} \;\; + a12y^{2} \end{array}}{\begin{array}{l} + \alpha 1p^{2}\dot{x} + \alpha 7p^{2}\dot{y} \\ + \alpha 2px \;\; + \alpha 8px \\ + \alpha 3py \;\; + \alpha 9py \\ + \alpha 4x^{2} \;\; + \alpha 10x^{2} \\ + \alpha 5xy \;\; + \alpha 11xy \\ + \alpha 6y^{2} \;\; + \alpha 12y^{2} \end{array}}$ en différenciant, on aura l'équa-

$+ a^{1}1\, p^{3} \dot{x}^{3}$
$+ 2a^{3}1\, p^{2} x$
$+ (-a^{1}2 + a^{4}1)\, p^{2} y$
$+ a^{2}2\, p x^{2}$
$+ 2a^{1}3\, p x y$
$+ (-a^{4}2 + a^{2}3)\, p y^{2}$
$- a^{1}4\, x^{2} y$
$- 2a^{2}4\, x y^{2}$
$- a^{1}5\, y^{3}$

$+ (-a^{5}2 + a^{2}1 + a^{7}1)\, p^{3} \dot{x}^{2} \dot{y}$
$+ (-2a^{1}4 + a^{1}2 + a^{4}1 + 2a^{9}1)\, p^{2} x$
$+ (-a^{7}2 - a^{2}5 + a^{5}3 + 2a^{5}1 + a^{10}1)\, p^{2} y$
$+ (a^{8}2 - a^{4}4 - a^{1}3 + a^{3}2)\, p x^{2}$
$+ (-2a^{5}4 + 2a^{7}3 + 2a^{4}2)\, p x y$
$+ (-a^{10}2 - a^{4}5 + a^{3}3 + a^{2}6 + a^{8}3)\, p y^{2}$
$+ a^{1}4\, x^{3}$
$+ (-a^{7}4 + a^{5}5 + 2a^{2}4)\, x^{2} y$
$+ (-2a^{8}4 + a^{1}5 + 2a^{4}6)\, x y^{2}$
$+ (-a^{7}5 + a^{5}6)\, y^{3}$

on $\ddot{y}$ + (the above, divided by:)

$+ (-a^{4}3 + a^{1}7 + a^{8}1)\, p^{3} \dot{x} \dot{y}^{2}$
$+ (-a^{5}3 - a^{2}5 + 2a^{3}7 + a^{7}2 + a^{10}1)\, p^{2} x$
$+ (-a^{1}8 - 2a^{1}6 + a^{4}7 + 2a^{11}1)\, p^{2} y$
$+ (-a^{7}3 + a^{2}8 - a^{3}5 + a^{5}4 + a^{9}2)\, p x^{2}$
$+ (2a^{1}9 - 2a^{2}6 + 2a^{10}2)\, p x y$
$+ (a^{9}3 - a^{4}8 - a^{3}6)\, p y^{2}$
$+ (-a^{5}5 + a^{7}4)\, x^{3}$
$+ (-a^{1}10 - 2a^{4}6 + 2a^{8}4)\, x^{2} y$
$+ (a^{7}5 - 2a^{2}10 - a^{5}6)\, x y^{2}$
$- a^{1}11\, y^{3}$

$+ a^{2}7\, p^{3} \dot{y}^{3}$
$+ (a^{1}8 + a^{4}7)\, p^{2} x$
$+ 2a^{5}7\, p^{2} y$
$+ (-a^{1}9 + a^{3}8)\, p x^{2}$
$+ 2a^{4}8\, p x y$
$+ a^{3}9\, p y^{2}$
$+ a^{1}10\, x^{3}$
$+ 2a^{2}10\, x^{2} y$
$+ a^{1}11\, x y^{2}$

$=$

$+ a^{6}1\, p^{4} \dot{x}$
$+ (a^{5}2 + a^{7}1)\, p^{3} x$
$+ (a^{4}3 + a^{8}1)\, p^{3} y$
$+ (a^{3}4 + a^{6}2 + a^{9}1)\, p^{2} x^{2}$
$+ (a^{2}5 + a^{5}3 + a^{7}2 + a^{10}1)\, p^{2} x y$
$+ (a^{1}6 + a^{6}3 + a^{4}1)\, p^{2} y^{2}$
$+ (a^{4}4 + a^{8}2)\, p x^{3}$
$+ (a^{3}5 + a^{5}4 + a^{7}3 + a^{9}2)\, p x^{2} y$
$+ (a^{2}6 + a^{4}5 + a^{8}3 + a^{10}2)\, p x y^{2}$
$+ (a^{3}6 + a^{4}3)\, p y^{3}$
$+ a^{4}6\, x^{4}$
$+ (a^{5}5 + a^{7}4)\, x^{3} y$
$+ (a^{4}6 + a^{6}5 + a^{4}8)\, x^{2} y^{2}$
$+ (a^{5}6 + a^{7}5)\, x y^{3}$
$+ a^{6}6\, y^{4}$

qui, en ſuppoſant les quatre cents quatre-vingt-qu ditions du Lemme, ſera la formule de toutes les dont l'intégrale eſt $n =$, &c.

Il n'y a qne les quatre premières équations de Suite, & les quatre premières de la ſeconde, appartenir à la ſeconde formule, & dont pa l'intégrale puiſſe être celle de cette formule.

Soit $n = \dfrac{\begin{array}{lll} +a1p\dot{x}^2 & +a4p\dot{x}\dot{y} & +a7p\dot{y}^2 \\ +a2x & +a5x & +a8x \\ +a3y & +a6y & +a9y \end{array}}{\begin{array}{lll} +\alpha 1p\dot{x}^2 & +\alpha 4p\dot{x}\dot{y} & +\alpha 7p\dot{y}^2 \\ +\alpha 2x & +\alpha 5x & +\alpha 8x \\ +\alpha 3y & +\alpha 6y & +\alpha 9y \end{array}}$ en différenciant, on aura l'équation

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{l} +a^{1}1p\dot{x}^5 + (-a^{2}2 + a^{4}1 + a^{2}1)p\dot{x}^4\dot{y} \\ -a^{1}2y \quad + a^{1}2x \\ \qquad\qquad + (-a^{4}2 + a^{2}3)y \\ \hline +(-a^{5}2 + a^{1}4 - a^{1}3 + a^{7}1 + a^{5}1)p\dot{x}^3\dot{y}^2 \\ +(-a^{2}3 + a^{4}2)x \\ +(-a^{7}2 - a^{1}5 + a^{5}3)y \\ \hline +(-a^{2}5 - a^{4}3 + a^{4}4 + a^{2}4 + a^{8}1)p\dot{x}^2\dot{y}^3 \\ +(-a^{5}3 + a^{1}5 + a^{7}2)x \\ +(-a^{4}5 + a^{2}6)y \\ \hline +(a^{1}7 - a^{1}6 + a^{5}4)p\dot{x}\dot{y}^4 + a^{2}7p\dot{y}^5 \\ +(-a^{2}6 + a^{4}5)x \qquad\qquad + a^{1}8x \\ -a^{1}8y \end{array}}{\begin{array}{lll} +a^{3}1p^2\dot{x}^3 & +2a^{6}1p^2\dot{x}^2\dot{y} & +a^{3}4p^2\dot{x}\dot{y}^2 \\ +(a^{2}2 + a^{4}1)px & +(2a^{5}2 + 2a^{7}1)px & +(a^{4}4 + a^{2}5)px \\ +(a^{2}3 + a^{5}1)py & +(2a^{4}3 + 2a^{8}1)py & +(a^{5}4 + a^{1}6)py \\ +a^{3}2x^2 & +2a^{6}2x^2 & +a^{3}5x^2 \\ +(a^{2}3 + a^{4}2)xy & +(2a^{5}3 + 2a^{7}2)xy & +(a^{4}5 + a^{2}6)xy \\ +a^{3}3y^2 & +2a^{6}3y^2 & +a^{3}6y^2 \end{array}} = 0;$$

qui, en ſuppoſant les cent vingt-ſix conditions du Lemme, ſera la formule de toutes les équations dont l'intégrale eſt $n =$, &c.

Il n'y a que les deux premières équations de la première Suite, les deux premières de la ſeconde, les deux premières de la troiſième, & les deux premières de la quatrième, qui puiſſent appartenir à cette ſeconde-première formule, & dont par conſéquent l'intégrale puiſſe être celle de cette formule.

II.

Pour pouvoir rapporter l'équation

$\ddot{y} + \dfrac{b1\dot{x}^2 + b2\dot{x}\dot{y} + b3\dot{y}^2}{c1p + c2x + c3y} = 0$ à la première formule,

il faut la multiplier par $\begin{array}{ll} + c1\,p\dot{x} & + c4\,p\dot{y} \\ + c2\,x & + c5\,x \\ + c3\,y & + c6\,y \end{array}$, on aura

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + c1b1p\dot{x}^3 & + (c1b2 + c4b1)p\dot{x}^2\dot{y} & + (c1b3 + c4b2)p\dot{x}\dot{y}^2 & + c4b3p\dot{y}^3 \\ + c2b1x & + (c2b2 + c5b1)x & + (c2b3 + c5b2)x & + c5b3x \\ + c3b1y & + (c3b2 + c6b1)y & + (c3b3 + c6b2)y & + c6b3y \end{array}}{\begin{array}{ll} + c1\beta1p^2\dot{x} & + c4\beta1p^2\dot{y} \\ + (c1\beta2 + c2\beta1)px & + (c4\beta2 + c5\beta1)px \\ + (c1\beta3 + c3\beta1)py & + (c4\beta3 + c6\beta1)py \\ + c2\beta2x^2 & + c5\beta2x^2 \\ + (c2\beta3 + c3\beta2)xy & + (c5\beta3 + c6\beta2)xy \\ + c3\beta3y^2 & + c6\beta3y^2 \end{array}} = 0;$$

& en comparant avec la formule, on aura

$$a'1 = c1\,b1, \quad -a'2 = c3\,b1,$$
$$a'2 = c2\,b2 + c5\,b1$$

$$-a^2 2 + a^2 1 + a^4 1 = c1\,b2 + c4\,b1,$$
$$a^2 2 + a^4 1 = c1\,\beta2 + c2\,\beta1$$

$$-a^4 2 + a^2 3 = c3\,b2 + c6\,b1,$$
$$-a^2 3 + a^4 2 = c2\,b3 + c5\,b2$$
$$a^2 3 + a^4 2 = c2\,\beta3 + c3\,\beta2$$

$$-a'3 + a'4 + a^5 1 = c1\,b3 + c4\,b2,$$
$$a'3 + a^5 1 = c1\,\beta3 + c3\,\beta1$$

$$-a'5 = c3\,b3 + c6\,b2, \quad a^2 4 = c4\,b3$$
$$a'5 = c5\,b3$$

$a^3 1 = c1\,\beta1$, $a^3 2 = c2\,\beta2$, $a^3 3 = c3\,\beta3$, & $c2\,b1 = 0$, $c6\,b3 = 0$, $c4\beta1 = 0$, $c4\beta2 + c5\beta1 = 0$, $c4\beta3 + c6\beta1 = 0$, $c5\beta2 = 0$, $c5\beta3 + c6\beta2 = 0$, $c6\beta3 = 0$, $c3\,b1 + c2\,b2 + c5\,b1 = 0$, $c3\,b2 + c6\,b1 + c2\,b3 + c5\,b2 = 0$, $c3\,b3 + c6\,b2 + c5\,b3 = 0$.

Que

Que $c2$ ne soit pas $= 0$, on aura $b1 = 0$, $b2 = 0$, $b3 = 0$, par conséquent $c2$ est nécessairement $= 0$; on trouvera que $c6$, $c4$, $c5$, $c3$, sont aussi nécessairement $= 0$.

Soit $c1 = 1$, on aura $a^{1}1 = b1$, $a^{3}1 = \beta 1$,

$$\begin{array}{lll} a^{1}2 = 0 & a^{3}2 = 0 & a^{4}2 = 0 \\ a^{2}3 = 0 & a^{3}3 = 0 & \\ a^{2}4 = 0 & & \\ a^{1}5 = 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} - a^{2}2 + a^{2}1 + a^{4}1 = b2; \\ \quad a^{2}2 + a^{4}1 = \beta 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} - a^{1}3 + a^{1}4 + a^{5}1 = b3; \\ \quad a^{1}3 + a^{5}1 = \beta 3 \end{array}$$

& en substituant dans les conditions de la formule, on aura $- a^{2}1\, a^{2}2 + b1\, a^{1}3 = 0$, $a^{4}1\, a^{2}2 + b1\, a^{1}4 = 0$, $a^{4}1\, a^{1}3 + a^{2}1\, a^{1}4 = 0$, $a^{5}1\, a^{2}2 = 0$, $a^{5}1\, a^{1}3 = 0$, $a^{5}1\, a^{1}4 = 0$.

PREMIER CAS. Soit $a^{5}1 = 0$, on aura $a^{1}3 = \beta 3$; $a^{1}4 = b3 + \beta 3$, $- a^{2}1\, a^{2}2 + b1\, \beta 3 = 0$, $a^{4}1\, a^{2}2 + b1\, (b3 + \beta 3) = 0$, $\beta 3\, a^{4}1 + (b3 + \beta 3)\, a^{2}1 = 0$, $a^{2}2 + a^{4}1 = \beta 2$; $2a^{4}1 + a^{2}1 = b2 + \beta 2$; donc

$a^{4}1 = \frac{(b2 + \beta 2)(b3 + \beta 3)}{2b3 + \beta 3}$, $a^{2}1 = \frac{-\beta 3\,(b2 + \beta 2)}{2b3 + \beta 3}$; $a^{2}2 = \frac{b3\,\beta 2 - b2\,(b3 + \beta 3)}{2b3 + \beta 3}$, & $b1\,(2b3 + \beta 3)^{2} = (b2 + \beta 2)\,[b3 \cdot (b2 - \beta 2) + b2\,\beta 3]$.

SECOND CAS. Soit $a^{2}2 = 0$, $a^{1}3 = 0$, $a^{1}4 = 0$; on aura $a^{5}1 = b3$, $a^{4}1 = \beta 2$, $a^{2}1 = b2 - \beta 2$, & $\beta 3 = b3$.

$$\dddot{y} + \frac{b_1\dot{x}^6 + b_2\dot{x}^5\dot{y} + b_3\dot{x}^4\dot{y}^2 + b_4\dot{x}^3\dot{y}^3 + b_5\dot{x}^2\dot{y}^4 + b_6\dot{x}\dot{y}^5 + b_7\dot{y}^6 + (b_8p+)\dot{x}^4\ddot{y} + (b_{11}p+)\dot{x}^3\dot{y}\ddot{y} + (b_{14}p+)\dot{x}^2\dot{y}^2\ddot{y} + (b_{17}p+)\dot{x}\dot{y}^3\ddot{y} + (b_{20}p+)\dot{y}^4\ddot{y} + (b_{23}p^2+)\dot{x}^2\ddot{y}^2 + (b_{29}p^2+)\dot{x}\dot{y}\ddot{y}^2 + (b_{35}p^2+)\dot{y}^2\ddot{y}^2 + (b_{41}p^3+)\ddot{y}^3}{(\beta_1p^2+)\dot{x}^3 + (\beta_7p^2+)\dot{x}^2\dot{y} + (\beta_{13}p^2+)\dot{x}\dot{y}^2 + (\beta_{19}p^2+)\dot{y}^3 + (\beta_{25}p^3+)\dot{x}\ddot{y} + (\beta_{35}p^3+)\dot{y}\ddot{y}} = 0, \text{ &c.}$$

Formules de toutes les Intégrales possibles d'équations aux troisièmes différences sans radicaux.

I.re SUITE. $$n = \frac{a_1\dot{x}^2 + a_2\dot{x}\dot{y} + a_3\dot{y}^2 + (a_4p + a_5x + a_6y)\ddot{y}}{\alpha_1\dot{x}^2 + \alpha_2\dot{x}\ddot{y} + \alpha_3\dot{y}^2 + (\alpha_4p + \alpha_5x + \alpha_6y)\ddot{y}};$$

$$n = \frac{(a_1p+)\dot{x}^2 + (a_4p+)\dot{x}\dot{y} + (a_7p+)\dot{y}^2 + (a_{10}p^2+)\ddot{y}}{(\alpha_1p+)\dot{x}^2 + (\alpha_4p+)\dot{x}\dot{y} + (\alpha_7p+)\dot{y}^2 + (\alpha_{10}p^2+)\ddot{y}};$$

$$n = \frac{(a_1p^2+)\dot{x}^2 + (a_7p^2+)\dot{x}\dot{y} + (a_{13}p^2+)\dot{y}^2 + (a_{19}p^3+)\ddot{y}}{(\alpha_1p^2+)\dot{x}^2 + (\alpha_7p^2+)\dot{x}\dot{y} + (\alpha_{13}p^2+)\dot{y}^2 + (\alpha_{19}p^3+)\ddot{y}}, \text{ &c.}$$

II.e SUITE. $$n = \frac{a_1\dot{x}^3 + a_2\dot{x}^2\dot{y} + a_3\dot{x}\dot{y}^2 + a_4\dot{y}^3 + (a_5p+)\dot{x}\ddot{y} + (a_8p+)\dot{y}\ddot{y}}{\alpha_1\dot{x}^3 + \alpha_2\dot{x}^2\dot{y} + \alpha_3\dot{x}\dot{y}^2 + \alpha_4\dot{y}^3 + (\alpha_5p+)\dot{x}\ddot{y} + (\alpha_8p+)\dot{y}\ddot{y}};$$

$$n = \frac{(a_1p+)\dot{x}^3 + (a_4p+)\dot{x}^2\dot{y} + (a_7p+)\dot{x}\dot{y}^2 + (a_{10}p+)\dot{y}^3 + (a_{13}p^2+)\dot{x}\ddot{y} + (a_{19}p^2+)\dot{y}\ddot{y}}{(\alpha_1p+)\dot{x}^3 + \text{&c.}}, \text{ &c.}$$

III.e SUITE. $$n = \frac{a_1\dot{x}^4 + a_2\dot{x}^3\dot{y} + a_3\dot{x}^2\dot{y}^2 + a_4\dot{x}\dot{y}^3 + a_5\dot{y}^4 + (a_6p+)\dot{x}^2\ddot{y} + (a_9p+)\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + (a_{12}p+)\dot{y}^2\ddot{y} + (a_{15}p^2+)\ddot{y}^2}{\alpha_1\dot{x}^4 + \text{&c.}}, \text{ &c.}$$

on aura $a_3 \alpha_4 - \alpha_3 a_4 = \frac{-a_3}{a_2} = 7$;

$$\alpha_4 a_5 - a_4 \alpha_5 = \frac{-a_5}{a_2} = -4;$$

$$\alpha_4 a_6 - a_4 \alpha_6 = \frac{-a_6}{a_2} = 0.$$

$\alpha_3 = \frac{-7 + a_3 \alpha_4}{a_4}$; en ſubſtituant cette valeur de α_3, on aura $\alpha_4 a_5 - a_4 \alpha_5 = \frac{7 a_5}{a_3} = -4$,

$$\alpha_4 a_6 - a_4 \alpha_6 = \frac{7 a_6}{a_3} = 0.$$

$\alpha_4 = \frac{-4 + a_4 \alpha_5}{a_5}$; en ſubſtituant cette valeur de α_4, on aura $\alpha_5 a_6 - a_5 \alpha_6 = \frac{4 a_6}{a_4} = 0$.

Donc $7a_2 + a_3 = 0$, $2a_2 - a_4 = a_1$, $4a_2 - a_5 = 0$, $a_6 = 0$, $4a_3 + 7a_5 = 0$. Soit $a_3 = 7$, on aura $a_2 = -1$, $a_5 = -4$. Soit $a_1 = 0$, on aura $a_4 = -2$; en ſubſtituant pour a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, leurs valeurs, on aura $\alpha_1 = -1$, $7\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $-2\alpha_2 + \alpha_4 = 1$, $-4\alpha_2 + \alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 0$, $-2\alpha_3 - 7\alpha_4 = -7$, $-4\alpha_3 - 7\alpha_5 = 0$, $-4\alpha_4 + 2\alpha_5 = -4$. Soit $\alpha_2 = 0$, on aura $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 0$, & l'intégrale ſera $n = \frac{-x\dot{x} + 7y\dot{x} - 2p\dot{y} - 4x\dot{y}}{-p\dot{x} + p\dot{y}}$.

Soit l'équation $\ddot{y} + \frac{\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} - 3\dot{y}^2}{p - 5x - 3y} = 0$, donc $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = -3$, $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = -5$, $\beta_3 = -3$.

Comme les coëfficiens de cette équation ſatisfont aux deux

Soit, par exemple, dans le premier Cas, $b2 = -4$; $b3 = 3$, $\beta 2 = 5$, $\beta 3 = -7$, on aura $b1 = 1$. Soit $\beta 1 = 2$, l'équation à intégrer sera

$\dddot{y} + \frac{\dot{x}^2 - 4\dot{x}\dot{y} + 3\dot{y}^2}{2p + 5x - 7y} = 0$, & on aura

$a^1 1 = 1$, $a^2 1 = -7$, $a^3 1 = 2$, $a^4 1 = 4$, $a^5 1 = 0$;
$a^1 2 = 0$ $a^2 2 = 1$ $a^3 2 = 0$ $a^4 2 = 0$
$a^1 3 = -7$ $a^2 3 = 0$ $a^3 3 = 0$
$a^1 4 = -4$ $a^2 4 = 0$
$a^1 5 = 0$

ou $\alpha 1\, a2 - a1\, \alpha 2 = 1$; $\alpha 1\, a3 - a1\, \alpha 3 = -7$;
$\alpha 2\, a3 - a2\, \alpha 3 = 0$ $\alpha 2\, a4 - a2\, \alpha 4 = 1$
$\alpha 3\, a4 - a3\, \alpha 4 = -7$ $\alpha 3\, a5 - a3\, \alpha 5 = 0$
$\alpha 4\, a5 - a4\, \alpha 5 = -4$ $\alpha 4\, a6 - a4\, \alpha 6 = 0$
$\alpha 5\, a6 - a5\, \alpha 6 = 0$

$\alpha 1\, a4 - a1\, \alpha 4 = 2$, $\alpha 1\, a5 - a1\, \alpha 5 = 4$;
$\alpha 2\, a5 - a2\, \alpha 5 = 0$ $\alpha 2\, a6 - a2\, \alpha 6 = 0$
$\alpha 3\, a6 - a3\, \alpha 6 = 0$

$\alpha 1\, a6 - a1\, \alpha 6 = 0$.

Donc $\alpha 1 = \frac{1 + a1\, \alpha 2}{a2}$; en substituant cette valeur de $\alpha 1$, on aura $\alpha 2\, a3 - a2\, \alpha 3 = \frac{-7a2 - a3}{a1} = 0$,

$$\alpha 2\, a4 - a2\, \alpha 4 = \frac{2a2 - a4}{a1} = 1;$$
$$\alpha 2\, a5 - a2\, \alpha 5 = \frac{4a2 - a5}{a1} = 0;$$
$$\alpha 2\, a6 - a2\, \alpha 6 = \frac{-a6}{a1} = 0.$$

$\alpha 2 = \frac{1 + a2\, \alpha 4}{a4}$; en substituant cette valeur de $\alpha 2$;

on aura $a_3\alpha_4 - \alpha_3 a_4 = \frac{-a_3}{a_2} = 7$;

$$\alpha_4 a_5 - a_4\alpha_5 = \frac{-a_5}{a_2} = -4;$$

$$\alpha_4 a_6 - a_4\alpha_6 = \frac{-a_6}{a_2} = 0.$$

$\alpha_3 = \frac{-7 + a_3\alpha_4}{a_4}$; en ſubſtituant cette valeur de α_3, on aura $\alpha_4 a_5 - a_4\alpha_5 = \frac{7a_5}{a_3} = -4$,

$$\alpha_4 a_6 - a_4\alpha_6 = \frac{7a_6}{a_3} = 0.$$

$\alpha_4 = \frac{-4 + a_4\alpha_5}{a_5}$; en ſubſtituant cette valeur de α_4, on aura $\alpha_5 a_6 - a_5\alpha_6 = \frac{4a_6}{a_4} = 0$.

Donc $7a_2 + a_3 = 0$, $2a_2 - a_4 = a_1$, $4a_2 - a_5 = 0$, $a_6 = 0$, $4a_3 + 7a_5 = 0$. Soit $a_3 = 7$, on aura $a_2 = -1$, $a_5 = -4$. Soit $a_1 = 0$, on aura $a_4 = -2$; en ſubſtituant pour a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, leurs valeurs, on aura $\alpha_1 = -1$, $7\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $-2\alpha_2 + \alpha_4 = 1$, $-4\alpha_2 + \alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 0$, $-2\alpha_3 - 7\alpha_4 = -7$, $-4\alpha_3 - 7\alpha_5 = 0$, $-4\alpha_4 + 2\alpha_5 = -4$. Soit $\alpha_2 = 0$, on aura $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 0$, & l'intégrale ſera $n = \frac{-x\dot{x} + 7y\dot{x} - 2p\dot{y} - 4x\dot{y}}{-p\dot{x} + p\dot{y}}$.

Soit l'équation $\ddot{y} + \frac{\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} - 3\dot{y}^2}{p - 5x - 3y} = 0$, donc $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = -3$, $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = -5$, $\beta_3 = -3$.

Comme les coëfficiens de cette équation ſatisfont aux deux

Donc $\alpha 1 = \frac{1 + a1\alpha 2}{a2}$; en ſubſtituant, on aura

$$\alpha 2 a3 - a2 \alpha 3 = \frac{7a2 - a3}{a1} = 0;$$

$$\alpha 2 a4 - a2 \alpha 4 = \frac{a2 - a4}{a1} = 0;$$

$$\alpha 2 a5 - a2 \alpha 5 = \frac{-5a2 - a5}{a1} = 0;$$

$$\alpha 2 a6 - a2 \alpha 6 = \frac{-3a2 - a6}{a1} = 0.$$

Soit $a6 = 3$, on aura $a2 = -1$; $a5 = 5$; $a4 = -1$, $a3 = -7$. Soit $a1 = 0$; en ſubſtituant ces valeurs, on aura $\alpha 1 = -1$. Soit $\alpha 2 = 0$; $\alpha 3 = 0$, $\alpha 4 = 0$, $\alpha 5 = 0$, $\alpha 6 = 0$, l'intégrale ſera $m = \frac{-x\dot{x} - 7y\dot{x} - p\dot{y} + 5x\dot{y} + 3y\dot{y}}{-p\dot{x}}$.

Les deux intégrales aux premières différences d'une équation aux ſecondes étant données, on aura l'intégrale finie de cette équation.

Par exemple ici, de la première de nos deux intégrales je tire $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{np - 2nx + 3p}{-nx - ny - p}$, & de la ſeconde je tire $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{-p + 5x + 3y}{-mp + x + 7y}$;

j'aurai l'équation $\frac{np - 2nx + 3p}{-nx - ny - p} = \frac{-p + 5x + 3y}{-mp + x + 7y}$

ou $(-mn - 3m - 1)p^2 + (2mn + 8)px + (6n + 24)py + 3nx^2 - 6nxy + 3ny^2 = 0$,

qui ſera l'intégrale de l'équation $\ddot{y} + \frac{\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} - 3\dot{y}^2}{p - 5x - 3y} = 0$.

Pour pouvoir rapporter cette équation-ci

$$\ddot{y} + \frac{\begin{array}{lll} + b1p\dot{x}^2 & + b4p\dot{x}\dot{y} & + b7p\dot{y}^2 \\ + b2x & + b5x & + b8x \\ + b3y & + b6y & + b9y \end{array}}{\beta 1p^2 + \beta 2px + \beta 3py + \beta 4x^2 + \beta 5xy + \beta 6y^2} = 0, \text{ à}$$

première formule, il faut la multiplier par $\dot{x}$; on aura

$$\ddot{y} + \frac{\begin{matrix} + b1\,p\dot{x}^3 & + b4\,p\dot{x}^2\dot{y} & + b7\,p\dot{x}\dot{y}^2 \\ + b2\,x & + b5\,x & + b8\,x \\ + b3\,y & + b6\,y & + b9\,y \end{matrix}}{\begin{matrix} + C1\,p^2\dot{x} \\ + C2\,px \\ + C3\,py \\ + C4\,x^2 \\ + C5\,xy \\ + C6\,y^2 \end{matrix}} = 0;$$ & en comparant avec la formule, on aura $a^1 1 = b1$, $b2 = 0$;

$$-\,a^1 2 = b3,\quad -\,a^2 2 + a^2 1 + a^4 1 = b4;$$
$$a^1 2 = b5 \qquad a^2 2 + a^4 1 = C2$$

$$-\,a^4 2 + a^2 3 = b6,\quad -\,a^1 3 + a^1 4 + a^5 1 = b7;$$
$$-\,a^2 3 + a^4 2 = b8 \qquad a^1 3 + a^5 1 = C3$$
$$a^2 3 + a^4 2 = C5$$

$$-\,a^1 5 = b9,\quad a^2 4 = 0,\quad a^3 1 = C1,\quad a^3 2 = C4;$$
$$a^1 5 = 0$$

$$a^3 3 = C6.$$

Donc 1.° $b2 = 0$, $b3 + b5 = 0$, $b6 + b8 = 0$, $b9 = 0$.

2.° $a^1 1 = b1$, $a^3 1 = C1$,

$$a^1 2 = -\,b3,\quad a^3 2 = C4,\quad a^4 2 = \tfrac{1}{2}(C5 - b6),$$
$$a^2 3 = \tfrac{1}{2}(C5 + b6),\quad a^3 3 = C6,$$
$$a^2 4 = 0,$$
$$a^1 5 = 0.$$

3.° $$-\,a^2 2 + a^2 1 + a^4 1 = b4;$$
$$a^2 2 + a^4 1 = C2$$
$$-\,a^1 3 + a^1 4 + a^5 1 = b7;$$
$$a^1 3 + a^5 1 = C3$$

4.° en substituant dans les conditions de la formule,

$$-\,b3\,C1 - a^2 1\, a^2 2 + b1\, a^1 3 = 0,$$
$$-\,b3\, a^4 1 - C4\, a^2 1 + \tfrac{1}{2} b1\,(C5 + b6) = 0;$$
$$a^4 1\, a^2 2 - C1\, C4 + b1\, a^1 4 = 0,$$

$$a^{4}1\,a'3 - \tfrac{1}{2}\beta 1\,(\beta 5 + b6) + a^{2}1\,a'4 = 0;$$
$$\beta 4\,a'3 - \tfrac{1}{2}(\beta 5 + b6)\,a^{2}2 - b3\,a'4 = 0,$$
$$-\,b3\,a^{5}1 - \tfrac{1}{2}(\beta 5 - b6)\,a^{2}1 + b1\,\beta 6 = 0;$$
$$a^{5}1\,a^{2}2 - \tfrac{1}{2}\beta 1\,(\beta 5 - b6) = 0,$$
$$a^{5}1\,a'3 - \beta 1\,\beta 6 = 0,\ \tfrac{1}{2}(\beta 5 - b6)\,a'3 - \beta 6\,a^{2}2 = 0;$$
$$\beta 4\,a^{5}1 - \tfrac{1}{2}(\beta 5 - b6)\,a^{4}1 = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}(\beta 5 + b6)\,a^{5}1 - \beta 6\,a^{4}1 = 0,$$
$$\tfrac{1}{4}(\beta 5 - b6)\,(\beta 5 + b6) - \beta 4\,\beta 6 = 0;$$
$$a^{5}1\,a'4 = 0,\ \tfrac{1}{2}(\beta 5 - b6)\,a'4 = 0,\ \beta 6\,a'4 = 0;$$

Au moyen de ces équations, lorsque les coëfficiens $b1$, $b2$, $b3$, $b4$, $b5$, $b6$, $b7$, $b8$, $b9$, $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$, $\beta 4$, $\beta 5$, $\beta 6$, seront donnés, & que l'équation sera intégrable par la première formule, on aura son intégrale.

Pour pouvoir rapporter l'équation

$$\ddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}^{3} + b2\,\dot{x}^{2}\dot{y} + b3\,\dot{x}\dot{y}^{2} + b4\,\dot{y}^{3}}{\begin{matrix} +\beta 1\,p\dot{x} & +\beta 4\,p\dot{y} \\ +\beta 2\,x & +\beta 5\,x \\ +\beta 3\,y & +\beta 6\,y \end{matrix}}$$

à la première formule; il faut la multiplier par $c1\,p + c2\,x + c3\,y$; on aura

$$\ddot{y} + \frac{\begin{matrix} +c1\,b1\,p\dot{x}^{3} & +c1\,b2\,p\dot{x}^{2}\dot{y} & +c1\,b3\,p\dot{x}\dot{y}^{2} & +c1\,b4\,p\dot{y}^{3} \\ +c2\,b1\,x & +c2\,b2\,x & +c2\,b3\,x & +c2\,b4\,x \\ +c3\,b1\,y & +c3\,b2\,y & +c3\,b3\,y & +c3\,b4\,y \end{matrix}}{\begin{matrix} +c1\,\beta 1\,p^{2}\dot{x} & +c1\,\beta 4\,p^{2}\dot{y} \\ +(c1\,\beta 2 + c2\,\beta 1)\,px & +(c1\,\beta 5 + c2\,\beta 4)\,px \\ +(c1\,\beta 3 + c3\,\beta 1)\,py & +(c1\,\beta 6 + c3\,\beta 4)\,py \\ +c2\,\beta 2\,x^{2} & +c2\,\beta 5\,x^{2} \\ +(c2\,\beta 3 + c3\,\beta 2)\,x & +(c2\,\beta 6 + c3\,\beta 5)\,xy \\ +c3\,\beta 3\,y^{2} & +c3\,\beta 6\,y^{2} \end{matrix}} = 0;$$

& en comparant avec la formule, on aura $a'1 = c1\,b1$, $c2\,b1 = 0$,

$$-\,a'2 = c3\,b1,\quad -\,a^{2}2 + a^{2}1 + a^{4}1 = c1\,b2,$$
$$a'2 = c2\,b2 \qquad a^{2}2 + a^{4}1 = c1\,\beta 2 + c2\,\beta 1$$
$$-\,a^{4}2 + a^{2}3 = c3\,b2,$$
$$-\,a^{2}3 + a^{4}2 = c2\,b3$$
$$a^{2}3 + a^{4}2 = c2\,\beta 3 + c3\,\beta 2$$
$$= a'3$$

$$-a'3 + a'4 + a^51 = c1\,b3, \quad -a'5 = c3\,b3,$$
$$a'3 + a^51 = c1\,\beta3 + c3\,\beta1 \qquad a'5 = c2\,b4$$

$a^24 = c1\,b4$, $c3\,b4 = 0$, $a^31 = c1\,\beta1$, $a^32 = c2\,\beta2$, $a^33 = c3\,\beta3$, $c1\,\beta4 = 0$, $c1\,\beta5 + c2\,\beta4 = 0$, $c1\,\beta6 + c3\,\beta4 = 0$, $c2\,\beta5 = 0$, $c2\,\beta6 + c3\,\beta5 = 0$, $c3\,\beta6 = 0$.

Que $\beta4$ ne ſoit pas $= 0$, on aura $c1 = 0$, $c2 = 0$, $c3 = 0$; par conſéquent $\beta4$ eſt néceſſairement $= 0$. On tronvera de la même manière que $\beta5$ & $\beta6$ ſont auſſi néceſſairement $= 0$; l'on a $c2\,b1 = 0$, $c2\,b2 + c3\,b1 = 0$, $c2\,b3 + c3\,b2 = 0$, $c3\,b3 + c2\,b4 = 0$, $c3\,b4 = 0$.

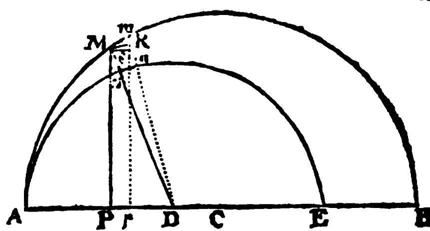
Que $c2$ ne ſoit pas $= 0$, on aura $b1 = 0$, $b2 = 0$, $b3 = 0$, $b4 = 0$; par conſéquent $c2$ eſt néceſſairement $= 0$. On prouvera de la même manière que $c3$ eſt auſſi néceſſairement $= 0$. Par conſéquent, pour que la première équation de la ſeconde Suite, puiſſe appartenir à la première formule, il faut qu'elle ſoit repréſentée généralement par $\ddot{y} + \dfrac{b1\,\dot{x}^3 + b2\,\dot{x}^2\dot{y} + b3\,\dot{x}\dot{y}^2 + b4\,\dot{y}^3}{+\beta1\,p\dot{x} + \beta2\,x + \beta3\,y} = 0$; & pour la rapporter à cette formule auſſi généralement qu'elle peut l'être, il ſuffit de la multiplier par p; on aura

$$a'1 = b1, \quad a^31 = \beta1,$$
$$a'2 = 0 \quad a^42 = 0, \quad a^32 = 0,$$
$$a^23 = 0 \quad a^33 = 0$$
$$a^24 = b4$$
$$a'5 = 0$$
$$-a^22 + a^21 + a^41 = b2,$$
$$a^22 + a^41 = \beta2$$
$$-a'3 + a'4 + a^51 = b3;$$
$$a'3 + a^51 = \beta3$$

& en substituant dans les conditions de la formule, on aura
$-a^2 1\, a^2 2 + b 1\, a'3 = 0$, $a^4 1\, a^2 2 + b 1\, a'4 = 0$,
$a^4 1\, a'3 + a^2 1\, a'4 = 0$, $a^5 1\, a^2 2 + b 1\, b 4 = 0$,
$a^5 1\, a'3 + b 4\, a^2 1 = 0$, $a^5 1\, a'4 - b 4\, a^4 1 = 0$.
Au moyen de ces équations, lorsque les coëfficiens $b 1$, $b 2$, $b 3$, $b 4$, $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$, seront donnés, s'ils sont tels que l'équation soit intégrable par la première formule, on aura son intégrale.

EXEMPLE.

Des centres C & D pris dans la ligne AB & des rayons CA, DA, je décris les cercles AMB, ANE; je mène DM qui coupe ces deux cercles en N & en M.



Je fais $CA = p$, $CD = ep$; j'aurai $DA = (1 - e).p$; $DB = (1 + e).p$.

Je fais $AN = x$, $AM = y$, $DM = u$.

Du point M soit mené MP perpendiculaire à AB; on aura $(PM)^2 = 2p.AP - (AP)^2$, $DP = (1 - e).p - AP$; & à cause du triangle rectangle DPM, on aura

$$u^2 = 2p.AP + (1-e)^2.p^2 - 2.(1-e).p.AP;$$

donc $AP = \frac{u^2 - (1-e)^2.p^2}{2ep}$;

$$PM = \frac{1}{2ep}\sqrt{[(1+e)^2.p^2 - u^2]\,[u^2 - (1-e)^2.p^2]},$$

$$Pp = MS = \frac{u\dot{u}}{ep}.$$

$$Sm = \frac{[(1 + e^2).p^2 - u^2]u\dot{u}}{ep\sqrt{[(1+e)^2.p^2 - u^2]\,[u^2 - (1-e)^2.p^2]}};$$

donc $\dot{y} = \dfrac{2pu\dot{u}}{\sqrt{[(1+e)^2.p^2 - u^2]\,[u^2 - (1-e)^2.p^2]}}$.

Du centre D & du rayon DM, ſoit décrit le petit arc MR qui coupe DM en R, on aura

$$(1 - e).p : \dot{x} :: u : MR = \frac{u\dot{x}}{(1-e).p};$$

donc $\dot{y}^2 = \dfrac{u^2\dot{x}^2}{(1-e)^2.p^2} + \dot{u}^2$.

Nos deux équations peuvent ſe changer en ces deux autres-ci, $u^2 = \dfrac{(1-e).(1-e)^2.p^2\dot{y}}{2\dot{x} - (1-e)\dot{y}}$,

$$\dot{u}^2 = \frac{\dot{y}[2\dot{x}\dot{y} - (1+e)\dot{x}^2 - (1-e)\dot{y}^2]}{2\dot{x} - (1-e)\dot{y}}.$$

En différenciant la première de ces deux équations, & faiſant $\dot{x}$ conſtant, on aura $\dot{u}^2 = \dfrac{(1-e).(1-e^2)p^2\dot{x}^2\ddot{y}^2}{[2\dot{x} - (1-e)\dot{y}]^3\dot{y}}$.

En égalant les deux valeurs de $\dot{u}^2$, on aura

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}[(1-e)\dot{y} - 2\dot{x}]\sqrt{[2\dot{x}\dot{y} - (1+e)\dot{x}^2 - (1-e)\dot{y}^2}}{(1-e).\sqrt{(1+e)}.p\dot{x}} = 0.$$

Si l'on peut trouver l'une des deux intégrales de cette équation, l'on y ſubſtituera pour $\dot{y}$ ſa valeur priſe de cette équation-ci, $u^2 = \dfrac{(1-e).(1-e^2)p^2\dot{y}}{2\dot{x} - (1-e)\dot{y}}$, & on aura par ce moyen une équation entre p, x, y, u, e, & la conſtante n que l'on aura ajoûtée en intégrant; l'on fera dans cette équation $x = 0$, $y = 0$, $u = (1 - e).p$, & l'on déterminera n.

Enſuite l'on fera $y = \frac{1}{2}c$, $x = \frac{1-e}{2}c$, $u = (1+e).p$, & l'on aura une équation entre c & p, c'eſt-à-dire, que l'on aura la circonférence du cercle dont le rayon eſt p.

Quant au nombre e, ſa valeur eſt arbitraire; mais elle doit être priſe entre o & 1. Or il eſt certain que cette équation-ci,

$$\ddot{y} + \frac{\dot{y}[(1-e)\dot{y} - 2\dot{x})]\sqrt{[(2\dot{x}\dot{y} - (1+e)\dot{x}^2 - (1-e)\dot{y}^2]}}{(1-e).\sqrt{(1+e)}.p\dot{x}} = 0,$$

a deux intégrales aux premières différences; il y en a une des deux qui n'eſt pas déterminable, mais il pourroit ſe faire que l'autre le fût.

Je fais $\dot{z}^2 = 2\dot{x}\dot{y} - (1+e)\dot{x}^2 - (1-e)\dot{y}^2$;

donc $\frac{\ddot{z}}{\dot{x}} = 0$, $\frac{\ddot{z}}{\dot{y}} = 0$, $\frac{\ddot{z}}{\ddot{y}} = \frac{\dot{x} - (1-e)\dot{y}}{\dot{z}}$;

l'équation à intégrer ſera $\dot{y} + \frac{-2\dot{x}\dot{y}\dot{z} + (1-e)\dot{y}^2\dot{z}}{(1-e).\sqrt{(1+e)}.p\dot{x}} = 0$;

& l'intégrale ſera $n = \dfrac{\begin{array}{lll} +a1p\dot{x} & +a4p\dot{y} & +a7p\dot{z} \\ +a2x & +a5x & +a8x \\ +a3y & +a6y & +a9y \end{array}}{\begin{array}{lll} +\alpha1p\dot{x} & +\alpha4p\dot{y} & +\alpha7p\dot{z} \\ +\alpha2x & +\alpha5x & +\alpha8x \\ +\alpha3y & +\alpha6y & +\alpha9y \end{array}}$;

ou $n = \frac{(a1p^2 +)\dot{x} + (a7p^2 +)\dot{y} + (a13p^2 +)\dot{z}}{(\alpha1p^2 +)\dot{x} + (\alpha7p^2 +)\dot{y} + (\alpha13p^2 +)\dot{z}}$;

ou $n = \frac{(a1p^3 +)\dot{x} + (a11p^3 +)\dot{y} + (a21p^3 +)\dot{z}}{(\alpha1p^3 +)\dot{x} + (\alpha11p^3 +)\dot{y} + (\alpha21p^3 +)\dot{z}}$, &c.

ou bien elle ſera

$$n = \dfrac{\begin{array}{lllll} +a1p\dot{x}^2 & +a4p\dot{x}\dot{y} & +a7p\dot{x}\dot{z} & +a10p\dot{y}^2 & +a13p\dot{y}\dot{z} \\ +a2x & +a5x & +a8x & +a11x & +a14x \\ +a3y & +a6y & +a9y & +a12y & +a15y \end{array}}{\begin{array}{lllll} +\alpha1p\dot{x}^2 & +\alpha4p\dot{x}\dot{y} & +\alpha7p\dot{x}\dot{z} & +\alpha10p\dot{y}^2 & +\alpha13p\dot{y}\dot{z} \\ +\alpha2x & +\alpha5x & +\alpha8x & +\alpha11x & +\alpha14x \\ +\alpha3y & +\alpha6y & +\alpha9y & +\alpha12y & +\alpha15y \end{array}};$$

ou $u = \frac{(a1p^2+)\dot{x}^2 + (a7p^2+)\dot{x}\dot{y} + (a13p^2+)\dot{x}\dot{z} + (a19p^2+)\dot{y}^2 + (a25p^2+)\dot{y}\dot{z}}{(\alpha 1p^2+)\dot{x}^2 + (\alpha 7p^2+)\dot{x}\dot{y} + (\alpha 13p^2+)\dot{x}\dot{z} + (\alpha 19p^2+)\dot{y}^2 + (\alpha 25p^2+)\dot{y}\dot{z}}$, &c. ou bien elle sera

$$n = \frac{(a1p+)\dot{x}^3 + (a4p+)\dot{x}^2\dot{y} + (a7p+)\dot{x}^2\dot{z} + (a10p+)\dot{x}\dot{y}^2 + (a13p+)\dot{x}\dot{y}\dot{z} + (a16p+)\dot{y}^3 + (a19p+)\dot{y}^2\dot{z}}{(\alpha 1p+)\dot{x}^3 + (\alpha 4p+)\dot{x}^2\dot{y} + (\alpha 7p+)\dot{x}^2\dot{z} + (\alpha 10p+)\dot{x}\dot{y}^2 + (\alpha 13p+)\dot{x}\dot{y}\dot{z} + (\alpha 16p+)\dot{y}^3 + (\alpha 19p+)\dot{y}^2\dot{z}},$$ ou $n =$, &c.

Supposons par exemple, que $n = \frac{(a1p+)\dot{x}^2 + (a4p+)\dot{x}\dot{y} + (a7p+)\dot{x}\dot{z} + (a10p+)\dot{y}^2 + (a13p+)\dot{y}\dot{z}}{(\alpha 1p+)\dot{x}^2 + (\alpha 4p+)\dot{x}\dot{y} + (\alpha 7p+)\dot{x}\dot{z} + (\alpha 10p+)\dot{y}^2 + (\alpha 13p+)\dot{z}\dot{y}}$, est l'intégrale de l'équation $\ddot{y} + \frac{-2\dot{x}\dot{y}\dot{z} + (1-e)\dot{y}^2\dot{z}}{(1-e)\sqrt{(1+e)p\dot{x}}} = 0$; en différenciant, on aura

$$\ddot{y} + \frac{\left(\begin{array}{l}+a1p\dot{x}^2+\\+\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}a2\dot{x}^3 + a3\dot{x}^2\dot{y} + a6\dot{x}\dot{y}^2 + a8\dot{x}^2\dot{z} + a9\dot{x}\dot{y}\dot{z} + a12\dot{y}^3 + a15\dot{y}^2\dot{z}\\ \qquad\quad +a5 \qquad\;\; a11 \qquad\qquad\qquad +a14\end{array}\right) - \&c.}{\left(\begin{array}{l}+\alpha 1p\dot{x}^2+\\+\end{array}\right)\left(\begin{array}{llll}+a4p\dot{x} & +a7p\dot{x}.\frac{\dot{x}-(1-e)\dot{y}}{\dot{z}} & + & 2a10p\dot{y} + a13p\dot{z} + a13p\dot{y}\,\frac{\dot{x}-(1-e)\dot{y}}{\dot{z}}\\ +a5x & +a8x & + & 2a11x + a14x + a14x\\ +a6y & +a9y & + & 2a12y + a15y + a15y\end{array}\right) - \&c.} = 0;$$

& en multipliant le numérateur & le dénominateur du second terme de cette équation par $\dot{z}$, on aura

$$\ddot{y} + \frac{\left(\begin{array}{l}+a1p\dot{x}^2+\\+\end{array}\right)\left(\begin{array}{llll}+a2\dot{x}^3\dot{z} & +a3\dot{x}^2\dot{y}\dot{z} & +a6\dot{x}\dot{y}^2\dot{z} & +\\ & +a5 & +a11 & -\\ & & & =\end{array}\right)}{\begin{array}{llll}2a8\dot{x}^3\dot{y} - (1+e)a8\dot{x}^4 & -(1-e)a8\dot{x}^2\dot{y}^2 & -(1-e)a9\dot{x}\dot{y}^3 & +\\ (1+e)a9 & +2a9 & -(1-e)a14 & \\ (1+e)a14 & +2a14 & +2a15 & \\ & -(1+e)a15 & & \end{array}}$$

$$\frac{a12\,\dot{y}^3\dot{z} - (1-e)\,a15\,\dot{y}^4\big) - \&c.}{\left(\begin{array}{l} + a1\,px^2 + \\ + \end{array}\right)\left(\begin{array}{llll} + a4\,px\ddot{z} + a7\,p\dot{x}^2 & -(1-e)\,a7\,px\ddot{y} & + 2a10\,py\ddot{z} + \\ + a5\,x \quad + a8\,x & -(1-e)\,a8\,x & + 2a11\,x \; + \\ + a6\,y \quad + a9\,y & -(1-e)\,a9\,y & + 2a12\,y \; + \\ & + a13\,p & \\ & + a14\,x & \\ & + a15\,y & \end{array}\right.} = 0;$$

$$\left.\begin{array}{lll} 2a13\,px\ddot{y} & -(1+e)\,a13\,p\dot{x}^2 & -2(1-e)\,a13\,p\dot{y}^2 \\ 2a14\,x & -(1+e)\,a14\,x & -2(1-e)\,a14\,x \\ 2a15\,y & -(1+e)\,a15\,y & -2(1-e)\,a15\,y \end{array}\right) - \&c.$$

Je n'ai pas poussé ce calcul plus loin, & je n'ai fait aucune tentative, parce que ce qui feroit aisé pour plusieurs personnes qui travailleroient de concert ensemble, est impraticable pour un homme seul : j'ai seulement voulu montrer la route à ceux qui voudront faire quelques essais : ils y gagneront au moins de se rendre cette méthode-ci familière.

APPLICATION AUX ÉQUATIONS AUX TROISIÉMES DIFFÉRENCES.

FORMULES de toutes les Équations possibles aux troisièmes différences sans radicaux.

PREMIÈRE SUITE. $\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}\ddot{y} + b2\,\dot{y}\ddot{y}}{\beta1\,p + \beta2\,x + \beta3\,y} = 0;$

$$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}^3 + b2\,\dot{x}^2\dot{y} + b3\,\dot{x}\dot{y}^2 + b4\,\dot{y}^3 + (b5\,p+)\,\dot{x}\ddot{y} + (b8\,p+)\,\dot{y}\ddot{y}}{(\beta1\,p^2+)} = 0;$$

$$\dddot{y} + \frac{(b1\,p+)\,\dot{x}^3 + (b4\,p+)\,\dot{x}^2\dot{y} + (b7\,p+)\,\dot{x}\dot{y}^2 + (b10\,p+)\,\dot{y}^3 + (b13\,p^2+)\,\dot{x}\ddot{y} + (b19\,p^2+)\,\dot{y}\ddot{y}}{(\beta1\,p^3+)} = 0, \&c.$$

SECONDE SUITE. $\dddot{y} + \frac{b1\,\ddot{y}^2}{\beta1\,\dot{x} + \beta2\,\dot{y}} = 0;$

$$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}^2\ddot{y} + b2\,\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b3\,\dot{y}^2\ddot{y} + (b4p +)\ddot{y}^2}{(\mathcal{C}1p +)\dot{x} + (\mathcal{C}4p +)\dot{y}} = 0,$$

$$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}^4 + b2\,\dot{x}^3\dot{y} + b3\,\dot{x}^2\dot{y}^2 + b4\,\dot{x}\dot{y}^3 + b5\,\dot{y}^4 + (b6p +)\dot{x}^2\ddot{y} + (b9p +)\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + (b12p +)\dot{y}^2\ddot{y} + (b15p^2 +)\ddot{y}^2}{(\mathcal{C}1p^2 +)\dot{x} + (\mathcal{C}7p^2 +)\dot{y}} = 0;$$

$$\dddot{y} + \frac{(b1p +)\dot{x}^4 + (b4p +)\dot{x}^3\dot{y} + (b7p +)\dot{x}^2\dot{y}^2 + (b10p +)\dot{x}\dot{y}^3 + (b13p +)\dot{y}^4 + (b16p^2 +)\dot{x}^2\ddot{y} + (b22p^2 +)\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + (b28p^2 +)\dot{y}^2\ddot{y} + (b34p^3 +)\ddot{y}^2}{(\mathcal{C}1p^3 +)\dot{x} + (\mathcal{C}11p^3 +)\dot{y}} = 0, \text{ \&c.}$$

IIIe SUITE. $$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}\ddot{y}^2 + b2\,\dot{y}\ddot{y}^2}{\mathcal{C}1\,\dot{x}^2 + \mathcal{C}2\,\dot{x}\dot{y} + \mathcal{C}3\,\dot{y}^2 + (\mathcal{C}4p +)\ddot{y}} = 0;$$

$$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}^3\ddot{y} + b2\,\dot{x}^2\dot{y}\ddot{y} + b3\,\dot{x}\dot{y}^2\ddot{y} + b4\,\dot{y}^3\ddot{y} + (b5p +)\dot{x}\ddot{y}^2 + (b8p +)\dot{y}\ddot{y}^2}{(\mathcal{C}1p +)\dot{x}^2 + (\mathcal{C}4p +)\dot{x}\dot{y} + (\mathcal{C}7p +)\dot{y}^2 + (\mathcal{C}10p^2 +)\ddot{y}} = 0;$$

$$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}^5 + b2\,\dot{x}^4\dot{y} + b3\,\dot{x}^3\dot{y}^2 + b4\,\dot{x}^2\dot{y}^3 + b5\,\dot{x}\dot{y}^4 + b6\,\dot{y}^5 + (b7p +)\dot{x}^3\ddot{y} + (b10p +)\dot{x}^2\dot{y}\ddot{y} + (b13p +)\dot{x}\dot{y}^2\ddot{y} + (b16p +)\dot{y}^3\ddot{y} + (b19p^2 +)\dot{x}\ddot{y}^2 + (b25p^2 +)\dot{y}\ddot{y}^2}{(\mathcal{C}1p^2 +)\dot{x}^2 + (\mathcal{C}7p^2 +)\dot{x}\dot{y} + (\mathcal{C}13p^2 +)\dot{y}^2 + (\mathcal{C}19p^3 +)\ddot{y}} = 0, \text{ \&c.}$$

IVe SUITE. $$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}^2\ddot{y}^2 + b2\,\dot{x}\dot{y}\ddot{y}^2 + b3\,\dot{y}^2\ddot{y}^2 + (b4p +)\ddot{y}^3}{\mathcal{C}1\,\dot{x}^3 + \mathcal{C}2\,\dot{x}^2\dot{y} + \mathcal{C}3\,\dot{x}\dot{y}^2 + \mathcal{C}4\,\dot{y}^3 + (\mathcal{C}5p +)\dot{x}\ddot{y} + (\mathcal{C}8p +)\dot{y}\ddot{y}} = 0;$$

$$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}^4\ddot{y} + b2\,\dot{x}^3\dot{y}\ddot{y} + b3\,\dot{x}^2\dot{y}^2\ddot{y} + b4\,\dot{x}\dot{y}^3\ddot{y} + b5\,\dot{y}^4\ddot{y} + (b6p +)\dot{x}^2\ddot{y}^2 + (b9p +)\dot{x}\dot{y}\ddot{y}^2 + (b12p +)\dot{y}^2\ddot{y}^2 + (b15p^2 +)\ddot{y}^3}{(\mathcal{C}1p +)\dot{x}^3 + (\mathcal{C}4p +)\dot{x}^2\dot{y} + (\mathcal{C}7p +)\dot{x}\dot{y}^2 + (\mathcal{C}10p +)\dot{y}^3 + (\mathcal{C}13p^2 +)\dot{x}\ddot{y} + (\mathcal{C}19p^2 +)\dot{y}\ddot{y}} = 0;$$

$$\dddot{y} + \frac{\begin{matrix} b1\dot{x}^6 + b2\dot{x}^5\dot{y} + b3\dot{x}^4\dot{y}^2 + b4\dot{x}^3\dot{y}^3 + b5\dot{x}^2\dot{y}^4 + b6\dot{x}\dot{y}^5 + b7\dot{y}^6 + \\ (b8p+)\dot{x}^4\ddot{y} + (b11p+)\dot{x}^3\dot{y}\ddot{y} + (b14p+)\dot{x}^2\dot{y}^2\ddot{y} + (b17p+)\dot{x}\dot{y}^3\ddot{y} + \\ (b20p+)\dot{y}^4\ddot{y} + (b23p^2+)\dot{x}^2\ddot{y}^2 + (b29p^2+)\dot{x}\dot{y}\ddot{y}^2 + (b35p^2+)\dot{y}^2\ddot{y}^2 + \\ (b41p^3+)\ddot{y}^3 \end{matrix}}{\begin{matrix} (\beta1p^2+)\dot{x}^3 + (\beta7p^2+)\dot{x}^2\dot{y} + (\beta13p^2+)\dot{x}\dot{y}^2 + \\ (\beta19p^2+)\dot{y}^3 + (\beta25p^3+)\dot{x}\ddot{y} + (\beta35p^3+)\dot{y}\ddot{y} \end{matrix}} = 0, \text{ \&c.}$$

Formules de toutes les Intégrales possibles d'équations aux troisièmes différences sans radicaux.

I.re SUITE. $$n = \frac{a1\dot{x}^2 + a2\dot{x}\dot{y} + a3\dot{y}^2 + (a4p + a5x + a6y)\ddot{y}}{\alpha1\dot{x}^2 + \alpha2\dot{x}\dot{y} + \alpha3\dot{y}^2 + (\alpha4p + \alpha5x + \alpha6y)\ddot{y}};$$

$$n = \frac{(a1p+)\dot{x}^2 + (a4p+)\dot{x}\dot{y} + (a7p+)\dot{y}^2 + (a10p^2+)\ddot{y}}{(\alpha1p+)\dot{x}^2 + (\alpha4p+)\dot{x}\dot{y} + (\alpha7p+)\dot{y}^2 + (\alpha10p^2+)\ddot{y}};$$

$$n = \frac{(a1p^2+)\dot{x}^2 + (a7p^2+)\dot{x}\dot{y} + (a13p^2+)\dot{y}^2 + (a19p^3+)\ddot{y}}{(\alpha1p^2+)\dot{x}^2 + (\alpha7p^2+)\dot{x}\dot{y} + (\alpha13p^2+)\dot{y}^2 + (\alpha19p^3+)\ddot{y}}, \text{ \&c.}$$

II.e SUITE. $$n = \frac{a1\dot{x}^3 + a2\dot{x}^2\dot{y} + a3\dot{x}\dot{y}^2 + a4\dot{y}^3 + (a5p+)\dot{x}\ddot{y} + (a8p+)\dot{y}\ddot{y}}{\alpha1\dot{x}^3 + \alpha2\dot{x}^2\dot{y} + \alpha3\dot{x}\dot{y}^2 + \alpha4\dot{y}^3 + (\alpha5p+)\dot{x}\ddot{y} + (\alpha8p+)\dot{y}\ddot{y}};$$

$$n = \frac{\begin{matrix}(a1p+)\dot{x}^3 + (a4p+)\dot{x}^2\dot{y} + (a7p+)\dot{x}\dot{y}^2 + (a10p+)\dot{y}^3 + \\ (a13p^2+)\dot{x}\ddot{y} + (a19p^2+)\dot{y}\ddot{y}\end{matrix}}{(\alpha1p+)\dot{x}^3 + \text{\&c.}}, \text{ \&c.}$$

III.e SUITE. $$n = \frac{\begin{matrix}a1\dot{x}^4 + a2\dot{x}^3\dot{y} + a3\dot{x}^2\dot{y}^2 + a4\dot{x}\dot{y}^3 + a5\dot{y}^4 + (a6p+)\dot{x}^2\ddot{y} + \\ (a9p+)\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + (a12p+)\dot{y}^2\ddot{y} + (a15p^2+)\ddot{y}^2\end{matrix}}{\alpha1\dot{x}^4 + \text{\&c.}}, \text{ \&c.}$$

I.

I.

Soit $n = \dfrac{\begin{array}{l} a1\dot{x}^2 + a2\dot{x}\dot{y} + a3\dot{y}^2 + a4p\ddot{y} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a5x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a6y \end{array}}{\begin{array}{l} \alpha1\dot{x}^2 + \alpha2\dot{x}\dot{y} + \alpha3\dot{y}^2 + \alpha4p\ddot{y} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha5x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha6y \end{array}}$, en différenciant, on aura l'équation

$$\dddot{y} + \frac{\begin{array}{llll} + a^11\dot{x}^3\ddot{y} & + 2a^21\dot{x}^2\dot{y}\ddot{y} & + a^12\dot{x}\dot{y}^2\ddot{y} & + a^13\dot{y}^3\ddot{y} + (-a^22 + a^14)p\dot{x}\ddot{y}^2 + (-2a^13 + a^24)p\dot{y}\ddot{y}^2 \\ + a^41 & + a^32 & + a^23 & \quad - a^32x \qquad\qquad\qquad\qquad + (-2a^23 + a^15)x \\ & + a^51 & + a^42 & \quad + (-a^42 - a^15)y \qquad\quad - 2a^33y \end{array}}{\begin{array}{lll} + a^11p\dot{x}^2 & + a^22p\dot{x}\dot{y} & + a^13p\dot{y}^2 \\ + a^41x & + a^32x & + a^23x \\ + a^51y & + a^42y & + a^33y \end{array}} = 0;$$

qui, en ſuppoſant les quinze premières conditions du Lemme, ſera la formule de toutes les équations aux troiſièmes différences, dont l'intégrale eſt $n = \dfrac{a1\dot{x}^2 +}{\alpha1\dot{x}^2 +}$, &c.

$$\text{Soit } n = \frac{\begin{array}{llll} + a1p\dot{x}^2 & + a4p\dot{x}\dot{y} & + a7p\dot{y}^2 & + a10p^2\ddot{y} \\ + a2x & + a5x & + a8x & + a11px \\ + a3y & + a6y & + a9y & + a12py \\ & & & + a13x^2 \\ & & & + a14xy \\ & & & + a15y^2 \end{array}}{\begin{array}{llll} + \alpha1p\dot{x}^2 & + \alpha4p\dot{x}\dot{y} & + \alpha7p\dot{y}^2 & + \alpha10p^2\ddot{y} \\ + \alpha2x & + \alpha5x & + \alpha8x & + \alpha11px \\ + \alpha3y & + \alpha6y & + \alpha9y & + \alpha12py \\ & & & + \alpha13x^2 \\ & & & + \alpha14xy \\ & & & + \alpha15y^2 \end{array}},$$

en différenciant, on aura l'équation, &c.

I I.

Pour pouvoir rapporter l'équation $\dddot{y} + \frac{b1\dot{x}\ddot{y} + b2\dot{y}\ddot{y}}{\beta 1 p + \beta 2 x + \beta 3 y} = 0$ à la première formule, il faut la multiplier par $c1\dot{x}^2 + c2\dot{x}\dot{y} + c3\dot{y}^2 + c4 p\ddot{y} + c5 x\bar{y} + c6 y\bar{y}$, on trouvera que $c2$, $c3$, $c4$, $c5$ & $c6$, font $= 0$. Soit $c1 = 1$, on aura $\dddot{y} + \frac{b1\dot{x}^3\ddot{y} + b2\dot{x}^2\dot{y}\bar{y}}{\beta 1 p\dot{x}^2 + \beta 2 x\dot{x}^2 + \beta 3 y\dot{x}^2} = 0$; & en comparant avec la formule, on aura

$a'1 + a^4 1 = b1$, $\quad 2a^2 1 + a^3 2 + a^5 1 = b2$;
$a^4 1 = \beta 2 \qquad\qquad a^5 1 = \beta 3$
$\qquad\qquad\qquad\quad a^3 2 = 0$

$a'2 + a^2 3 + a^4 2 = 0$, $\qquad a^3 3 = 0$;
$\quad - a^2 3 = 0 \qquad\qquad - 2a^3 3 = 0$
$\quad a^4 2 = 0 \qquad\qquad\quad a^3 3 = 0$

$- a^2 2 + a'4 = 0$, $\qquad - a^4 2 - a'5 = 0$;
$\quad a^2 2 = 0 \qquad\qquad - 2a^2 3 + a'5 = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad a^2 3 = 0$

$- 2a'3 + a^2 4 = 0$, $\quad a^3 1 = \beta 1$,
$\quad a'3 = 0$

ou $a'1 = b1 - \beta 2$, $\qquad a^2 1 = \frac{1}{2}(b2 - \beta 3)$,
$a'2 = 0 \qquad\qquad a^2 2 = 0$
$a'3 = 0 \qquad\qquad a^2 3 = 0$
$a'4 = 0 \qquad\qquad a^2 4 = 0$
$a'5 = 0$

$a^3 1 = \beta 1$, $\quad a^4 1 = \beta 2$, $\quad a^5 1 = \beta 3$, ou
$a^3 2 = 0 \qquad a^4 2 = 0$
$a^3 3 = 0$

$a1a2 - a1a2 = b1 - \mathcal{C}2$, $a1a3 - a1a3 = \frac{1}{2}(b2 - \mathcal{C}3)$,
$a2a3 - a2a3 = 0$ $a2a4 - a2a4 = 0$
$a3a4 - a3a4 = 0$ $a3a5 - a3a5 = 0$
$a4a5 - a4a5 = 0$ $a4a6 - a4a6 = 0$
$a5a6 - a5a6 = 0$

$a1a4 - a1a4 = \mathcal{C}1$, $a1a5 - a1a5 = \mathcal{C}2$,
$a2a5 - a2a5 = 0$ $a2a6 - a2a6 = 0$
$a3a6 - a3a6 = 0$

$a1a6 - a1a6 = \mathcal{C}3$.

Donc $a1 = \frac{(b1 - \mathcal{C}2) + a1a2}{a2}$; en substituant cette valeur de $a1$, on aura

$$a2a3 - a2a3 = \frac{\frac{1}{2}(b2 - \mathcal{C}3)a2 - (b1 - \mathcal{C}2)a3}{a1} = 0,$$

$$a2a4 - a2a4 = \frac{\mathcal{C}1a2 - (b1 - \mathcal{C}2)a4}{a1} = 0,$$

$$a2a5 - a2a5 = \frac{\mathcal{C}2a2 - (b1 - \mathcal{C}2)a5}{a1} = 0,$$

$$a2a6 - a2a6 = \frac{\mathcal{C}3a2 - (b1 - \mathcal{C}2)a6}{a1} = 0.$$

Soit $a2 = b1 - \mathcal{C}2$, on aura $a6 = \mathcal{C}3$, $a5 = \mathcal{C}2$, $a4 = \mathcal{C}1$, $a3 = \frac{1}{2}(b2 - \mathcal{C}3$. Soit $a1 = 0$; en substituant ces valeurs, on aura $a1 = 1$. Soit $a2 = 0$, $a3 = 0$, $a4 = 0$, $a5 = 0$, $a6 = 0$, l'intégrale sera

$$n = \frac{(b1 - \mathcal{C}2)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}(b2 - \mathcal{C}3)\dot{y}^2 + \mathcal{C}1 p\ddot{y} + \mathcal{C}2x + \mathcal{C}3y}{\dot{x}^2}.$$

Pour pouvoir rapporter l'équation $\ddot{y} + \frac{b1\dot{y}^2}{\mathcal{C}1\dot{x} + \mathcal{C}2\dot{y}} = 0$ à la

première formule, il faut la multiplier par $\begin{matrix} + c1p\dot{x} & + c4py, \\ + c2x & + c5x \\ + c3y & + c6y \end{matrix}$

on aura
$$\ddot{y} + \frac{\begin{matrix} + c1b1pxy^2 & + c4b1pyy^2 \\ + c2b1x & + c5b1x \\ + c3b1y & + c6b1y \end{matrix}}{\begin{matrix} + c1\beta1px^2 & + (c1\beta2 + c4\beta1)pxy & + c4\beta2py^2 \\ + c2\beta1x & + (c2\beta2 + c5\beta1)x & + c5\beta2x \\ + c3\beta1y & + (c3\beta2 + c6\beta1)y & + c6\beta2y \end{matrix}} = 0;$$

& en comparant avec la formule, on aura $a^{1}1 + a^{4}1 = 0;$
$$a^{4}1 = c2\beta1$$

$$\begin{aligned} &2a^{2}1 + a^{3}2 + a^{1}1 = 0, && a^{1}2 + a^{2}3 + a^{4}2 = 0, \\ &-a^{3}2 = c2b1 && -a^{4}2 - a^{1}5 = c3b1 \\ &a^{1}1 = c3\beta1 && -2a^{2}3 + a^{1}5 = c5b1 \\ &a^{3}2 = c2\beta2 + c5\beta1 && a^{4}2 = c3\beta2 + c6\beta1 \\ & && a^{2}3 = c5\beta2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a^{3}3 = 0, && -a^{2}2 + a^{1}4 = c1b1; \\ &-2a^{3}3 = c6b1 && a^{2}2 = c1\beta2 + c4\beta1 \\ &a^{3}3 = c6\beta2 && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-2a^{1}3 + a^{2}4 = c4b1, && a^{3}1 = c1\beta1. \\ &a^{1}3 = c4\beta2 && \end{aligned}$$

Donc 1.° $c6 = 0$, $c2 = \frac{-\beta1}{b1 + \beta2}c5$, $c3 = \frac{-(b1 + 2\beta2)}{b1 + \beta2}c5$.

2.° $a^{1}1 = \frac{(\beta1)^2}{b1 + \beta2}c5$, $a^{2}1 = \frac{\beta1\beta2}{b1 + \beta2}c5$,

$a^{1}2 = \frac{(\beta2)^2}{b1 + \beta2}c5$ $a^{2}2 = \beta2c1 + \beta1c4$

$a^{1}3 = \beta2c4$ $a^{2}3 = \beta2c5$

$a^{1}4 = (b1 + \beta2)c1 + \beta1c4$ $a^{2}4 = (b1 + 2b2)c4$

$a^{1}5 = (b1 + 2\beta2)c5$

$$a^3 1 = \beta 1 c1, \qquad a^4 1 = \frac{-(\beta 1)^2}{b1 + \beta 2} c5,$$

$$a^3 2 = \frac{b1\beta 1}{b1 + \beta 2} c5 \qquad a^4 2 = \frac{-\beta 2(b1 + 2\beta 2)}{b1 + \beta 2} c5$$

$$a^5 1 = \frac{-\beta 1(b1 + 2\beta 2)}{b1 + \beta 2} c5.$$

On trouvera que ces valeurs satisfont aux quinze conditions de la formule, que par conséquent on peut donner à $c1$, $c4$, $c5$ telle valeur que l'on voudra, & que l'équation est intégrable par la première formule, quelles que soient les valeurs des coëfficiens $b1$, $\beta 1$, $\beta 2$.

Soit $c5 = 0$, $c4 = 0$, & $c1 = 1$, on aura

$$\alpha1 a2 - a1\alpha2 = 0, \qquad \alpha1 a3 - a1\alpha3 = 0,$$
$$\alpha2 a3 - a2\alpha3 = 0 \qquad \alpha2 a4 - a2\alpha4 = \beta 2$$
$$\alpha3 a4 - a3\alpha4 = 0 \qquad \alpha3 a5 - a3\alpha5 = 0$$
$$\alpha4 a5 - a4\alpha5 = b1 + \beta 2 \qquad \alpha4 a6 - a4\alpha6 = 0$$
$$\alpha5 a6 - a5\alpha6 = 0$$

$$\alpha1 a4 - a1\alpha4 = \beta 1, \qquad \alpha1 a5 - a1\alpha5 = 0;$$
$$\alpha2 a5 - a2\alpha5 = 0 \qquad \alpha2 a6 - a2\alpha6 = 0$$
$$\alpha3 a6 - a3\alpha6 = 0$$

$$\alpha1 a6 - a1\alpha6 = 0.$$

Soit $a1 = 0$, $a2 = 0$, $a3 = 0$, $a4 = 1$; $a5 = 0$, $a6 = 0$, on aura $\alpha1 = \beta 1$, $\alpha2 = \beta 2$, $\alpha3 = 0$, $\alpha5 = -(b1 + \beta 2)$, $\alpha6 = 0$. Soit $\alpha4 = 0$, l'intégrale sera $n = \frac{p\ddot y}{\beta 1\dot x^2 + \beta 2\dot x\ddot y - (b1 + \beta 2)x\ddot y}$.

Pour pouvoir rapporter cette équation-ci

$$\dddot y + \frac{\begin{array}{l} b1\dot x^2\ddot y + b2\dot x\dot y\ddot y + b3\dot y^2\ddot y + b4p\ddot y^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b5x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b6y \end{array}}{\begin{array}{ll} +\beta 1p\dot x & +\beta 4p\dot y \\ +\beta 2x & +\beta 5x \\ \pm\beta 3y & \pm\beta 6y \end{array}} = 0$$ à la première

formule, il faut la multiplier par $c1\,\dot{x} + c2\,\dot{y}$; on aura

$$\dddot{y} + \frac{+ c1b1\dot{x}^3\ddot{y} + (c1b2 + c2b1)\dot{x}^2\dot{y}\ddot{y} + (c1b3 + c2b2)\dot{x}\dot{y}^2\ddot{y} + c2b3\dot{y}^3\ddot{y} + \begin{matrix} c1b4p \\ + c1b5x \\ + c1b6y \end{matrix}\dot{x}\ddot{y}^2 + \begin{matrix} c2b4p \\ + c2b5x \\ + c2b6y \end{matrix}\dot{y}\ddot{y}^2}{\begin{matrix} + c1\beta1p \\ + c1\beta2x \\ + c1\beta3y \end{matrix}\dot{x}^2 \begin{matrix} + (c1\beta4 + c2\beta1)p \\ + (c1\beta5 + c2\beta2)x \\ + (c1\beta6 + c2\beta3)y \end{matrix}\dot{x}\dot{y} \begin{matrix} + c2\beta4p \\ + c2\beta5x \\ + c2\beta6y \end{matrix}\dot{y}^2} = 0;$$

& en comparant avec la formule, on aura $a^1 1 + a^4 1 = c1b1$,

$$a^4 1 = c1\beta2$$

$$2a^2 1 + a^3 2 + a^5 1 = c1b2 + c2b1;$$

$$- a^3 2 = c1b5$$

$$a^5 1 = c1\beta3$$

$$a^3 2 = c1\beta5 + c2\beta2$$

$$a^1 2 + a^2 3 + a^4 2 = c1b3 + c2b2;$$

$$- a^4 2 - a^1 5 = c1b6$$

$$- 2a^2 3 + a^1 5 = c2b5$$

$$a^4 2 = c1\beta6 + c2\beta3$$

$$a^2 3 = c2\beta5$$

$$a^3 3 = c2b3, \quad - a^2 2 + a^1 4 = c1b4,$$

$$- 2a^3 3 = c2b6 \qquad a^2 2 = c1\beta4 + c2\beta1$$

$$a^3 3 = c2\beta6$$

$$- 2a^1 3 + a^4 4 = c2b4, \quad a^3 1 = c1\beta1.$$

$$a^1 3 = c2\beta4$$

Donc 1.° $(b5 + \beta5)c1 + \beta2c2 = 0$,
$(b6 + \beta6)c1 + (b5 + \beta3 + 2\beta5)c2 = 0$;
$(b3 - \beta6)c2 = 0$, $(2b3 + b6)c2 = 0$.

2.° $a'1 = (b1 - \beta2)c1$,

$a'2 = (-\beta6 + b3)c1 + (-\beta5 - \beta3 + b2)c2$

$a'3 = \beta4 c2$

$a'4 = (b4 + \beta4)c1 + \beta1 c2$

$a'5 = (b5 + 2\beta5)c2$

$a^21 = \frac{1}{2}[(b2 + b5 - \beta3)c1 + b1 c2]$,

$a^22 = \beta4 c1 + \beta1 c2$

$a^23 = \beta5 c2$

$a^24 = (b4 + 2\beta4)c2$

$a^31 = \beta1 c1$, $a^41 = \beta2 c1$,

$a^32 = -b5 c1$ $a^42 = \beta6 c1 + \beta3 c2$.

$a^33 = b3 c2$

$a^51 = \beta3 c1$

Soit $c1 = 0$, $c2 = 1$, on aura $\beta2 = 0$, $\beta5 = -\frac{1}{2}(b5 + \beta3)$, $\beta6 = b3$, $b6 = -2b3$;

l'équation fera

$$\dddot{y} + \frac{b1\dot{x}^2\ddot{y} + b2\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b3\dot{y}^2\ddot{y} + \beta4 p\dot{y}^2 + b5x - 2b3y}{+\beta1 p\dot{x} + \beta3 y + \beta4 p\dot{y} - \frac{1}{2}(b5 + \beta3)x + b3 y} = 0,$$

& on aura

$a'1 = 0$, $a^21 = \frac{1}{2}b1$,

$a'2 = \frac{1}{2}(2b2 + b5 - \beta3)$ $a^22 = \beta1$

$a'3 = \beta4$ $a^23 = -\frac{1}{2}(b5 + \beta3)$

$a'4 = \beta1$ $a^24 = b4 + 2\beta4$

$a'5 = -\beta3$

$a^31 = 0$, $a^41 = 0$, $a^51 = 0$; en substituant

$a^32 = 0$ $a^42 = \beta3$

$a^33 = b3$

dans les conditions de la formule, on aura $b1\,\beta 1 = 0$; $\beta 1\,(b2 + b5) = 0$, $b1\,\beta 3 = 0$, $b1\,(b4 + 2\beta 4) = 0$, $\beta 3\,(b2 + b5) = 0$, $(b2 + b5)\,(b4 + 2\beta 4) = 0$, $b5\,(b4 + 2\beta 4) + b4\,\beta 3 + 2b3\,\beta 1 = 0$.

Soit $b1 = 0$, $b5 = -b2$, on aura l'équation

$$\dddot{y} + \frac{+ b2\,\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b3\,\dot{y}^2\ddot{y} \begin{array}{l} + b4\,p\,\ddot{y}^2 \\ - b2\,x \\ - 2b3\,y \end{array}}{\begin{array}{l} + \beta 1\,p\,\dot{x} \\ + \beta 3\,y \end{array} \begin{array}{l} + \beta 4\,p\,\dot{y} \\ + \frac{1}{2}(b2 - \beta 3)\,x \\ + b3\,y \end{array}} = 0,$$ qui sera intégrable par la première formule, pourvû que $b2\,(b4 + 2\beta 4) - b4\,\beta 3 - 2b3\,\beta 1 = 0$.

Soit, par exemple, l'équation

$$\dddot{y} + \frac{\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + 7\dot{y}^2\ddot{y} + 2p\ddot{y}^2 - x\ddot{y}^2 - 14y\ddot{y}^2}{-p\dot{x} + 5y\dot{x} - 3p\dot{y} - 2x\dot{y} + 7y\dot{y}} = 0,$$ on aura $b2 = 1$; $b3 = 7$, $b4 = 2$, $\beta 1 = -1$, $\beta 3 = 5$, $\beta 4 = -3$.

Si on substitue ces valeurs dans la formule & dans la condition de cette formule, on aura l'équation proposée, & la condition sera remplie; par conséquent, cette équation est intégrable par ce cas-ci; pour l'intégrer on aura

$a^1 1 = 0$, $a^2 1 = 0$, $a^3 1 = 0$, $a^4 1 = 0$, $a^5 1 = 0$,
$a^1 2 = -2$ $a^2 2 = -1$ $a^3 2 = 0$ $a^4 2 = 5$
$a^1 3 = -3$ $a^2 3 = -2$ $a^3 3 = 7$.
$a^1 4 = -1$ $a^2 4 = -4$
$a^1 5 = -5$

ou $\alpha 1 a2 - a1 \alpha 2 = 0$, $\alpha 1 a3 - a1 \alpha 3 = 0$,
$\alpha 2 a3 - a2 \alpha 3 = -2$ $\alpha 2 a4 - a2 \alpha 4 = -1$
$\alpha 3 a4 - a3 \alpha 4 = -3$ $\alpha 3 a5 - a3 \alpha 5 = -2$
$\alpha 4 a5 - a4 \alpha 5 = -1$ $\alpha 4 a6 - a4 \alpha 6 = -4$
$\alpha 5 a6 - a5 \alpha 6 = -5$

$\alpha 1 a 4 - a 1 \alpha 4 = 0$, $\alpha 1 a 5 - a 1 \alpha 5 = 0$,
$\alpha 2 a 5 - a 2 \alpha 5 = 0$ $\alpha 2 a 6 - a 2 \alpha 6 = 5$
$\alpha 3 a 6 - a 3 \alpha 6 = 7$:

$\alpha 1 a 6 - a 1 \alpha 6 = 0$.

Soit $a 1 = 0$, $\alpha 1 = 0$, $\alpha 2 = \frac{-2 + a 2 \alpha 3}{a 3}$;
donc $\alpha 3 a 4 - a 3 \alpha 4 = \frac{-a 3 + 2 a 4}{a 2} = -3$,
$\alpha 3 a 5 - a 3 \alpha 5 = \frac{2 a 5}{a 2} = -2$,
$\alpha 3 a 6 - a 3 \alpha 6 = \frac{5 a 3 + 2 a 6}{a 2} = 7$.

$\alpha 3 = \frac{-3 + a 3 \alpha 4}{a 4}$;
donc $\alpha 4 a 5 - a 4 \alpha 5 = \frac{-2 a 4 + 3 a 5}{a 3} = -1$;
$\alpha 4 a 6 - a 4 \alpha 6 = \frac{7 a 4 + 3 a 6}{a 3} = -4$.

$\alpha 4 = \frac{-1 + a 4 \alpha 5}{a 5}$;
donc $\alpha 5 a 6 - a 5 \alpha 6 = \frac{-4 a 5 + a 6}{a 4} = -5$.

Soit $a 2 = 0$; donc $a 5 = 0$. Soit $a 3 = 2$, on aura $a 4 = 1$, $a 6 = -5$; en substituant ces valeurs, on aura $\alpha 2 = -1$, $\alpha 5 = 1$, $\alpha 3 - 2 \alpha 4 = -3$, $-5 \alpha 3 - 2 \alpha 6 = 7$, $-5 \alpha 4 - \alpha 6 = -4$.

Soit $\alpha 4 = 0$, on aura $\alpha 3 = -3$, $\alpha 6 = 4$; les coëfficiens de l'intégrale seront donc

$$\left\{ \begin{array}{llllll} a 1 = 0, & a 2 = 0, & a 3 = 2, & a 4 = 1, & a 5 = 0, & a 6 = -5. \\ \alpha 1 = 0 & \alpha 2 = -1 & \alpha 3 = -3 & \alpha 4 = 0 & \alpha 5 = 1 & \alpha 6 = 4 \end{array} \right\}$$

par conséquent l'intégrale sera $n = \frac{2\dot{y}^2 + p\ddot{y} - 5y\ddot{y}}{-\dot{x}\ddot{y} - 3\dot{y}^2 + x\ddot{y} + 4y\ddot{y}}$.

Pp

Soit $\beta 4 = -\frac{1}{2} b4$, $\beta 1 = 0$, $\beta 3 = 0$, on aura l'équation

$$\dddot{y} + \frac{b1\dot{x}^2\ddot{y} + b2\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b3\dot{y}^2\ddot{y} \begin{array}{l} + b4p\ddot{y}^2 \\ + b5x \\ - 2b3y \end{array}}{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}b4p\dot{y} \\ -\frac{1}{2}b5x \\ + b3y \end{array}} = 0;$$

qui sera toûjours intégrable par la première formule.

Soit $c1 = 1$, $c2 = 0$, on aura $\beta 5 = -b5$; $\beta 6 = -b6$, l'équation sera

$$\dddot{y} + \frac{b1\dot{x}^2\ddot{y} + b2\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b3\dot{y}^2\ddot{y} \begin{array}{l} + b4p\ddot{y}^2 \\ + b5x \\ + b6y \end{array}}{\begin{array}{ll} + \beta 1p\dot{x} & + \beta 4p\dot{y} \\ + \beta 2x & - b5x \\ + \beta 3y & - b6y \end{array}} = 0, \text{ \& on aura}$$

$a'1 = b1 - \beta 2$, $a^2 1 = \frac{1}{2}(b2 + b5 - \beta 3)$.
$a'2 = b3 + b6$ $a^2 2 = \beta 4$
$a'3 = 0$ $a^2 3 = 0$
$a'4 = b4 + \beta 4$ $a^2 4 = 0$
$a'5 = 0$

$a^3 1 = \beta 1$, $a^4 1 = \beta 2$, $a^5 1 = \beta 3$;
$a^3 2 = -b5$ $a^4 2 = -b6$
$a^3 3 = 0$

& en substituant dans les conditions de la formule, on aura

$2\beta 1\,(b3 + b6) - \beta 4\,(b2 + b5 - \beta 3) = 0$,
$2\beta 2\,(b3 + b6) + b5\,(b2 + b5 - \beta 3) = 0$,
$\beta 2\beta 4 + b5\beta 1 + (b1 - \beta 2)\,(b4 + \beta 4) = 0$,
$(b2 + b5 - \beta 3)\;(b4 + \beta 4) = 0$,
$(b3 + b6)\;(b4 + \beta 4) = 0$,
$2\beta 3\,(b3 + b6) + b6\,(b2 + b5 - \beta 3) = 0$,
$\beta 3\beta 4 + \beta 1 b6 = 0$, $-\beta 5\beta 3 + b6\beta 2 = 0$,
$\beta 3\,(b4 + \beta 4) = 0$, $b6\,(b4 + \beta 4) = 0$.

Soit $\beta 4 = - b4$, l'équation sera

$$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}^2\ddot{y} + b2\,\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b3\,\dot{y}^2\ddot{y} + b4\,p\ddot{y}^2 + b5\,x + b6\,y}{+\beta 1\,p\dot{x} - b4\,p\dot{y} + \beta 2\,x - b5\,x + \beta 3\,y - b6\,y} = 0,$$ & on aura

$2\beta 1\,(b3 + b6) + b4\,(b2 + b5 - \beta 3) = 0;$

$2\beta 2\,(b3 + b6) + b5\,(b2 + b5 - \beta 3) = 0,$

$2\beta 3\,(b3 + b6) + b6\,(b2 + b5 - \beta 3) = 0,$

$- b4\beta 2 + b5\beta 1 = 0, \; - b4\beta 3 + b6\beta 1 = 0,$

$- b5\beta 3 + b6\beta 2 = 0$, & $a^{1}1 = b1 - \beta 2,$

$a^{1}2 = b3 + b6$

$a^{1}3 = 0$

$a^{1}4 = 0$

$a^{1}5 = 0$

$a^{2}1 = \frac{1}{2}(b2 + b5 - \beta 3), \quad a^{3}1 = \beta 1,$

$a^{2}2 = - b4 \qquad a^{3}2 = - b5$

$a^{2}3 = 0 \qquad a^{3}3 = 0$

$a^{2}4 = 0$

$a^{4}1 = \beta 2, \quad a^{5}1 = \beta 3.$

$a^{4}2 = - b6$

Soit $b6 = 0, \; \beta 3 = 0, \; b3 = 0, \; b5 = - b2,$

l'équation sera $$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}^2\ddot{y} + b2\,\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b4\,p\ddot{y}^2 - b2\,x}{+\beta 1\,p\dot{x} + \beta 4\,p\dot{y} + \beta 2\,x + b2\,x} = 0,$$ & on aura

$a^{1}1 = b1 - \beta 2, \quad a^{2}1 = 0, \quad a^{3}1 = \beta 1, \quad a^{4}1 = \beta 2, \quad a^{5}1 = 0,$

$a^{1}2 = 0 \qquad a^{2}2 = \beta 4 \quad a^{3}2 = b2 \quad a^{4}2 = 0$

$a^{1}3 = 0 \qquad a^{2}3 = 0 \quad a^{3}3 = 0$

$a^{1}4 = b4 + \beta 4 \quad a^{2}4 = 0$

$a^{1}5 = 0$

& $\beta 2\beta 4 - b2\beta 1 + (b1 - \beta 2)(b4 + \beta 4) = 0$.

Pour pouvoir rapporter cette équation-ci

$$\dddot{y} + \frac{b1\,\dot{x}\ddot{y} + b2\,\dot{y}\ddot{y}^2}{\beta 1\,\dot{x}^2 + \beta 2\,\dot{x}\dot{y} + \beta 3\,\dot{y}^2 + \beta 4\,p\ddot{y} + \beta 5\,x + \beta 6\,y} = 0,$$ à la première formule,

il faut premièrement que $\beta 4 = 0$, $\beta 5 = 0$, $\beta 6 = 0$; secondement, il faut la multiplier par $c1p + c2x + c3y$,

on aura $$\dddot{y} + \frac{+ c1b1p\dot{x}\ddot{y}^2 + c2b1x + c3b1y + c1b2p\dot{y}\ddot{y}^2 + c2b2x + c3b2y}{+ c1\beta 1p\dot{x}^2 + c2\beta 1x + c3\beta 1y + c1\beta 2p\dot{x}\dot{y} + c2\beta 2x + c3\beta 2y + c1\beta 3p\dot{y}^2 + c2\beta 3x + c3\beta 3y} = 0;$$

& en comparant avec la formule, on aura $a^{1}1 + a^{4}1 = 0$,

$a^{4}1 = c2\beta 1$

$2a^{2}1 + a^{3}2 + a^{5}1 = 0$, $\quad a^{1}2 + a^{2}3 + a^{4}2 = 0$;

$- a^{3}2 = c2b1$ $\quad - a^{4}2 - a^{1}5 = c3b1$

$a^{5}1 = c3\beta 1$ $\quad - 2a^{2}3 + a^{1}5 = c2b2$

$a^{3}2 = c2\beta 2$ $\quad a^{4}2 = c3\beta 2$

$a^{2}3 = c2\beta 3$

$a^{3}3 = 0$, $\quad - a^{2}2 + a^{1}4 = c1b1$;

$- 2a^{3}3 = c3b2$ $\quad a^{2}2 = c1\beta 2$

$a^{3}3 = c3\beta 3$

$- 2a^{1}3 + a^{2}4 = c1b2$, $\quad a^{3}1 = c1\beta 1$.

$a^{1}3 = c1\beta 3$

Donc 1.° $(b1 + \beta 2)c2 = 0$,

$(b1 + \beta 2)c3 + (b2 + 2\beta 3)c2 = 0$.

$(\beta 3c3 = 0$, $b2c3 = 0$.

2.° $a'1 = -\beta 1c2$, $a^2 1 = \frac{1}{2}(b1c2 - \beta 1c3)$,
$a'2 = -\beta 3c2 - \beta 2c3$ $a^2 2 = \beta 2c1$
$a'3 = \beta 3c1$ $a^2 3 = \beta 3c2$
$a'4 = (b1 + \beta 2)c1$ $a^2 4 = (b2 + 2\beta 3)c1$
$a'5 = (b2 + 2\beta 3)c2$

$a^3 1 = \beta 1c1$, $a^4 1 = \beta 1c2$, $a^5 1 = \beta 1c3$.
$a^3 2 = -b1c2$ $a^4 2 = \beta 2c3$
$a^3 3 = 0$

Que $c3$ & $c2$ soient $= 0$, & soit $c1 = 1$, on aura
$a'1 = 0$, $a^2 1 = 0$, $a^3 1 = \beta 1$, $a^4 1 = 0$, $a^5 1 = 0$,
$a'2 = 0$ $a^2 2 = \beta 2$ $a^3 2 = 0$ $a^4 2 = 0$
$a'3 = \beta 3$ $a^2 3 = 0$ $a^3 3 = 0$
$a'4 = b1 + \beta 2$ $a^2 4 = b2 + 2\beta 3$
$a'5 = 0$

& en substituant, on trouvera que toutes les équations seront satisfaites, & que par conséquent l'équation

$\ddot{y} + \frac{b1 x\dot{y}^2 + b2 y\dot{y}^2}{\beta 1 \dot{x}^2 + \beta 2 \dot{x}\dot{y} + \beta 3 \dot{y}^2} = 0$, est intégrable généralement par la première formule; pour l'intégrer, on aura

$a1a2 - a1\alpha 2 = 0$, $a1a3 - a1\alpha 3 = 0$,
$a2a3 - a2\alpha 3 = 0$ $a2a4 - a2\alpha 4 = \beta 2$
$a3a4 - a3\alpha 4 = \beta 3$ $a3a5 - a3\alpha 5 = 0$
$a4a5 - a4\alpha 5 = b1 + \beta 2$ $a4a6 - a4\alpha 6 = b2 + 2\beta 3$
$a5a6 - a5\alpha 6 = 0$

$a1a4 - a1\alpha 4 = \beta 1$, $a1a5 - a1\alpha 5 = 0$,
$a2a5 - a2\alpha 5 = 0$ $a2a6 - a2\alpha 6 = 0$
$a3a6 - a3\alpha 6 = 0$

$a1a6 - a1\alpha 6 = 0$.

Soit $a1 = 0$, $a2 = 0$, $a3 = 0$, $a4 = 1$; $a5 = 0$, $a6 = 0$, on aura $\alpha 1 = \beta 1$, $\alpha 2 = \beta 2$; $\alpha 3 = \beta 3$, $\alpha 5 = -(b1 + \beta 2)$, $\alpha 6 = -(b2 + 2\beta 3)$. Soit $\alpha 4 = 0$, l'intégrale sera

$$u = \frac{p\ddot{y}}{\beta 1 \dot{x}^2 + \beta 2 \dot{x}\dot{y} + \beta 3 \dot{y}^2 - (b1 + \beta 2)x\ddot{y} - (b2 + 2\beta 3)y\ddot{y}}.$$

Que $c3 = 0$, & $c2 = 1$, on aura $\beta 2 = -b1$; $\beta 3 = -\frac{1}{2}b2$, l'équation sera

$$\dddot{y} + \frac{b1 \dot{x}\ddot{y}^2 + b2 \dot{y}\ddot{y}^2}{\beta 1 \dot{x}^2 - b1 \dot{x}\dot{y} - \frac{1}{2}b2 \dot{y}^2} = 0, \text{ \& on aura}$$

$$\begin{array}{lll} a'1 = -\beta 1, & a^2 1 = \frac{1}{2}b1, & a^3 1 = \beta 1 c1; \\ a'2 = \frac{1}{2}b2 & a^2 2 = -b1c1 & a^3 2 = -b1, \\ a'3 = -\frac{1}{2}b2c1 & a^2 3 = -\frac{1}{2}b2 & a^3 3 = 0 \\ a'4 = 0 & a^2 4 = 0 & \\ a'5 = 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a^4 1 = \beta 1, & a^5 1 = 0; \\ a^4 2 = 0 & \end{array}$$ & en substituant dans les

conditions de la formule, on aura $2b2\beta 1 + (b1)^2 = 0$; par conséquent l'équation $\dddot{y} + \frac{-2b2\ddot{y}^2}{b1\dot{x} + b2\dot{y}} = 0$, sera intégrable dans ce cas-ci: & pour avoir son intégrale, on aura

$$\begin{array}{lll} a'1 = \frac{(b1)^2}{2b2}, & a^2 1 = \frac{1}{2}b1, & a^3 1 = \frac{-\frac{1}{2}(b1)^2}{2b2}c1; \\ a'2 = \frac{1}{2}b2 & a^2 2 = -b1c1 & a^3 2 = -b1 \\ a'3 = -\frac{1}{2}b2c1 & a^2 3 = -\frac{1}{2}b2 & a^3 3 = 0 \\ a'4 = 0 & a^2 4 = 0 & \\ a'5 = 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a^4 1 = \frac{-(b1)^2}{2b2}, & a^5 1 = 0, \text{ ou} \\ a^4 2 = 0 & \end{array}$$

$\alpha1a2 - a1\alpha2 = \frac{(b1)^2}{2b2}$, $\alpha1a3 - a1\alpha3 = \frac{1}{2}b1$,
$\alpha2a3 - a2\alpha3 = \frac{1}{2}b2$ $\alpha2a4 - a2\alpha4 = -b1c1$
$\alpha3a4 - a3\alpha4 = -\frac{1}{2}b2c1$ $\alpha3a5 - a3\alpha5 = -\frac{1}{2}b2$
$\alpha4a5 - a4\alpha5 = 0$ $\alpha4a6 - a4\alpha6 = 0$
$\alpha5a6 - a5\alpha6 = 0$

$\alpha1a4 - a1\alpha4 = -\frac{\frac{1}{2}(b1)^2}{2b2}c1$, $\alpha1a5 - a1\alpha5 = -\frac{(b1)^2}{2b2}$,
$\alpha2a5 - a2\alpha5 = -b1$, $\alpha2a6 - a2\alpha6 = 0$
$\alpha3a6 - a3\alpha6 = 0$

$\alpha1a6 - a1\alpha6 = 0$; d'où l'on tirera $\left\{\begin{matrix} a1 = 0, & a2 = b1, \\ \alpha1 = (b1)^2 & \alpha2 = 2b1b2 \end{matrix}\right.$
$\left.\begin{matrix} a3 = b2, & a4 = -c1b1, & a5 = -b1, & a6 = 0, \\ \alpha3 = (b2)^2 & \alpha4 = 0 & \alpha5 = 0 & \alpha6 = 0 \end{matrix}\right\}$ & l'intégrale
sera $m = \frac{b1\dot{x}\dot{y} + b2\dot{y}^2 - c1b1p\ddot{y} - b1x\ddot{y}}{(b1\dot{x} + b2\dot{y})^2}$, ou, en faisant
$c1 = 0$, $m = \frac{b1\dot{x}\dot{y} + b2\dot{y}^2 - b1x\ddot{y}}{(b1\dot{x} + b2\dot{y})^2}$; mais l'intégrale de cette même équation est par le premier cas, $n = \frac{p\ddot{y}}{(b1\dot{x} + b2\dot{y})^2}$; en prenant la valeur de $\ddot{y}$ dans l'une de ces deux intégrales, & la substituant dans l'autre, on aura l'équation $(nb1x + mp)(b1\dot{x} + b2\dot{y}) = p\dot{y}$, qui sera une des deux intégrales aux premières différences de l'équation
$\dddot{y} + \frac{-2b2\ddot{y}^2}{b1\dot{x} + b2\dot{y}} = 0$.

Mais je crois qu'en voilà assez pour faire entendre cette méthode-ci, & pour mettre les jeunes Géomètres en état de s'en servir. Nous avons vû qu'une équation aux premières différences, n'a qu'une seule intégrale; qu'une équation aux secondes différences, a deux intégrales aux premières différences, au moyen desquelles on auroit l'intégrale finie de cette équation; qu'une équation aux troisièmes différences, a trois intégrales aux secondes différences, au moyen desquelles on auroit l'intégrale finie de cette équation; qu'une équation aux qua-

VII.

Un point eſt ce que l'on conçoit dans l'eſpace n'avoir aucune étendue.

VIII.

Un point de matière eſt ce dont le lieu & le volume eſt un point.

IX.

La durée ſans commencement qui a précédé, & la durée ſans fin qui ſuivra le ſentiment que j'ai actuellement de moi, ſont ce que j'appelle le temps.

X.

Un inſtant eſt ce que l'on conçoit dans le temps n'avoir aucune durée.

XI.

Une portion quelconque de la durée, ou l'intervalle entre deux inſtans déterminés, ſe nomme un temps.

XII.

La manière d'être, ou l'état d'un corps dans l'eſpace, eſt d'y être en repos ou à une certaine diſtance du repos.

XIII.

L'on dit qu'un corps eſt en repos tant qu'il reſte dans le même lieu, & l'on dit qu'il eſt en mouvement, ou qu'il ſe meut, lorſque les lieux de ſon exiſtence ſe ſuccèdent conſécutivement l'un à l'autre, comme les inſtans de ſon exiſtence.

XIV.

Une direction eſt le prolongement de la diſtance des centres de deux points contigus.

XV.

On appelle vîteſſe d'un corps la diſtance où eſt ce corps d'être en repos.

XVI.

Un corps eſt d'autant plus éloigné d'être en repos, ou de réſider dans le même lieu, qu'il s'en éloignera davantage en moins de temps pendant qu'il perſévérera en l'état où il eſt.



PRINCIPES DE L'ART DE RÉSOUDRE LES PROBLÊMES SUR LE MOUVEMENT DES CORPS.

SECTION PREMIÉRE.

I.

L'ESPACE eſt cette étendue ou ce vuide ſans bornes, dans lequel nagent, pour ainſi dire, tous les corps qui compoſent l'Univers.

I I.

Tout ce qui exiſte dans l'eſpace & y remplit un lieu, ſe nomme matière.

I I I.

La maſſe d'un corps eſt la quantité de matière qui le compoſe.

I V.

La maſſe d'un corps eſt égale à ſon volume, moins celui de tous les vuides qui ſe trouvent entre ſes parties.

V.

J'appelle vuides dans un corps tout ce qui faiſant partie du volume d'un corps, ne ſe déplace pas lorſque le corps eſt déplacé.

V I.

Le lieu d'un corps eſt la partie de l'eſpace qu'il remplit au moment où je le conſidère.

Soit $\beta_4 = -\frac{1}{2}b_4$, $\beta_1 = 0$, $\beta_3 = 0$, on aura l'équation

$$\dddot{y} + \frac{b_1\dot{x}^2\ddot{y} + b_2\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b_3\dot{y}^2\ddot{y} \begin{array}{l} + b_4p\ddot{y}^2 \\ + b_5x \\ - 2b_3y \end{array}}{\begin{array}{l} - \frac{1}{2}b_4p\dot{y} \\ - \frac{1}{2}b_5x \\ + b_3y \end{array}} = 0;$$

qui sera toûjours intégrable par la première formule.

Soit $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, on aura $\beta_5 = -b_5$; $\beta_6 = -b_6$, l'équation sera

$$\dddot{y} + \frac{b_1\dot{x}^2\ddot{y} + b_2\dot{x}\dot{y}\ddot{y} + b_3\dot{y}^2\ddot{y} \begin{array}{l} + b_4p\ddot{y}^2 \\ + b_5x \\ + b_6y \end{array}}{\begin{array}{l} + \beta_1p\dot{x} \\ + \beta_2x \\ + \beta_3y \end{array} \begin{array}{l} + \beta_4p\dot{y} \\ - b_5x \\ - b_6y \end{array}} = 0, \text{ \& on aura}$$

$$\begin{array}{ll} a'1 = b_1 - \beta_2, & a^21 = \frac{1}{2}(b_2 + b_5 - \beta_3), \\ a'2 = b_3 + b_6 & a^22 = \beta_4 \\ a'3 = 0 & a^23 = 0 \\ a'4 = b_4 + \beta_4 & a^24 = 0 \\ a'5 = 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a^31 = \beta_1, & a^41 = \beta_2, & a^51 = \beta_3; \\ a^32 = -b_5 & a^42 = -b_6 & \\ a^33 = 0 & & \end{array}$$

& en substituant dans les conditions de la formule, on aura

$$2\beta_1(b_3 + b_6) - \beta_4(b_2 + b_5 - \beta_3) = 0,$$
$$2\beta_2(b_3 + b_6) + b_5(b_2 + b_5 - \beta_3) = 0,$$
$$\beta_2\beta_4 + b_5\beta_1 + (b_1 - \beta_2)(b_4 + \beta_4) = 0,$$
$$(b_2 + b_5 - \beta_3)(b_4 + \beta_4) = 0,$$
$$(b_3 + b_6)(b_4 + \beta_4) = 0,$$
$$2\beta_3(b_3 + b_6) + b_6(b_2 + b_5 - \beta_3) = 0,$$
$$\beta_3\beta_4 + \beta_1b_6 = 0, \quad -\beta_5\beta_3 + b_6\beta_2 = 0,$$
$$\beta_3(b_4 + \beta_4) = 0, \quad b_6(b_4 + \beta_4) = 0.$$

XXVI.

Tous les changemens qui peuvent arriver à l'état d'un corps dans l'espace, se réduisent à ce que ce corps se mouvant dans la direction *BC (fig. 2)* avec une vîtesse *AC*, arrivé au lieu *A*, se meuve dans la direction *AD* avec une vîtesse *AD*.

XXVII.

Dans ce cas, de toutes les directions au centre desquelles est le corps *A*, celle où se feroit le plus grand changement, c'est-à-dire, celle où il s'éloigneroit le plus de son état, est *AE (fig. 3)* parallèle & du même sens que *CD*; car si des points *C, D* l'on mène à *AE* les perpendiculaires *CF, DE*, l'on verra que la vîtesse de *A* dans la direction *AE*, qui, dans le premier état du corps dans l'espace étoit *AF*, dans celui-ci seroit *AE*, & que par conséquent la distance d'un état à l'autre dans cette direction, est *FE* ou *CD*; & si des mêmes points *C, D* l'on mène à une direction quelconque *Ae* les perpendiculaires *Cf, De*, l'on verra que la vîtesse de *A* dans la direction *Ae* qui étoit *Af*, seroit *Ae*, & que la distance du premier état au second dans cette direction, est $fe < CD$.

XXVIII.

De même que la vîtesse d'un corps dans une direction quelconque est égale au produit de sa vîtesse dans la direction où il se meut par le cosinus de l'angle que fait cette autre direction avec celle-ci, l'accroissement de vîtesse dans une direction quelconque est égal au produit de l'accroissement qui arrive dans la direction où se fait le plus grand accroissement par le cosinus de l'angle entre cette autre direction & celle-ci.

XXIX.

Il n'arrivera aucun changement à l'état d'un corps dans toutes les directions qui forment le plan perpendiculaire à celle où se fait le plus grand changement; les vîtesses du corps augmenteront dans toutes les directions au delà de ce plan, & elles diminueront dans toutes celles en deçà.

XXX.

Il faut une cauſe ou une force pour qu'un corps qui ſe mouvoit dans la direction *BC (fig. 4)* avec une vîteſſe *AC*, arrivé au lieu *A*, ſe meuve dans la direction *AD* avec une vîteſſe *AD*. Nous nommerons cette force *impulſion*, & nous concevrons qu'elle agit par un ſeul coup qu'elle frappe.

XXXI.

A eſt le lieu où le corps *A* doit recevoir ce coup.

XXXII.

AE, parallèle & du même ſens que *CD*, en eſt la direction.

XXXIII.

Il ne s'agit donc plus que d'en trouver la meſure.

XXXIV.

Nous avons vû qu'à chaque lieu où ſe trouve un corps, il a un état ou une vîteſſe décidée dans chacune des directions dont il eſt le centre. Prenez une de ces directions; je dis que la force de ce corps, pour perſévérer en ſon état dans cette direction, ou pour n'y être pas en l'état le plus prochain de celui où il y eſt, eſt comme ſa maſſe.

Tout corps a une force pour perſévérer en ſon état dans une direction quelconque, puiſque de lui-même il y perſévéreroit éternellement; cette force ne dépend ni de la direction ni de l'état du corps dans cette direction, puiſqu'il perſévéreroit également en toute autre direction & en tout autre état; il n'y a donc que ſa maſſe qui puiſſe en être la meſure. Nous nommerons cette force *inertie*, & nous dirons que l'inertie d'un corps eſt comme ſa maſſe.

XXXV.

La force d'un corps pour n'être pas dans l'une des directions dont il eſt le centre en tel état qu'on voudra aſſigner, eſt comme ſa maſſe & comme la diſtance de ce nouvel état au ſien.

Pour qu'un corps ſoit dans l'une des directions dont il eſt le centre en un état quelconque donné, ſon inertie doit être autant de fois vaincue qu'il y a d'états depuis celui de ce corps

jusqu'à celui qui est donné. Pour qu'un corps soit dans l'état le plus prochain de celui où il est, son inertie doit être vaincue une fois; pour qu'il soit dans celui d'ensuite, son inertie doit être vaincue deux fois; pour qu'il soit dans le troisième, son inertie doit être vaincue trois fois, & ainsi de suite, car encore que nous concevions que le passage d'un état à l'autre se feroit subitement, le corps doit toûjours être sensé avoir à passer par tous les états d'entre deux; par conséquent sa force, pour n'y être pas, est comme son inertie & comme le nombre d'états par où il auroit à passer pour y arriver, ou comme sa masse & comme la distance d'un état à l'autre.

XXXVI.

Je suppose un corps *A* se mouvant dans la direction *BC* (*fig. 5*) avec une vîtesse *AC*, sa force au lieu *A* pour ne pas se mouvoir dans la direction *AD* avec une vîtesse *AD*, est $= A.CD$.

XXXVII.

La direction de cette force opposée à celle de l'impulsion ou du coup qui la vaincroit, est $A\varepsilon$ opposée à *AE* qui est celle de ce coup, en supposant la ligne εAE parallèle à *CD*.

XXXVIII.

La force d'un corps en mouvement pour n'être pas en repos, est comme sa masse & comme sa vîtesse; la direction de cette force est la même que celle de la vîtesse du corps.

La force d'un corps en repos pour ne pas se mouvoir avec une vîtesse donnée, est pareillement comme sa masse & comme cette vîtesse, & la direction de cette force est en sens contraire à la vîtesse.

XXXIX.

Que la force $A.CD$ qu'a au lieu *A* dans la direction $A\varepsilon$, le corps *A* qui se meut dans la direction *BC* avec une vîtesse *AC* pour ne pas se mouvoir dans la direction *AD* avec une vîtesse *AD*, soit vaincue subitement par une impulsion égale & opposée, & le corps *A* se mouvera dans la direction *AD* avec une vîtesse *AD*.

XL.

Quel que ſoit l'état d'un corps dans l'eſpace, je peux au lieu où il ſe trouve, le ſuppoſer en tel autre état que je voudrai, & concevoir en même temps qu'en ce lieu il reçoit un coup qui le fait paſſer de l'état où je le ſuppoſe à celui où il eſt.

Le corps A ſe meut dans la direction BC avec une vîteſſe AC; au moment où il paſſe par le lieu A, je peux ſuppoſer qu'il ſe meut dans la direction AD avec une vîteſſe AD, & concevoir en même temps qu'il reçoit dans la direction $A\epsilon$ un coup $= A.CD$.

XLI.

Nous venons de démontrer que le corps A ſe mouvant dans la direction AC (*fig. 6*) avec une vîteſſe AC, & recevant au lieu A dans la direction AE un coup $= A.AE$, ſe mouvera dans la direction AD avec une vîteſſe AD, en ſuppoſant que $ACDE$ eſt un parallélogramme.

Au lieu de la vîteſſe qu'a au lieu A le corps A dans la direction AC où il ſe meut, je peux ſuppoſer ce corps en repos en ce lieu, & concevoir en même temps qu'il y reçoit dans la direction AC un coup $= A.AC$; par conſéquent l'effet de deux coups $A.AC$, $A.AE$, frappés en même temps ſur un corps en repos au lieu A, eſt le même que celui d'un ſeul coup $A.AD$ que recevroit ce corps en ce lieu, & réciproquement tout coup $A.AD$ pourra toûjours être regardé comme le réſultat de deux autres coups $A.AC$, $A.AE$.

XLII.

Dès que l'on ſait trouver l'effet de deux coups frappés en même temps ſur un corps en repos, l'on ſaura trouver l'effet de deux, de trois, de quatre coups, &c. frappés en même temps ſur un corps en repos ou en mouvement.

XLIII.

Frappez ſur un corps trois coups à la fois $A.AB$, $A.AC$, $A.AD$ (*fig. 7*), & vous ne changerez rien à l'état de ce corps dans l'eſpace, pourvû que $AB\delta C$ étant un parallélogramme, le prolongement $A\delta$ de la ligne AD ſoit $= AD$:

car

car un coup quelconque $A . AD$ de ces trois coups vaincra les deux autres coups $A . AB$, $A . AC$, car il vaincra le coup $A . A\delta$ qui en eſt le réſultat.

XLIV.

Le corps *A (fig. 8)* ſe meut dans la direction BC; trouver ſa force au lieu *A* dans une direction quelconque $A\varepsilon$ pour ne pas ſe mouvoir dans la direction AD.

Je prens AC pour repréſenter la vîteſſe du corps *A* dans la direction BC où il ſe meut, je mène CD parallèle à AE qui coupe AD au point D, & j'achève le parallélogramme $ACDE$; la force de *A* dans la direction $A\varepsilon$ eſt $= A . AE$.

XLV.

Si l'on ſait la direction où ſe mouvoit le corps *A* & ſa vîteſſe lorſqu'il a paſſé par le lieu *A*, & ſi l'on a la meſure & la direction de tous les coups qu'il a reçûs depuis en ſon chemin, quelque part qu'il ſoit, l'on ſaura la direction où il ſe meut & ſa vîteſſe, car cette vîteſſe & cette direction ſeront les mêmes que s'il avoit reçû tous ces coups à la fois au lieu *A*.

XLVI.

Je ſuppoſe que lorſque le corps *A* a paſſé par le lieu *A*, ſa vîteſſe, dans la direction AB *(fig. 9)* où il ſe mouvoit, étoit $= v$, & que les directions de tous les coups qu'il a reçûs depuis en ſon chemin, ont toûjours été parallèles à la ligne CAD ou DAC, quelque part qu'il ſoit.

Je dis que ſi l'on regarde la vîteſſe qu'il a actuellement dans la direction où il ſe meut, comme réſultante de deux autres vîteſſes, l'une parallèle à AB, & l'autre parallèle à la ligne CAD, celle parallèle à AB ſera $= v$, car elle ſera la même que ſi ce corps avoit reçû tous ces coups à la fois au lieu *A*.



SECTION DEUXIÉME.

I.

Au lieu de concevoir que la force Mv d'un corps M dont la vîteſſe dans l'une des directions dont il eſt le centre, eſt V, pour que ſa vîteſſe dans cette direction ne ſoit pas $V \pm v$, eſt vaincue ſubitement par une ſeule impulſion ou par un ſeul coup, l'on peut ſuppoſer une cauſe ou *force motrice*, telle qu'il faudroit, pour vaincre la force Mv, autant de coups de cette force motrice qu'il y a d'inſtans dans un temps t.

II.

La force que vaincroit chaque coup, & par conſéquent la meſure de la cauſe ou de la force motrice qui le frapperoit, eſt $= \frac{Mv}{t}$; car la force totale diviſée par le temps employé à la vaincre, exprime la force qui ſeroit vaincue à chaque inſtant ou à chaque coup, de même qu'une ſurface rectangle diviſée par ſa baſe, exprime la ligne qui l'a tracée.

III.

Si l'on diviſe le coup d'une force motrice par la maſſe du corps qui le reçoit, on aura le coup frappé ſur chaque point de matière de ce corps, & réciproquement, s'il y a une cauſe qui agiſſe dans l'intérieur des corps, & qui en anime à chaque inſtant toutes les parties également & parallèlement, en multipliant le coup que recevra chaque point d'un corps par la maſſe de ce corps, on aura le coup que recevra ce corps ou ſa force motrice. Cette cauſe que l'on conçoit agiſſant ſur tous les points matériels d'un corps, ſe nomme *force accélératrice:* nous la ſuppoſerons la même dans toute l'étendue des corps à chaque lieu par où ils paſſeront, & conſtante ou variable d'un lieu à un autre.

IV.

Nous connoiſſons pluſieurs forces motrices comme la pe-

ſanteur, les reſſorts, la réſiſtance des fluides, les frottemens, &c. il paroît même que la Nature n'en emploie point d'autres.

V.

Si un corps M en repos au lieu A (*fig.* 10) eſt livré aux coups continuels d'une force motrice conſtante p dans la direction AB, ce corps dans un temps t acquerra une vîteſſe v & parcourra un eſpace $AM = x$.

On aura $p = \frac{M\dot{v}}{\dot{t}}$ & $v = \frac{\dot{x}}{\dot{t}}$, donc $\frac{p\dot{t}}{M} = \frac{\dot{x}}{\dot{t}}$, en intégrant & rempliſſant la condition que t & x ſoient $= 0$ en même temps, on aura $p = \frac{2Mx}{t^2}$, en égalant les deux valeurs de p, on aura $v = \frac{2x}{t}$.

VI.

Pour pouvoir déterminer la route que ſuivra un corps qui part d'un lieu donné, avec une vîteſſe & ſuivant une direction données, ſa vîteſſe à chaque lieu de cette route, & le temps qu'il mettra à y arriver, il faut qu'à chaque lieu de l'eſpace par où l'on ſuppoſera que devra paſſer ce corps, l'on ait l'expreſſion de toutes les forces accélératrices qui y agiront ſur lui, & les directions de ces forces.

VII.

L'effet de deux forces motrices $A \cdot AB$, $A \cdot AC$, ſera le même que celui d'une ſeule $A \cdot AD$, en ſuppoſant que $ABDC$ (*fig.* 11) eſt un parallélogramme, & réciproquement toute force motrice $A \cdot AD$ pourra toûjours être priſe pour le réſultat de deux autres $A \cdot AB$, $A \cdot AC$.

VIII.

Pour qu'à un inſtant quelconque réponde un coup frappé ſur un corps par une force motrice, il faut que cette force agiſſe ſur ce corps dans tous les points de la ligne infiniment petite du ſecond ordre qu'il parcourra dans cet inſtant.

IX.

Soit AB (*fig.* 12) la direction où ſe meut le corps M;

à chaque point M de cette direction, je mène une perpendiculaire MP pour repréſenter la force motrice à ce point, ou le coup qu'y recevroit à chaque inſtant dans la direction MB, un corps qui y ſeroit retenu. Soit la vîteſſe qu'avoit le corps M en partant du point $A = V$, celle qu'il a en $M = V + v$, $AM = s$, $MP = f$, le temps que ce corps a employé à parcourir $AM = t$, l'aire $AMPC = W$, $Mm = ds$, le temps que le corps emploie à parcourir $Mm = dt$, ſa vîteſſe en $m = V + v + dv$; on aura $f = \frac{Mdv}{dt}$, $V + v = \frac{ds}{dt}$, $dW = fds$, donc $dW = M\,(Vdv + Vdv)$. En intégrant & rempliſſant la condition que W & v ſoient $= o$ en même temps, on aura $W = M\,(Vv + \frac{1}{2}v^2)$.

X.

Soit, par exemple, $V = o$, on aura $W = \frac{1}{2}Mv^2$; ſoit $v = - V$, on aura $W = - \frac{1}{2}Mv^2$. W exprime la ſomme des forces motrices que le corps M a rencontrées de A en M, & qui toutes ont fait impreſſion ſur lui dans la direction MB, plus ou moins ſuivant leur intenſité & ſuivant qu'il a paſſé plus ou moins vîte par le lieu de ces forces; par conſéquent la ſomme des forces motrices qu'il eſt néceſſaire qu'un corps M rencontre, & qui faſſent impreſſion ſur lui avant qu'il paſſe de la vîteſſe o à la vîteſſe v, eſt $= \frac{1}{2}Mv^2$; & la ſomme des forces motrices qu'il eſt néceſſaire que ce même corps M rencontre, & qui agiſſent ſur lui avant qu'il paſſe de la vîteſſe v à la vîteſſe o, eſt auſſi $= \frac{1}{2}Mv^2$.

X I.

Cette néceſſité qu'il y a que la ſomme des forces motrices que le corps M rencontrera, & qui feront impreſſion ſur lui dans la direction BA, avant qu'il paſſe de la vîteſſe v à la vîteſſe o, ſoit $= \frac{1}{2}Mv^2$, peut être attribuée à un pouvoir qui eſt dans ce corps: l'on peut appeler ce pouvoir ſa force vive, & dire que la force vive d'un corps M dont la vîteſſe eſt v, pour que ſa vîteſſe ne ſoit pas o, eſt $= \frac{1}{2}Mv^2$,

ou qu'elle eſt comme ſa maſſe & comme le quarré de ſa vîteſſe.

XII.

La ſomme des coups qu'il faut que reçoive une maſſe M dont la vîteſſe dans une des directions au centre deſquelles il eſt, eſt V, pour que ſa vîteſſe dans cette direction devienne $V + v$, eſt $= Mv$; & la ſomme des forces motrices à travers deſquelles il eſt néceſſaire que paſſe cette maſſe pour que cela arrive, eſt $= M\,(Vv + \frac{1}{2}v^2)$.

XIII.

En général, la force d'un corps M qui ſe meut parallèlement à MA (*fig.* 13) avec une vîteſſe v, pour ne pas ſe mouvoir parallèlement à MB avec une vîteſſe u, eſt $= M\,\sqrt{(v^2 - 2vu \text{ coſ. } AMB + u^2)}$ & ſa force vive eſt $= \frac{1}{2}M\,(v^2 - 2vu \text{ coſ. } AMB + u^2)$. La direction de ces deux forces eſt AC oppoſée à AB, en ſuppoſant $MA : MB :: v : u$.

XIV.

Dans l'eſtimation de la force des corps nous prenons l'inſtant pour l'unité, & dans celle de leur force vive c'eſt le point que nous prenons pour l'unité.

XV.

Je ſuppoſe un corps M ſe mouvant dans la direction AB (*fig.* 14) avec une vîteſſe v, & je demande quelle ſera ſa force dans la direction $M\varepsilon$, lorſqu'il paſſera par le lieu M, pour ne pas ſe mouvoir dans la direction d'un cercle décrit du centre C & du rayon CM perpendiculaire à AB, ou, ce qui revient au même, quelle eſt la force motrice dans la direction ME qui, frappant ce corps lorſqu'il paſſera par le lieu M, le feroit paſſer de la direction AB à celle de ce cercle.

Je conçois qu'auſſi-tôt que le corps M aura atteint le point M, il ne ceſſera d'être livré à l'action de forces motrices agiſſant toutes parallèlement à εE, & je ſuppoſe ces forces motrices telles que le corps M qui commencera en

M de se mouvoir dans la circonférence $M m \mu$, continuera de tracer cette circonférence.

Je le suppose arrivé en m; je mène $m Q$ & μq parallèles à $E \epsilon$ qui coupent la direction $A B$ aux points Q, q. Je mène $m R$ parallèle à $A B$ qui coupe μq en R.

Je fais $MQ = x$, $Qm = y$, $Qq = mR = \dot{x}$, $R\mu = \dot{y}$, la force motrice au lieu $m = f$, on aura la vîtesse de M au lieu m dans la direction $mR = v$; le temps que le corps M emploiera à parcourir $m\mu = \frac{\dot{x}}{v}$; sa vîtesse dans la direction $Qm = \frac{\dot{y}}{\left(\frac{\dot{x}}{v}\right)} = \frac{v\dot{y}}{\dot{x}}$; par conséquent on aura $f = M \frac{d\left(\frac{v\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\left(\frac{\dot{x}}{v}\right)}$, ou parce que la vîtesse v est constante, $f = Mv^2 \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}}$. Il s'agit d'avoir l'expression de $\frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}}$; $M m \mu$ étant un cercle dont le rayon $= r$, & l'angle AME étant $= a$, on aura
$x^2 \text{ray.}\, a - 2xy \text{ cos.}\, a + y^2 \text{ray.}\, a = 2ry \text{ sin.}\, a$, & l'on trouvera $\frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{\dot{x}} = \frac{r^2 \text{ray.}\, a\, (\text{sin.}\, a)^2}{(r \text{ sin.}\, a + x \text{ cos.}\, a - y \text{ ray.}\, a)^3}$;
donc $f = Mv^2 \frac{r^2 \text{ray.}\, a\, (\text{sin.}\, a)^2}{(r \text{ sin.}\, a + x \text{ cos.}\, a - y \text{ ray.}\, a)^3}$.

Soit $x = 0$, y sera aussi $= 0$, & on aura la force du corps M au lieu M dans la direction $M\epsilon = \frac{Mv^2 \text{ray.}\, a}{r \text{ sin.}\, a}$;
C. Q. F. T,

XVI.

Soit a un angle droit, on aura la force de M dans la

direction $M\gamma$ perpendiculaire à AB, c'est-à-dire, la force centrifuge de $M = \frac{Mv^2}{r}$.

XVII.

L'on me donne la courbe BMD (*fig. 15*) que trace un corps M, & le point F vers lequel sont dirigées toutes les forces motrices qui retiennent ce corps dans cette courbe, & l'on demande l'expression de la force motrice à chaque point M de cette courbe.

Soit C le centre, & CM le rayon du cercle de même courbure que la courbe en M, en faisant la vîtesse au point $M = v$, $MC = r$, $MF = e$, $FE = p$, $ME = N$, la force motrice dans la direction MF sera $= \frac{Mev^2}{pr}$.

Il ne s'agit donc que d'avoir l'expression de v.

Au lieu du coup que reçoit le corps M dans la direction MF, l'on peut supposer qu'il en reçoit deux autres, l'un dans la direction MC, & l'autre dans la direction ME, on aura $e : n :: \frac{Mev^2}{pr} : \frac{Mnv^2}{pr} =$ le coup dans la direction ME.

Soit le petit côté Mm de la courbe $= \dot{f}$, on aura $\frac{-Mnv^2}{pr} = \frac{M\dot{v}}{\left(\frac{\dot{f}}{v}\right)}$, ou $\frac{-n}{p}\frac{\dot{f}}{r} = \frac{\dot{v}}{v}$; mais $\frac{\dot{f}}{r} = \frac{\dot{p}}{n}$; donc $\frac{-\dot{p}}{p} = \frac{\dot{v}}{v}$; en intégrant, on aura $v = \frac{A}{p}$; donc la force dans la direction $MF = \frac{MA^2e}{p^3r}$.

XVIII.

Trouver le mouvement d'un corps autour d'un point qui l'attire.

Soit P (*fig. 16*) le corps dont il s'agit, & F le point qui attire ce corps.

Soit A le lieu d'où eſt parti le corps P, & AB ſa vîteſſe & ſa direction en partant de A. Je mène FA, FP.

Soit l'angle $AFP = x$, $FP = y$, l'arc AP de la courbe $APp\pi$ que trace le corps $= s$, l'angle $PFp = dx$, on aura $Pp = ds$, $PR = ydx$, $Rp = dy$, & $ds^2 = y^2 dx^2 + dy^2$.

Soit la vîteſſe angulaire du rayon vecteur $FP = V$, la vîteſſe de P autour de F ſera $= yV$.

Soit le temps que le corps P a employé à parcourir l'arc $AP = t$, on aura $dt = \frac{dx}{V}$.

Soit la vîteſſe de P le long de $FP = v$, on aura $v = \frac{dy}{\left(\frac{dx}{V}\right)} = \frac{Vdy}{dx}$.

La force centrifuge de P eſt $= PyV^2$.

Soit la force motrice vers $F = P\varphi$,

on aura $yV^2 - \varphi = \frac{dv}{\left(\frac{dx}{V}\right)} = \frac{d\left(\frac{Vdy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{V}\right)}$, ou

$\varphi dy + \frac{1}{2} d\left(\frac{dy^2}{dx^2} - y^2\right) V^2 + \frac{dy^2}{dx^2} VdV = 0$.

Le corps P arrivé en p continueroit de ſe mouvoir dans la direction Pp avec la vîteſſe avec laquelle il vient de parcourir le petit côté Pp.

Soit pl la ligne qu'il parcourroit dans le ſecond inſtant, on aura $ds : pl :: \frac{dx}{V} : \frac{dx'}{V'}$ ou $ds : pl - ds :: \frac{dx}{V} : d\left(\frac{dx}{V}\right)$; donc $pl = ds + \frac{Vds}{dx} d\left(\frac{dx}{V}\right)$. Mais à cauſe de la force motrice vers F, le corps P a auſſi en même temps une petite vîteſſe vers ce point $= \varphi' \frac{dx'}{V'}$.

Soit

Soit pm la petite ligne que lui feroit parcourir cette viteſſe [redacted]s le temps qu'il parcourroit pl, on aura

[redacted] $= \varphi' \frac{dx'}{V'} \cdot \frac{dx'}{V'} = \varphi \frac{dx^2}{V^2} + d(\frac{\varphi dx^2}{V^2}) = \frac{\varphi dx^2}{V^2}$.

[redacted]oint l je mène $l\pi$ égal & parallèle à pm, & le corps P p[redacted]a dans le ſecond inſtant la diagonale $p\pi$ du parallélogr[redacted]m.

Du c[redacted] & du rayon $p\pi$, je décris le petit arc πn; j'aurai ln [redacted] $p\pi = - dds + \frac{Vds}{dx} d(\frac{dx}{V})$, & au moyen [redacted]gles ſemblables PpR, $l\pi n$, j'aurai $ds : dy :: \frac{\varphi d}{V^2}$ [redacted] $dds + \frac{Vds}{dx} d(\frac{dx}{V})$, ou $\varphi dy + \frac{1}{2} d(\frac{ds^2}{dx^2})$[redacted]$\frac{ds^2}{} VdV = 0$.

Je ſuppoſe que φ ne[redacted] [illegible]e de y; en intégrant, j'aurai $\int \varphi dy + \frac{ds^2}{2dx^2} V$[redacted] [illegible]

En égalant les deux valeurs de φ[redacted] [illegible] $\frac{1}{2} d(\frac{ds^2}{dx^2}) V^2 + \frac{ds^2}{dx^2} VdV = \frac{1}{2} d(\frac{dy^2}{dx^2} -$ [illegible] $\frac{dy^2}{} VdV$, ou $d(y^2)V + y^2 dV = 0$; & e[illegible]n aura $Vy^2 = B$, ou $V = \frac{B}{y^2}$. En ſubſti[illegible]eur de V, on aura $\int \varphi dy + \frac{y^2dx^2 + dy^2}{2dx^2} \cdot \frac{B}{y^4}$ [illegible]

$$dx = \frac{Bdy}{y^2 \sqrt{(2A - 2\int\varphi dy - \frac{B^2}{y^2})}}.$$

$$v = \sqrt{(2A - 2\int\varphi dy - \frac{B^2}{y^2})}, \quad dt = \frac{y^2 dx}{B};$$

donc $dt = \frac{2}{B} \cdot PpF$; donc $t = \frac{2}{B} \cdot APF$; la vîteſſe de P dans la courbe APp où il ſe meut, $= \sqrt{(2A - 2\int\varphi dy)}$.

. Sſ

XIX.

Le corps P pourroit se mouvoir dans la courbe $APp\pi$ pendant que le plan BAF, sur lequel est tracée cette courbe, tourneroit autour de l'axe F perpendiculaire à ce plan, comme il s'y meut lorsque ce plan est en repos.

Pour cela, il faut 1.° que la vîtesse angulaire du plan BAF autour de l'axe F soit $= \frac{C}{y^2}$, afin que celle du rayon vecteur FP soit $= \frac{B+C}{y^2}$.

2.° Lorsque le plan BAF ne tourne pas, la force centrifuge de P est $= \frac{B^2}{y^3}$, & la force vers F est $= \varphi$.

Lorsque ce plan tournera, la force centrifuge de P sera $= \frac{(B+C)^2}{y^3}$. Soit la force vers $F = \Phi$, on aura $\frac{B^2}{y^3} - \varphi = \frac{(B+C)^2}{y^3} - \Phi$, ou $\Phi = \varphi + \frac{(B+C)^2 - B^2}{y^3}$.

XX.

Soit $\varphi = \frac{m}{y^2}$, & supposons que la courbe APp (*fig. 17*) coupe perpendiculairement les deux rayons vecteurs a & $a+b$, c'est-à-dire, que v est $= 0$ à ces deux distances, on aura $\sqrt{(2A + \frac{2m}{a} - \frac{B^2}{a^2})} = 0$, & $\sqrt{(2A + \frac{2m}{a+b} - \frac{B^2}{(a+b)^2})} = 0$;

donc $B^2 = \frac{2ma(a+b)}{2a+b}$, $2A = \frac{-2m}{2a+b}$;

$$\text{donc } dx^2 = \frac{\frac{2ma(a+b)}{2a+b}dy^2}{y^4(-\frac{2m}{2a+b} + \frac{2m}{y} - \frac{2ma(a+b)}{(2a+b)y^2})},$$

ou $dx^2 = \frac{a^2(a+b)^2 dy^2}{y^4\left(-a(a+b)+\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}-\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right)}$.

Soit $FA = a$; du centre F & du rayon FA ſoit décrit le cercle ANn qui coupe le rayon vecteur FP au point N; ſoit mené NQ perpendiculaire à FA, & ſoit $AQ = z$, on aura $dx = \frac{dz}{\sqrt{(2az - z^2)}}$;

donc $\frac{dz^2}{2az - z^2} = \frac{a^2(a+b)^2 dy^2}{y^4\left(-a(a+b)+\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}-\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right)}$,

ou $\frac{dz^2}{z^2 - 2az} = \frac{a^2(a+b)^2 dy^2}{y^4\left(a(a+b)-\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}+\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right)}$,

ou $\frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 2az)}} = \frac{a(a+b)dy}{y^2\sqrt{\left(a(a+b)-\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}+\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right)}}$;

en intégrant, on aura $lD + l[z - a + \sqrt{(z^2 - 2az)}] = l\left[2a+b-\frac{2a(a+b)}{y}+2\sqrt{\left[a(a+b)-\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}+\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right]}\right]$

ou $D[z - a + \sqrt{(z^2 - 2az)}] = 2a + b - \frac{2a(a+b)}{y} + 2\sqrt{\left[a(a+b)-\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}+\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right]}$.

Je veux que $y = a$, lorſque $z = 0$, & je trouve $D = \frac{b}{a}$; donc $b(z-a) + b\sqrt{(z^2 - 2az)} = a(2a+b) - \frac{2a^2(a+b)}{y} + 2a\sqrt{\left[a(a+b)-\frac{a(a+b)(2a+b)}{y}+\frac{a^2(a+b)^2}{y^2}\right]}$.

En faiſant diſparoître les radicaux de cette équation, on aura $y = \frac{2a^2(a+b)}{a(2a+b)+b(a-z)}$, & l'on verra que la courbe $APp\pi$ eſt une ellipſe dont F eſt un des foyers, & dont le

grand axe eſt $= 2a + b$; le petit eſt $= 2\sqrt{[a(a+b)]}$.

XXI.

Nous avons nommé t le temps que le corps P emploie à parcourir l'arc AP, & nous avons trouvé $t = \frac{2}{B} . APF$; donc ici, en mettant pour B ſa valeur, $t = 2\sqrt{\left(\frac{2a+b}{2ma(a+b)}\right)} . APF$.

Soit T le temps que le corps P emploie à faire une révolution entière, on aura $T =$ le produit de $2\sqrt{\left(\frac{2a+b}{2ma(a+b)}\right)}$ par l'aire entière de l'ellipſe; mais l'aire d'une ellipſe eſt comme le produit de ſes deux axes, c'eſt-à-dire, qu'en prenant E pour un nombre déterminé, l'aire d'une ellipſe eſt $= E(2a+b)\, 2\sqrt{[a(+b)]}$; donc $T = 2\sqrt{\frac{2a+b}{2ma(a+b)}}$ $2E(2a+b)\sqrt{[a(a+b)]} = \frac{4E}{\sqrt{(2m)}}(2a+b)^{\frac{3}{2}}$.

XXII.

Je ſuppoſe un corps P ſe mouvant autour d'un point F dans un orbe preſque circulaire, & que l'on me donne l'expreſſion de la force vers F qui retient ce corps dans cet orbe, il faut trouver le mouvement des abſcides.

Je conçois qu'en vertu de la force vers F le corps P ſe meut dans une ellipſe pendant que le plan, ſur lequel eſt tracée cette ellipſe, tourne autour de l'axe F, comme il s'y mouveroit ſi le plan ſur lequel elle eſt tracée, étoit en repos, & que la force vers F fût telle qu'il faudroit.

Soit F un des foyers de l'ellipſe dans laquelle nous concevons que ſe meut le corps P, a la moindre, & $a + b$ la plus grande diſtance du foyer F à l'ellipſe; ſoit $FP = y$, & ſoit la force vers F qui retiendroit le corps P dans cette ellipſe, ſi le plan ſur lequel elle eſt tracée ne tournoit pas autour de $F = \frac{m}{y^2}$, la vîteſſe angulaire de FP dans le plan,

ſera $= \frac{\sqrt{\left(\frac{2ma(a+b)}{2a+b}\right)}}{y^2}$. Soit la vîteſſe angulaire du plan $= \frac{C}{y^2}$, la force qui retiendra le corps P dans l'ellipſe pendant que le plan ſur lequel elle eſt tracée tournera autour de F, & par conſéquent la force qui le retient dans l'orbe qu'il trace dans l'eſpace abſolu,

eſt $= \frac{m}{y^2} + \frac{2C\sqrt{\left(\frac{2ma(a+b)}{2a+b}\right)} + C^2}{y^3}$, ou

$= \frac{my + 2C\sqrt{\left(\frac{2ma(a+b)}{2a+b}\right)} + C^2}{y^3}$, ou, en mettant au numérateur de cette formule $a + u$ au lieu de y,

$= \frac{ma + mu + 2C\sqrt{\left(\frac{2ma(a+b)}{2a+b}\right)} + C^2}{y^3}$.

Il faut donc faire en ſorte que cette force-ci ſoit la même que celle qui eſt donnée.

Soit, par exemple, la force donnée $= \mu y^{e-3} = \frac{\mu y^e}{y^3}$

$= \frac{\mu(a+u)^e}{y^3} = \frac{\mu a^e + e\mu a^{e-1}u + \frac{e(e-1)}{2}\mu a^{e-2}u^2 + \&c.}{y^3}$

En rempliſſant la condition que l'orbe dans lequel ſe meut le corps P, eſt preſque circulaire, c'eſt-à-dire, que les lignes b & u ſont très-petites, la première de ces deux formules ſera $= \frac{ma + mu + 2C\sqrt{(ma)} + C^2}{y^3}$, la ſeconde ſera $= \frac{\mu a^e + e\mu a^{e-1}u}{y^3}$; & on aura

$ma + 2C\sqrt{(ma)} + C^2 = \mu a^e$, $m = e\mu a^{e-1}$;

donc $C^2 + 2\sqrt{(e\mu a^e)}C + e\mu a^e = \mu a^e$, ou

$C + \sqrt{(e\mu a^e)} = \sqrt{(\mu a^e)}$.

La vîteſſe angulaire du plan ſur lequel nous ſuppoſons que ſe meut le corps P eſt donc $= \frac{\surd(\mu a^e)(1 - \surd e)}{y^2}$; celle du rayon vecteur FP dans ce plan eſt $= \frac{\surd(\mu a^e)\surd e}{y^2}$.

Soient $d\alpha$ & dx les angles d'un même inſtant en vertu de ces vîteſſes, on aura $d\alpha : dx :: \frac{\surd(\mu a^e)(1 - \surd e)}{y^2} : \frac{\surd(\mu a^e)\surd e}{y^2}$ ou $d\alpha = \frac{1 - \surd e}{\surd e} dx$; en intégrant & en rempliſſant la condition que α & x ſoient $= 0$ en même temps, on aura $\alpha = \frac{1 - e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} x$.

Suppoſons que lorſque le corps P eſt parti de l'abſcide ſupérieure, le lieu de cette abſcide étoit A, & que lorſqu'il y revient, ſon lieu eſt A'. Je fais $x = 360^d$; j'aurai l'angle $AFA' = \frac{1 - e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} . 360^d$

Soit la force donnée $= \frac{\mu y^e + \nu y^\partial}{y^3} = \frac{\mu(a+u)^e + \nu(a+u)^\partial}{y^3}$

$$= \frac{\mu a^e + e\mu a^{e-1}u + \nu a^\partial + \partial\nu a^{\partial-1}u}{y^3},$$

on aura $[C + \surd(ma)]^2 = \mu a^e + \nu a^\partial$,

$$m = e\mu a^{e-1} + \partial\nu a^{\partial-1};$$

donc $C + \surd(e\mu a^e + \partial\nu a^\partial) = \surd(\mu a^e + \nu a^\partial)$. La vîteſſe angulaire du plan ſur lequel nous ſuppoſons que ſe meut le corps P, eſt donc $= \frac{\surd(\mu a^e + \nu a^\partial) - \surd(e\mu a^e + \partial\nu a^\partial)}{y^2}$; celle du rayon vecteur FP dans ce plan, eſt $= \frac{\surd(e\mu a^e + \partial\nu a^\partial)}{y^2}$; par conſéquent l'angle AFA'

eſt $= \frac{\surd(\mu a^e + \nu a^\partial) - \surd(e\mu a^e + \partial\nu a^\partial)}{\surd(e\mu a^e + \partial\nu a^\partial)} . 360^d$

XXIII.

Trouver le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement & qui partent de lieux donnés avec des vîtesses & suivant des directions données.

Soient L & T (*fig. 18*) les deux corps dont il s'agit.

Je suppose 1.° que ces deux corps se meuvent sur un même plan.

Je mène la ligne LT que je prolonge indéfiniment au delà des points L & T.

Soit $ACc\gamma B$ la courbe que touche continuellement le rayon vecteur CTL.

Je fais $CT = r$, $CL = R$, $Cc = ds$, $ct = r'$, $cl = R'$, Nt sera $= ds + dr$, $Ml = ds + dR$.

Soit l'angle $LCl = dx$, TN sera $= rdx$, LM sera $= Rdx$.

Soit $Ll = dp$, $Tt = dq$, on aura $dp^2 = (ds + dR)^2 + R^2 dx^2$, $dq^2 = (ds + dr)^2 + r^2 dx^2$.

Soit la vîtesse angulaire du rayon vecteur $CTL = V$, l'élément du temps sera $= \frac{dx}{V}$; la vîtesse de T autour de C sera $= rV$, celle de L aussi autour de C sera $= RV$. La vîtesse de T le long du rayon vecteur sera $= \frac{(ds + dr)V}{dx}$; celle de L sera $= \frac{(ds + dR)V}{dx}$.

Soit la force qui meut les corps L & T l'un vers l'autre $= \varphi$, la force qui accélèrera T vers L, sera $= \frac{\varphi}{T}$, celle qui accélèrera L vers T, sera $= \frac{\varphi}{L}$.

La force centrifuge de T est $= rV^2$, celle de L est $= RV^2$; on aura donc $(rV^2 + \frac{\varphi}{T})\frac{dx}{V} = d(\frac{(ds + dr)V}{dx})$ & $(RV^2 - \frac{\varphi}{L})\frac{dx}{V} = d(\frac{(ds + dR)V}{dx})$.

Les corps L & T étant arrivés en l & en t, s'ils étoient laissés à eux-mêmes, continueroient de se mouvoir dans les directions Ll, Tt. Je suppose que dans le second instant ils iroient en a & en b, on aura $\frac{dx}{V} : \frac{dx'}{V'} :: dp : la$ ou $\frac{dx}{V} : d(\frac{dx}{V}) :: dp : la - dp$; donc $la = dp + \frac{Vdp}{dx} d(\frac{dx}{V})$; par la même raison $tb = dq + \frac{Vdq}{dx} d(\frac{dx}{V})$.

Mais à cause de la force qui accélère l vers t, ce corps a aussi en même temps une petite vîtesse vers ce point $= \frac{\varphi'}{L} . \frac{dx'}{V'}$ qui lui feroit parcourir dans le second instant une petite ligne $= \frac{\varphi'}{L} \frac{dx'}{V'} . \frac{dx'}{V'} = \frac{\varphi dx^2}{LV^2} + d(\frac{\varphi dx^2}{LV^2}) = \frac{\varphi dx^2}{LV^2}$; & à cause de la force qui accélère t vers l, le corps T a une petite vîtesse vers l qui lui feroit parcourir dans le second instant une petite ligne $= \frac{\varphi dx^2}{TV^2}$.

Soit $a\lambda = \frac{\varphi dx^2}{LV^2}$ & parallèle à lt, & $b\theta = \frac{\varphi dx^2}{TV}$ & parallèle à tl, le corps l parcourra $l\lambda$, & le corps t parcourra $t\theta$.

Du centre l & du rayon $l\lambda$, soit décrit le petit arc λe, & du centre t & du rayon $t\theta$, soit décrit le petit arc θf, les triangles semblables λae, LMl & θfb, TNt, donneront $\frac{\varphi dx^2}{LV^2} : - ddp + \frac{Vdp}{dx} d(\frac{dx}{V}) :: dp : ds + dR$ & $\frac{\varphi dx^2}{TV} : ddq - \frac{Vdq}{dx} d(\frac{dx}{V}) : dq : ds + dr$, & par conséquent $\frac{\varphi dx^2}{LV^2}(ds + dR) = - dpddp + \frac{Vdp^2}{dx} d(\frac{dx}{V})$ & $\frac{\varphi dx^2}{TV^2}(ds + dr) = dqddq - \frac{Vdq^2}{dx} d(\frac{dx}{V})$.

Voilà

Voilà toutes les équations de notre Problème trouvées; voyons ce que nous pourrons en tirer.

1.re Équ.on $\frac{2\varphi}{T}(ds + dr) = d\left(\frac{V^2(ds + dr)^2}{dx^2}\right) - 2rV^2(ds + dr)$.

2.me Équ.on $\frac{2\varphi}{L}(ds + dR) = -d\left(\frac{V^2(ds + dR)^2}{dx^2}\right) + 2RV^2(ds + dR)$.

3.me Équ.on $\frac{2\varphi}{T}(ds + dr) = d\left(\frac{V^2(ds + dr)^2}{dx^2} + r^2V^2\right)$.

4.me Équ.on $\frac{2\varphi}{L}(ds + dR) = -d\left(\frac{V^2(ds + dR)^2}{dx^2} + R^2V^2\right)$.

Au moyen de la première & de la troisième, on aura $rdV + 2Vdr + Vds = 0$; au moyen de la seconde & de la quatrième, on aura $RdV + 2VdR + Vds = 0$. Donc $ds = \frac{2(rdR - Rdr)}{R - r}$ & $\frac{dV}{V} = \frac{-2(dR - dr)}{R - r}$; en intégrant cette dernière équation, on aura $V = \frac{B}{(R - r)^2}$, & l'élément du temps sera $= \frac{2}{B} \cdot \frac{(R - r)^2 dx}{2}$.

Au moyen de la première & de la seconde équation, on aura $\frac{Td\left(\frac{V^2(ds + dr)^2}{dx^2}\right)}{ds + dr} + \frac{Ld\left(\frac{V^2(ds + dR)^2}{dx^2}\right)}{ds + dR}$ $= 2(Tr + LR)V^2$.

Divisons par V, & multiplions par dx, nous aurons

$$\frac{Td\left(\frac{V^2(ds + dr)^2}{dx^2}\right)}{\frac{V(ds + dr)}{dx}} + \frac{Ld\left(\frac{V^2(ds + dR)^2}{dx}\right)}{\frac{V(ds + dR)}{dx}}$$

$= (Tr + LR)Vdx$.

Mettons pour V & pour ds leurs valeurs, nous aurons

Tt

$$Td\left(\frac{2rdR - Rdr - rdr}{(R-r)^3 dx}\right) - Ld\left(\frac{2Rdr - rdR - RdR}{(R-r)^3 dx}\right)$$
$$= \frac{(Tr + LR)dx}{(R-r)^2}.$$

Soit dx conſtant, nous aurons

$$d\left(\frac{T(2rdR - Rdr - rdr) - L(2Rdr - rdR - RdR)}{(R-r)^3}\right) = \frac{(Tr + LR)dx^2}{(R-r)^2}$$

Mais $\frac{T(2rdR - Rdr - rdr) - L(2Rdr - rdR - RdR)}{(R-r)^3} = - d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)$;

donc $dd\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right) + \left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)dx^2 = 0$.

Multiplions par $d\left(\frac{Tr + LR.}{(R-r)^2}\right)$, nous aurons

$d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right) . dd\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right) + \left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right). d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right) dx^2 = 0$; & en intégrant, nous aurons

$\left[d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)\right]^2 + \left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)^2 dx^2 = \frac{dx^2}{a^2}$, ou

$$dx = \frac{a(R-r)^2 d\left(\frac{Tr + LR}{(R-r)^2}\right)}{\sqrt{[(R-r)^4 - a^2(Tr + LR)^2]}}.$$

Au moyen de la 3.e & de la 4.e on aura $2\varphi(dR - dr) + Td\left(\frac{V^2(ds+dr)^2}{dx^2} + r^2V^2\right) + Ld\left(\frac{V^2(ds+dR)^2}{dx^2} + R^2V^2\right) = 0$,

& en intégrant, on aura $2\int\varphi(dR - dr) + \frac{TV^2(ds+dr)^2}{dx^2} + Tr^2V^2 + \frac{LV^2(ds+dR)^2}{dx^2} + LR^2V^2 = A$; donc

$$dx^2 = \frac{B^2[T(2rdR - Rdr - rdr)^2 + L(2Rdr - rdR - RdR)^2]}{(R-r)^2[A(R-r)^4 - 2(R-r)^4\int\varphi(dR-dr) - B^2(Tr^2 + LR)^2]}.$$

Je ſuppoſe que φ ne dépend que de la diſtance TL des deux corps ; je fais $TL = y$, & je ſubſtitue pour R ſa valeur $y + r$ dans les deux équations $dx^2 = \frac{a^2(R-r)^4\left[d\left(\frac{Tr+LR}{(R-r)^2}\right)\right]^2}{(R-r)^4 - a^2(Tr+LR)^2}$,

$$dx^2 = \frac{B^2[T(2rdR - Rdr - rdr)^2 + L(2Rdr - rdR - RdR)^2]}{(R-r)^2[A(R-r)^4 - 2(R-r)^4\int\varphi(dR - dr) - B^2(Tr^2 + LR)^2]}.$$

Il arrivera qu'en multipliant la première par B^2, & la ſeconde par $a^2(T+L)$, tous les termes où ſe trouveront r & dr, ſeront les mêmes dans les deux équations, & qu'on aura

$$dx = \frac{Bdy}{y^2 V\left(\frac{a^2A(T+L) - B^2}{a^2TL} - 2\int\frac{(T+L)\varphi dy}{TL} - \frac{B^2}{y^2}\right)}.$$

La vîteſſe de L autour de T ſera $= \frac{B}{y}$; ſa vîteſſe par rapport à T le long du rayon vecteur ſera

$$= V\left(\frac{a^2A(T+L) - B^2}{a^2TL} - 2\int\frac{(T+L)\varphi dy}{TL} - \frac{B^2}{y^2}\right);$$

ainſi le corps L ſe mouvera par rapport au corps T, comme ſi le corps T étoit en repos, & que la force motrice de L vers T fût $= \frac{(T+L)\varphi}{T}$.

Soit G le point qui partage TL, de manière que $GT : GL :: L : T$, nous verrons dans la ſuite que le point G eſt le centre de force des corps T, L, on aura $CG = \frac{Tr+LR}{T+L}$, l'arc GQ décrit du centre C & du rayon $CG = \frac{Tr+LR}{T+L}dx$, $Qg = ds + \frac{Tdr+LdR}{T+L}$, la vîteſſe de G autour de $C = \frac{Tr+LR}{T+L}V$, la force centrifuge du point $G = \frac{Tr+LR}{T+L}V^2$, la vîteſſe de G le long de $CL = \left(ds + \frac{Tdr+LdR}{T+L}\right)\frac{V}{dx}$. Si le point G

ſe meut en ligne droite, il ne ſera accéléré le long de CL que par ſa force centrifuge; on aura donc $\frac{Tr + LR}{T + L} V^2 = \frac{d\left[\frac{V}{dx}\left(ds + \frac{Tdr + LdR}{T + L}\right)\right]}{\left(\frac{dx}{V}\right)}$ ou $(Tr + LR)Vdx =$ $d\left(\frac{V}{dx} \frac{(T + L)(2rdR - 2Rdr) + (R - r)(Tdr + LdR)}{R - r}\right)$ ou $\frac{(Tr + LR)dx}{(R - r)^2} = d\left(\frac{T(2rdR - Rdr - rdr) - L(2Rdr - rdR - RdR)}{(R - r)^3 dx}\right)$, comme nous avons trouvé ci-devant; par conſéquent le point G ſe meut en ligne droite. Si de plus la vîteſſe de G eſt uniforme, l'on aura Gg comme l'élément du temps, c'eſt-à-dire, $\sqrt{\left[\left(\frac{Tr + LR}{T + L}dx\right)^2 + \left(ds + \frac{Tdr + LdR}{T + L}\right)^2\right]} = \frac{mdx}{V}$ ou $(Tr + LR)^2 dx^2 + \left(\frac{T(2rdR - Rdr - rdr) - L(2Rdr - rdR - RdR)}{R - r}\right)^2$ $= \frac{m^2 (T + L)^2 (R - r)^4 dx^2}{B^2}$ ou $\left(\frac{Tr + LR}{(R - r)^2}\right)^2 dx^2 +$ $\left[- d\left(\frac{Tr + LR}{(R - r)^2}\right)\right]^2 = \frac{m^2 (T + L)^2}{B^2} dx^2$, ainſi que nous avons encore trouvé; par conſéquent la vîteſſe de G eſt conſtante.

Je ſuppoſe 2.° que les directions des impulſions qu'ont reçûs au commencement les corps L & T, n'étoient pas dans le même plan. Ces deux corps ſe mouveront tout comme dans le cas précédent, excepté que le plan ſur lequel ils ſe mouveront, ſe mouvera lui-même uniformément dans une direction qui lui ſera perpendiculaire.

Pour trouver le plan ſur lequel ſe mouveront nos deux corps, la direction & la vîteſſe de ce plan.

Soient Ll, Tt (*il faut imaginer la figure*) les directions où ſe meuvent les corps L, T, & ſoient Ll, Tt comme les vîteſſes de ces corps; je mène les lignes LT, lt, que je prolonge indéfiniment des deux ſens. Soit C le point de

la ligne LT, d'où menant une perpendiculaire CC' à la ligne lt, elle ſera auſſi perpendiculaire à la ligne LT; par le point C' menez $C'L'$ parallèle à CL, & par le point C menez Cl' parallèle à $C'l$, le plan LCl' eſt celui ſur lequel ſe mouveront les corps L & T, & CC' eſt la direction & la vîteſſe de ce plan.

Que l'on puiſſe toûjours mener une ligne qui ſoit perpendiculaire en même temps à deux autres lignes qui ne ſont pas dans un même plan, c'eſt un Lemme que nous venons de ſuppoſer, & qui eſt très-facile à démontrer.

Car de quelque manière que ces deux lignes ſoient poſées dans l'eſpace, de chaque point de l'une je puis mener une perpendiculaire à l'autre, & cette perpendiculaire ſera la moindre de toutes les lignes que l'on puiſſe mener de ce point-là à l'autre ligne; la moindre de toutes ces perpendiculaires ſera donc la moindre de toutes les lignes que l'on pourra mener de la première ligne à la ſeconde.

Je dis que cette moindre des perpendiculaires menées de la première ligne à la ſeconde, eſt auſſi perpendiculaire à la première ligne; car ſi elle ne l'étoit pas, du point où elle tombe ſur la ſeconde ligne, je mènerois une perpendiculaire à la première ligne qui ſeroit moindre qu'elle; il ne ſeroit donc pas vrai qu'elle eſt la moindre de toutes les lignes que l'on peut mener de la première ligne à la ſeconde.

Il faut encore démontrer que ſi l'on prend ſur les directions Ll, Tt, d'autres lignes proportionnelles La, Tb, on aura toûjours le même plan & la même vîteſſe a. Des points a & b ſoient abaiſſées ſur le plan LCl' les perpendiculaires $a\alpha$, $b\beta$, on aura $Ll : C'C :: La : a\alpha$, & $Tt : C'C :: Tb : b\beta$; donc $C'C : C'C :: a\alpha : b\beta$; donc $a\alpha = b\beta$; donc ab eſt parallèle au plan LCl'. Prolongez ab, & ſoit Q le point de la ligne LT, d'où menant une perpendiculaire QQ' à la ligne ab, elle ſoit auſſi perpendiculaire à TL, on aura $a\alpha = b\beta = QQ'$, & $CC' : QQ' :: Ll : La$, ou comme le temps que le corps L emploieroit à parcourir Ll au temps qu'il emploieroit à parcourir La.

XXIV.

Solution du Problème que l'on trouve à la page 252 du Livre des Principes de la Philosophie Naturelle de M. Newton. 3.e édition.

Trouver le mouvement d'un corps pesant dans un milieu résistant.

P est le corps dont il s'agit; $TPCA$ (*fig. 19*) est le plan vertical où se meut ce corps, & $ACc\gamma$ est l'horizon.

Soit $AC = x$, $CP = y$, la vîtesse de CP le long de $AC = V$, le temps que le corps P emploiera à parcourir le petit côté Pp de la courbe dans laquelle il se meut, est $= \frac{dx}{V}$.

La vîtesse de P le long de $CP = \frac{Vdy}{dx}$. Soit $Pp = ds$, & on aura $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

La vîtesse de P le long de $Pp = \frac{Vds}{dx}$.

Soit la force qui accélère vers $C = g$, celle qui accélère vers $T = R$.

Je décompose cette dernière force en deux autres, l'une dans la direction pR, & l'autre dans la direction RP; celle dans la direction pR sera $= \frac{Rdy}{ds}$; on aura donc

$$\left(-g - \frac{Rdy}{ds}\right) = \frac{d\left(\frac{Vdy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{V}\right)}.$$

Le corps P arrivé en p continueroit de se mouvoir dans la direction TPp. Soit pm la ligne qu'il parcourroit dans le second instant, on aura $\frac{dx}{V} : \frac{dx'}{V'} :: ds : pm$, ou $\frac{dx}{V} : d\left(\frac{dx}{V}\right) :: ds : pm - ds$; donc $pm = ds + \frac{Vds}{dx}\, d\left(\frac{dx}{V}\right)$; mais à cause de la force qui l'accélère vers T, il a aussi en

même temps une petite vîtesse vers ce point $= \frac{R'dx'}{V'}$, & la petite ligne mn que lui feroit parcourir cette vîtesse, est $= \frac{R'dx'}{V'} \cdot \frac{dx'}{V'} = \frac{Rdx^2}{V^2} + d(\frac{Rdx^2}{V^2}) = \frac{Rdx^2}{V^2}$.

Le corps P parcourroit donc dans le second instant la ligne $pn = ds + \frac{Vds}{dx} d(\frac{dx}{V}) - \frac{Rdx^2}{V^2}$; mais à cause de la force qui l'accélère vers c, il a encore une petite vîtesse vers ce point qui lui feroit parcourir $pf = \frac{gdx^2}{V^2}$.

Du point n soit menée $n\pi$ égale & parallèle à pf, & le corps P parcourra dans le second instant la ligne $p\pi$.

Du centre p & du rayon $p\pi$ soit décrit le petit arc πl, on aura $ln = -dds + \frac{Vds}{dx} d(\frac{dx}{V}) - \frac{Rdx^2}{V^2}$; & au moyen des triangles semblables πnl, PpR, on aura $\frac{gdx^2}{V^2} : -dds + \frac{Vds}{dx} d(\frac{dx}{V}) - \frac{Rdx^2}{V^2} :: ds : dy$, & par conséquent

$$-dsdds + \frac{Vds^2}{dx} d(\frac{dx}{V}) - \frac{Rdsdx^2}{V^2} = \frac{gdx^2dy}{V^2}.$$

Soit $R = D(\frac{Vds}{dx})^2$, on aura.

$$(-g - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{DV^2ds^2}{dx^2}) \frac{dx}{V} = d(\frac{Vdy}{dx}) \;\&$$

$$-dsdds + \frac{Vds^2}{dx} d(\frac{dx}{V}) - \frac{dsdx^2}{V^2} \cdot \frac{DV^2ds^2}{dx^2} = \frac{gdx^2dy}{V^2}.$$

1.re Équ.on $-gdy = (Ddy^2ds + dyddy) \frac{V^2}{dx^2} + \frac{1}{2}dy^2 d(\frac{V^2}{dx^2})$,

2me Équ.on $-gdy = (Dds^3 + dsdds) \frac{V^2}{dx^2} + \frac{1}{2}ds^2 d(\frac{V^2}{dx^2})$.

En égalant ensemble les deux valeurs de $-gdy$, on aura $(Ddsdx^2 + dxddx) \frac{V^2}{dx^2} + \frac{1}{2}dx^2 d(\frac{V^2}{dx^2}) = 0$, ou $2DdsV^2 + 2VdV = 0$, ou $Dds + \frac{dV}{V} = 0$.

Soit C le nombre dont le logarithme eſt $= 1$, on aura $\int D\,ds\, lC + lV = lA$, ou $lC^{\int D\,ds} + lV = lA$, ou $lVC^{\int D\,ds} = lA$; donc $VC^{\int D\,ds} = A$, ou $V = \frac{A}{C^{\int D\,ds}}$.

Je mets la première équation ſous cette forme-ci, $-gdx^3 = Ddxdyds V^2 + (dxddy - dyddx)V^2 + dxdyVdV$; après quoi j'y ſubſtitue pour VdV ſa valeur $-DdsV^2$; j'aurai $-gdx^3 = (dxddy - dyddx)V^2$, ou en ſuppoſant dx conſtant, $V^2 = \frac{-gdx^2}{ddy}$. On aura donc la vîteſſe horizontale du corps $P = dx\sqrt{(\frac{-g}{ddy})}$; ſa vîteſſe dans la courbe où il ſe meut $= ds\sqrt{(\frac{-g}{ddy})}$; la réſiſtance qu'il éprouve $= \frac{-gDds^2}{ddy}$.

Pour avoir D, j'égale les deux valeurs de V^2; j'aurai $\frac{A^2}{C^{2\int D\,ds}} = \frac{-gdx^2}{ddy}$, ou $C^{2\int D\,ds} = \frac{A^2}{g} \cdot \frac{-ddy}{dx^2}$, ou $2\int D\,ds = lA^2 - lg - ldx^2 + l - ddy$.

Différencions cette équation, & ſuppoſons g conſtante, nous aurons $2Dds = \frac{dddy}{ddy}$; donc $D = \frac{dddy}{2dsddy}$, & $R = \frac{-gdsdddy}{2ddy^2}$.

SECTION TROISIÉME.

I.

JE ne changerois rien au mouvement de pluſieurs corps entr'eux, ſi je leur imprimois à tous en même temps une même vîteſſe dans la même direction, & ſi aux mêmes inſtans je les accélérois tous également & dans le même ſens.

II.

Deux corps A & B ſe meuvent avec des vîteſſes & dans des directions données. Pour avoir la vîteſſe & la direction du

du corps A par rapport au corps B, je donne par la penſée aux corps A & B une vîteſſe égale & contraire à la vîteſſe du corps B; par ce moyen le corps B ſera en repos dans l'eſpace abſolu, & le corps A ſe mouvera avec une vîteſſe & dans une direction réſultantes de la vîteſſe & de la direction qu'il a, & de la vîteſſe & de la direction que je lui donne, & réciproquement la direction du corps A par rapport au corps B, étant donnée, l'on aura ſa direction dans l'eſpace, en faiſant un parallélogramme dont un des côtés eſt donné de grandeur & de poſition; l'autre l'eſt de grandeur, & la diagonale l'eſt de poſition.

III.

Si pluſieurs corps ſe choquent, ou plus généralement ſi les états de pluſieurs corps dans l'eſpace ſe trouvent être incompatibles enſemble, les changemens qui leur arriveront ſeront tels que les forces qu'avoient ces corps pour s'y refuſer, ſe ſeront vaincues mutuellement ou auront été en équilibre.

IV.

Si, par exemple, les corps A & B ſe meuvent dans la direction AB (*fig. 20*), & ſi A va plus vîte que B au moment où A atteindra B, il y aura incompatibilité entre les états de ces deux corps dans la direction AB; la force $A\alpha$ du corps A dont la vîteſſe eſt $= a$, pour que ſa vîteſſe ne ſoit pas $= a + \alpha$, ne ſera vaincue que par la force $B\beta$ qu'a le corps B, dont la vîteſſe eſt $= b$. Pour que ſa vîteſſe ne ſoit pas $= b + \beta$, on aura donc $A\alpha + B\beta = 0$; d'ailleurs les corps A & B iront enſemble, car le corps A ne ſauroit aller plus vîte que B, ni moins vîte que B; donc $a + \alpha = b + \beta$; donc $\alpha = \frac{-B(a-b)}{A+B}$, $\beta = \frac{A(a-b)}{A+B}$; donc la vîteſſe des deux maſſes après le choc $= \frac{Aa + Bb}{A+B}$.

Si les corps A & B ſe meuvent l'un vers l'autre, a étant poſitive, b ſera négative.

V.

Si les corps A & B peuvent ſe comprimer ou s'aplatir, ou ſi ſeulement l'un des deux peut ſe comprimer, le combat entre ces deux corps durera juſqu'à ce que la vîteſſe de B ſoit égale à celle de A, & les changemens qui arriveront à tout inſtant aux états de ces corps, ſeront en ſens contraire & réciproques aux maſſes, & par conſéquent auſſi les changemens qui leur arriveront pendant tout le temps; on aura donc ici, comme dans le cas précédent, $A\alpha = B\beta$, & $a - \alpha = b + \beta$.

Si le reſſort des corps A & B, après avoir été comprimé, fait effort pour ſe rétablir, le combat entre ces deux corps recommencera, & les changemens qui arriveront à chaque inſtant, ſeront en ſens contraire & réciproques aux maſſes, & par conſéquent auſſi les changemens qui arriveront pendant tout le temps. Soit le changement qui arrivera à l'état du corps $B = c$, celui qui arrivera à l'état du corps A ſera $= \frac{Bc}{A}$; la vîteſſe de A ſera donc $= a - \frac{B(a-b)}{A+B} - \frac{Bc}{A}$, & celle de B ſera $= b + \frac{A(a-b)}{A+B} + c$.

Si le reſſort des corps A & B eſt parfait, c ſera $= \frac{A(a-b)}{A+B}$, & on aura la vîteſſe de $A = a - \frac{2B(a-b)}{A+B}$, celle de $B = b + \frac{2A(a-b)}{A+B}$.

VI.

Si les corps A & B (*fig. 21*) ſe meuvent dans différentes directions, & ſi au moment où le corps A atteindra le corps B, la vîteſſe de A dans la direction perpendiculaire au point de contact eſt plus grande que celle de B, il y aura incompatibilité entre les états de ces deux corps dans cette direction.

Soient les directions où ſe meuvent les corps A & B &

leurs vîtesses Aa, Bb; soit le coup que reçoit le corps $A = A \,.\, A\alpha$, celui que reçoit le corps $B = B \,.\, B\beta$, on aura $A \,.\, A\alpha = B \,.\, B\beta$ & $AC - A\alpha = BD + B\beta$; d'où l'on tirera $A\alpha = \frac{B(BC - BD)}{A + B}$, $B\beta = \frac{A(BC - BD)}{A + B}$.

Faites les parallélogrammes $AaF\alpha$, $BbG\beta$, les directions où se mouveront les corps A & B & leurs vitesses, seront AF, BG.

Si les ressorts des corps A & B sont parfaits & infiniment roides, faites deux nouveaux parallélogrammes dont AF, $A\alpha$, BG, $B\beta$ soient les côtés, & les diagonales de ces parallélogrammes seront les vîtesses & les directions des corps A & B.

VII.

Si les corps A, B, C se meuvent tous les trois dans la direction ABC (*fig. 22*), & si au moment où B atteindra C, A atteint B, il y aura incompatibilité entre les états de ces trois corps dans la direction AC.

Soit avant le choc la vîtesse de $A = a$, celle de $B = b$, & celle de $C = c$, & après le choc soit la vîtesse de $A = a + \alpha$, celle de $B = b + \beta$, & celle de $C = c + \gamma$, on aura $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, & $a + \alpha = b + \beta$, $a + \alpha = c + \gamma$; donc $\alpha = \frac{-B(a-b) - C(b-c)}{A + B + C}$, $\beta = \frac{A(a-b) - C(b-c)}{A + B + C}$, $\gamma = \frac{A(a-c) + B(b-c)}{A + B + C}$; donc la vîtesse des trois masses après le choc $= \frac{Aa + Bb + Cc}{A + B + C}$.

Si les corps A, B, C, sont des corps à ressort, & si leur ressort est infiniment roide, chaque corps recevra dans le second instant un coup égal à celui qu'il aura reçû dans le premier; la vîtesse de A sera donc $= a - \frac{2[B(a-b) + C(b-c)]}{A + B + C}$,

celle de B ſera $= b + \frac{2[A(a-b) - C(b-c)]}{A+B+C}$, & celle de C ſera $= c + \frac{2[A(a-c) + B(b-c)]}{A+B+C}$.

VIII.

Si le corps A (*fig. 23*) ſe mouvant dans la direction Aa avec une vîteſſe Aa, rencontre les corps B & C en repos, ces deux corps ſeront contraints de ſe mouvoir dans les directions AB, AC.

Je ſuppoſe que le corps A ſera contraint de ſe mouvoir dans la direction $A\alpha$ avec une vîteſſe $A\alpha$.

Soit la maſſe de $A = 1$, celle de $B = m$, & celle de $C = n$.

La force de A parallèlement à αa eſt $= \alpha a$.

Du point α je mène aux directions AB, AC les perpendiculaires $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$.

La vîteſſe des corps A & B dans la direction AB, eſt $= A\beta$; celle des corps A & C dans la direction AC, eſt $= A\gamma$; la force de B dans la direction BA eſt donc $= m \cdot A\beta$, & celle de C dans la direction CA eſt $= n \cdot A\gamma$. Ces trois forces doivent ſe vaincre mutuellement ou être en équilibre.

Des points a, α, je mène aux directions AB, AC les parallèles ab, ac, αc, αb; on aura $m \cdot A\beta = ab$ & $n \cdot A\gamma = ac$; & au moyen de ces deux équations il ſera aiſé de déterminer le point α.

Soit $AM = x$, $M\alpha = y$, $AD = a$, $DA = b$, on aura $ab = a - x$, $ac = b - y$. Soit $DK = c$, on aura $b : c :: y : M\beta = \frac{cy}{b}$; donc $A\beta = x + \frac{cy}{b}$; on aura $b : c :: x : N\gamma = \frac{cx}{b}$; donc $A\gamma = y + \frac{cx}{b}$, & nos deux équations ſeront $m \cdot (x + \frac{cy}{b}) = a - x$, $n \cdot (y + \frac{cx}{b}) = b - y$.

Si le ressort des corps A, B, C est parfait & infiniment prompt, chacun d'eux recevra dans le second instant un coup égal à celui qu'il aura reçû dans le premier.

I X.

Le corps A se mouvant dans la direction Aa, (*fig.* 24) rencontre en même temps en son chemin les quatre boules B, B'; C, C' égales deux à deux, semblablement posées, & se mouvant avec la même vîtesse parallèlement à Aa.

Soit la vîtesse de $A = a$, celle des boules $B, B' = b$, & celle des boules $C, C' = c$, je suppose $b > c$ & $< \frac{Aa + 2Cc}{A + 2C}$.

Quoique le corps A atteigne en même temps les quatre boules B, B'; C, C', il ne choquera d'abord que les deux boules C, C', & ensuite il les choquera toutes quatre à la fois.

Soit le coup que reçoit le corps A dans la direction aA au premier choc $= m$, celui que reçoivent les boules C, C' dans la direction $Aa = n$, on aura $m = 2n$; la vîtesse de A sera $= a - \frac{m}{A}$, celle des boules C, C' sera $= c + \frac{n}{C}$.

Je fais $c + \frac{n}{C} = b$; donc $n = C(b - c)$, & $m = 2C(b - c)$; donc la vîtesse de $A = \frac{Aa - 2C(b - c)}{A}$, celle des quatre boules C, C', B, $B' = b$.

Soit le coup que reçoit le corps au second choc $= p$, celui que reçoivent les boules $B, B' = q$, & celui que reçoivent les boules $C, C' = r$, on aura $p = 2q + 2r$; la vîtesse de A sera $= \frac{Aa - 2C(b - c)}{A} - \frac{p}{A}$, celle des boules $B, B' = b + \frac{q}{B}$, & celle des boules $C, C' = b + \frac{r}{C}$, & on aura $\frac{Aa - 2C(b - c) - p}{A} = b + \frac{q}{B}$, $b + \frac{q}{B} = b + \frac{r}{C}$; d'où l'on tirera $p = \frac{2A(B + C)(a - b) - 4C(B + C)(b - C)}{A + 2B + 2C}$, $q = \frac{AB(a - b) - 2BC(b - c)}{A + 2B + 2C}$, $r = \frac{AC(a - b) - 2C^2(b - c)}{A + 2B + 2C}$;

donc la vîteſſe des cinq corps après le choc $= \frac{Aa + 2Bb + 2Cc}{A + 2B + 2C}$.

Si ce ſont des corps à reſſort, & ſi leur reſſort eſt infiniment roide, ils recevront après le choc un coup égal à celui qu'ils auront reçû pendant le choc; la vîteſſe de A ſera donc $= \frac{Aa + 2Bb + 2Cc}{A + 2B + 2C} - \frac{m + p}{A}$, celle des boules B, $B' = \frac{Aa + 2Bb + 2Cc}{A + 2B + 2C} + \frac{q}{B}$, & celle des boules C, $C' = \frac{Aa + 2Bb + 2Cc}{A + 2B + 2C} - \frac{n + r}{C}$.

Nous avons ſuppoſé $b < \frac{Aa + 2Cc}{A + 2C}$; car ſi b étoit $= \frac{Aa + 2Cc}{A + 2C}$, il n'y auroit que les deux boules C, C' qui ſeroient choquées, & à plus forte raiſon ſi b étoit $> \frac{Aa + 2Cc}{A + 2C}$, & elles le ſeroient tout comme ſi le corps A ne rencontroit qu'elles deux, & qu'il n'atteignît pas en même temps les deux boules B, B'.

X.

* La boule A (*fig. 25*) ſe mouvant dans la direction Aa, rencontre en même temps en ſon chemin les quatre boules B, B'; C, C', égales deux à deux, ſemblablement poſées, & ſe mouvant avec la même vîteſſe parallèlement à Aa.

Soit la vîteſſe de $A = a$, celle des boules B, $B' = b$, & celle des boules C, $C' = c$; je ſuppoſe $b > c$. Soit l'angle $aAB = aAB' = \alpha$, & $aAC = aAC' = \beta$. Quoique la boule A atteigne en même temps les quatre boules B, B'; C, C', & que le choc ſe faſſe ſubitement, elle commencera par choquer les deux boules C, C', & elle les choquera enſuite toutes quatre à la fois.

Soit le coup que reçoit le corps A dans la direction aA au premier choc $= m$, celui que reçoivent les

* Voyez l'Article CXLV de la première édition, ou l'Article CLXXVI de la ſeconde édition du *Traité de Dynamique de M. d'Alembert*.

corps C, C' dans les directions AC, $AC' = n$. Des deux coups égaux dans les directions AC, AC', il en résulte un seul dans la direction $Aa = 2n \text{ cos. } \zeta$; par conséquent on aura $m = 2n \text{ cos. } \zeta$; la vîtesse de A dans la direction $Aa = a - \frac{m}{A}$, celle des corps C, C' dans les directions AC, $AC' = c \text{ cos. } \zeta + \frac{n}{C}$.

Si la vîtesse des corps C, C' parallèlement à Aa avoit été $= b$, leur vîtesse dans les directions AC, AC auroit été $= b \text{ cos. } \zeta$.

Je fais $c \text{ cos. } \zeta + \frac{n}{C} = b \text{ cos. } \zeta$, j'aurai
$m = 2C.(\text{cos. } \zeta)^2.(b - c)$, $n = C.\text{ cos. } \zeta.(b - c)$, & la vîtesse de A sera $= \frac{Aa - 2C.(\text{cos. } \zeta)^2.(b-c)}{A}$; celle de B dans la direction AB, & celle de B' dans la direction $AB' = b \text{ cos. } \alpha$, celle de C dans la direction AC, & celle de C' dans la direction $AC' = b \text{ cos. } \zeta$.

Soit le coup que reçoit le corps A dans la direction aA au second choc $= p$, celui que reçoivent les corps B, B' dans les directions AB, $AB' = q$, & celui que reçoivent les corps C, C' dans les directions AC, $AC' = r$. Des deux coups égaux dans les directions AB, AB', il en résulte un seul dans la direction $Aa = 2q \text{ cos. } \alpha$; & des deux coups égaux dans les directions AC, AC', il en résulte un seul dans la direction $Aa = 2r \text{ cos. } \zeta$; par conséquent on aura $p = 2q \text{ cos. } \alpha + 2r \text{ cos. } \zeta$; la vîtesse de A dans la direction Aa, sera $= \frac{Aa - 2C.(\text{cos. } \zeta)^2.(b-c)}{A} - \frac{p}{A}$; celle des corps B, B' dans les directions AB, $AB' = b \text{ cos. } \alpha + \frac{q}{B}$, & celle des corps C, C' dans les directions AC, $AC' = b \text{ cos. } \zeta + \frac{r}{C}$,

& on aura $\left(\frac{Aa - 2C(\text{cof. }\beta)^2.(b-c) - p}{A}\right)\text{cof. }\alpha = b\,\text{cof. }\alpha + \frac{q}{B}$;
$\left(\frac{Aa - 2C.(\text{cof. }\beta)^2.(b-c) - p}{A}\right)\text{cof. }\beta = b\,\text{cof. }\beta + \frac{r}{C}$: donc
$p = \frac{[A.(a-b) - 2C.(\text{cof. }\beta)^2.(b-c)]\,[2B(\text{cof. }\alpha)^2 + 2C(\text{cof. }\beta)^2]}{A + 2B(\text{cof. }\alpha)^2 + 2C(\text{cof. }\beta)^2}$;
$q = \frac{B\,\text{cof. }\alpha\,[A.(a-b) - 2C.(\text{cof. }\beta)^2.(b-c)]}{A + 2B.(\text{cof. }\alpha)^2 + 2C.(\text{cof. }\beta)^2}$,
$r = \frac{C\,\text{cof. }\beta\,[A.(a-b) - 2C(\text{cof. }\beta)^2.(b-c)]}{A + 2B(\text{cof. }\alpha)^2 + 2C(\text{cof. }\beta)^2}$; donc la
vîteffe de $A = \frac{Aa + 2Bb(\text{cof. }\alpha)^2 + 2Cc(\text{cof. }\beta)^2}{A + 2B(\text{cof. }\alpha)^2 + 2C(\text{cof. }\beta)^2}$.

La vîteffe des corps B, B' dans les directions AB, AB' $=$ la vîteffe de A par cof. α, & celle des corps C, C' dans les directions AC, AC' $=$ la vîteffe de A par cof. β.

Si les corps A, B, B'; C, C' font des corps à reffort, & fi leur reffort eft infiniment roide, ils recevront dans le fecond inftant un coup égal à celui qu'ils auront reçû dans le premier; la vîteffe de A fera donc celle que nous venons de déterminer $- \frac{m+p}{A}$; celle des corps B, B' dans les directions AB, AB' fera celle que nous venons de trouver $+ \frac{q}{B}$, & celle des corps C, C' dans les directions AC, AC', fera auffi celle que nous venons de trouver $+ \frac{n+r}{C}$.

Il peut fe faire que la vîteffe des corps B, B' foit telle qu'ils ne foient pas choqués du tout, c'eft-à-dire, que p, q, r foient $= 0$; on aura $A(a-b) - 2C(\text{cof. }\beta)^2(b-c) = 0$; donc $b = \frac{Aa + 2Cc(\text{cof. }\beta)^2}{A + 2C(\text{cof. }\beta)^2}$, & à plus forte raifon fi b eft $> \frac{Aa + 2Cc(\text{cof. }\beta)^2}{A + 2C(\text{cof. }\beta)^2}$.

(Voyez la page 299 du tome I.er des Opufcules de M. d'Alembert.)

SECTION

SECTION QUATRIÉME.

I.

CONCEVEZ un eſpace roide dénué d'inertie & doué de points maſſifs A, B, C, D, &c. ou un corps quelconque tournant librement autour d'un axe immobile.

II.

La force de cet eſpace en vertu d'une particule maſſive A, dont la diſtance à l'axe eſt a, pour perſévérer en ſon état, ou pour n'être pas en l'état le plus prochain de celui où il eſt, eſt comme l'inertie de la particule maſſive A, & comme la diſtance du lieu où réſide cette force à l'axe, c'eſt-à-dire, comme Aa.

III.

La vîteſſe angulaire de cet eſpace étant V, ſa force, pour que ſa vîteſſe angulaire ne ſoit pas $V + v$, eſt comme ſa force pour perſévérer, ou comme ſon inertie, comme la diſtance du lieu où réſide cette force à l'axe, & comme v, c'eſt-à-dire, comme $Aa.a.v$ ou Aa^2v.

IV.

L'inertie de ce même eſpace, en vertu d'une autre particule maſſive B, dont la diſtance à l'axe eſt b, eſt $= Bb$, & ſa force, pour n'être pas à une diſtance v de ſon état, eſt $= Bb^2v$.

V.

Je ſuppoſe que les particules maſſives A, B, C, D, &c. dont les diſtances à l'axe ſont a, b, c, d, &c. ſoient anéanties; trouver la particule maſſive M & la diſtance m de l'axe à laquelle il faudroit la placer pour que l'inertie de cet eſpace, & ſa force, pour n'être pas à une diſtance v de ſon état, fuſſent les mêmes qu'auparavant;

on aura $Mm = Aa + Bb + Cc + Dd +$ &c.

& $Mm^2v = Aa^2v + Bb^2v + Cc^2v + Dd^2v +$ &c.

donc $M = \frac{(Aa + Bb + Cc + Dd + \&c.)^2}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2 + \&c.}$, &

$$m = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2 + \&c.}{Aa + Bb + Cc + Dd + \&c.}.$$

V I.

Soit $a = l + \alpha$, $b = l + \beta$, $c = l + \gamma$, $d = l + \delta$, &c. $m = l + \mu$, on aura

$$M = \frac{[A(l+\alpha) + B(l+\beta) + C(l+\gamma) + D(l+\delta) + \&c.]^2}{A(l+\alpha)^2 + B(l+\beta)^2 + C(l+\gamma)^2 + D(l+\delta)^2 + \&c.},$$

$$\mu = \frac{A\alpha(l+\alpha) + B\beta(l+\beta) + C\gamma(l+\gamma) + D\delta(l+\delta) + \&c.}{A(l+\alpha) + B(l+\beta) + C(l+\gamma) + D(l+\delta) + \&c.};$$

en supposant que les particules massives A, B, C, D, &c. tournent autour d'un axe infiniment distant, ou qu'elles se meuvent toutes avec la même vîtesse & dans des directions parallèles; l sera infinie, & on aura $M = A + B + C + D + \&c.$

$$\mu = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + \&c.}{A + B + C + D + \&c.}.$$

V I I.

Le centre de force d'un espace roide dénué d'inertie & doué de points massifs A, B, C, D, &c. ou d'un corps quelconque qui est libre, est un point G dans cet espace ou dans ce corps, dont la force pour persévérer en son état dans une direction quelconque, & celle pour n'en être pas à une distance donnée, sont les mêmes que si toutes les particules massives A, B, C, D, &c. y étoient concentrées.

V I I I.

Nous savons trouver la distance de ce point à un plan quelconque; car si des points massifs A, B, G, D, &c. & du point G, l'on mène à ce plan les perpendiculaires $Aa = \alpha$, $Bb = \beta$, $Cc = \gamma$, $Dd = \delta$, &c. $Gg = n$, on aura $G = A + B + C + D$, &c.

$$n = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta + \&c.}{A + B + C + D + \&c.}.$$

IX.

Si le plan passe par le point G, on aura $A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta +$ &c. $= 0$.

X.

Je suppose que l'espace ou le corps dont nous parlons, n'est doué que de deux points massifs A, B (*fig. 26*). Soit G le centre de leur force; le point G ne peut jamais être hors de la ligne AB, car il n'y a que les points de cette ligne qui soient uniques par rapport aux points massifs A, B. Par le point G je fais passer un plan quelconque aGb, & des points A, B je mène à ce plan les perpendiculaires $Aa = \alpha$, $Bb = -\beta$; j'aurai $A\alpha - B\beta = 0$; donc $\alpha : \beta :: B : A$, mais $GA : GB :: \alpha : \beta$; donc $GA : GB :: B : A$.

Or dès que l'on sait trouver le centre de force de deux points massifs A, B, l'on saura trouver celui de trois, celui de quatre, celui de cinq, &c.

XI.

Par le centre de force G d'un espace roide dénué d'inertie & doué de points massifs A, B, C, D, &c. ou d'un corps quelconque donné, je fais passer une ligne roide dénuée d'inertie que je prolonge indéfiniment de part & d'autre du point G; je marque sur cette ligne un point O, & je conçois qu'à ce point la ligne GO est traversée perpendiculairement par une ligne ou par un axe roide immobile; le centre d'inertie M de cet espace ou de ce corps par rapport à l'axe O, est dans la ligne OG, & en concevant que des points massifs A, B, C, D, &c. & du point M l'on mène à l'axe O les perpendiculaires a, b, c, d, &c. m, on aura $M = \frac{(Aa + Bb + Cc + Dd + \&c.)^2}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2 + \&c.}$ & $m = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2 + \&c.}{Aa + Bb + Cc + Dd + \&c.}$.

XII.

Soit AOB (*fig. 27*) un espace plan roide dénué d'inertie & doué de deux points massifs A, B, se mouvant librement dans le plan AOB autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan.

Soit $OA = a$, $OB = b$, l'angle $AOB = \alpha$. La vîtesse angulaire de AOB étant $= V$, la force de A dans la direction $A\alpha$ perpendiculaire à OA, pour que la vîtesse angulaire de AOB ne soit pas $= V + v$, est $= Aav$, celle de B dans la direction $B\mathfrak{C}$ perpendiculaire à OB, est $= Bbv$.

Soit e le point d'intersection des directions $A\alpha$, $B\mathfrak{C}$, & soit eB à ed comme Bb à Aa, les lignes eB, ed étant les directions & les mesures des forces de B & de A, la diagonale $e\nu$ du parallélogramme $Bed\nu$ sera la direction & la mesure de la force résultante de ces deux forces; on aura $\text{cos.}\,\alpha : \text{sin.}\,\alpha :: a : Ac = \frac{a\,\text{sin.}\,\alpha}{\text{cos.}\,\alpha}$, $\text{cos.}\,\alpha : 1 :: a : Oc = \frac{a}{\text{cos.}\,\alpha}$, donc $cB = \frac{b\,\text{cos.}\,\alpha - a}{\text{cos.}\,\alpha}$; on aura $\text{sin.}\,\alpha : \text{cos.}\,\alpha :: cB : Be = \frac{b\,\text{cos.}\,\alpha - a}{\text{sin.}\,\alpha}$; donc $ed = \frac{Aa(b\,\text{cos.}\,\alpha - a)}{Bb\,\text{sin.}\,\alpha}$, $\text{sin.}\,\alpha : 1 :: cB : ce = \frac{b\,\text{cos.}\,\alpha - a}{\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\alpha}$; donc $cd = \frac{(Bb - Aa\,\text{cos.}\,\alpha)(b\,\text{cos.}\,\alpha - a)}{Bb\,\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\alpha}$; on aura $1 : \text{sin.}\,\alpha :: cd : ck = \frac{(Bb - Aa\,\text{cos.}\,\alpha)(b\,\text{cos.}\,\alpha - a)}{Bb\,\text{cos.}\,\alpha}$; donc $Bk = \frac{Aa(b\,\text{cos.}\,\alpha - a)}{Bb}$, $1 : \text{cos.}\,\alpha :: cd : dk = \frac{(Bb - Aa\,\text{cos.}\,\alpha)(b\,\text{cos.}\,\alpha - a)}{Bb\,\text{sin.}\,\alpha}$; donc $k\nu = \frac{Aa\,\text{cos.}\,\alpha\,(b\,\text{cos.}\,\alpha - a)}{Bb\,\text{sin.}\,\alpha}$. On aura $Be : Bl :: k\nu : Bk - Bl$; donc $Bl = \frac{Aa(b\,\text{cos.}\,\alpha - a)}{Aa\,\text{cos.}\,\alpha + Bb}$, $el = \frac{b\,\text{cos.}\,\alpha - a}{(Aa\,\text{cos.}\,\alpha + Bb)\,\text{sin.}\,\alpha} \cdot \sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\,\text{cos.}\,\alpha + B^2b^2)}$;

donc $e\nu = \frac{b \cos.\alpha - a}{Bb \sin.\alpha} . \sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \cos.\alpha + B^2b^2)}$;

donc la force dans la direction $e\nu = \sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \cos.\alpha + B^2b^2)} . v$.

Du point O soit menée à $e\nu$ la perpendiculaire $ON = n$,

& soit N un point massif tel que $Nn = \sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \cos.\alpha + B^2b^2)}$,

on aura $el : eB :: Ol : n = \frac{Aa^2 + Bb^2}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \cos.\alpha + B^2b^2)}}$;

donc $N = \frac{A^2a^2 + 2AaBb \cos.\alpha + B^2b^2}{Aa^2 + Bb^2}$.

Soit l'angle $AON = \nu$,

on aura $\sin.\nu = \frac{Bb \sin.\alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \cos.\alpha + B^2b^2)}}$,

$\cos.\nu = \frac{Aa + Bb \cos.\alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \cos.\alpha + B^2b^2)}}$.

Le point N est le centre de force de l'espace AOB par rapport à l'axe O.

La ligne ON passe par le centre de force G de l'espace AOB par rapport à un axe infiniment distant, & par conséquent aussi par son centre d'inertie M par rapport à l'axe O. Pour le démontrer, je mène à OA les perpendiculaires Gg, Bh; on aura $Bh = b \sin.\alpha$, $Oh = b \cos.\alpha$; donc $Ah = b \cos.\alpha - a$; on aura $\cos.\nu : \sin.\nu :: a + Ag : Gg = \frac{a \sin.\nu}{\cos.\nu} + \frac{\sin.\nu}{\cos.\nu} Ag$, $\cos.\nu : 1 :: a + Ag : OG = \frac{a + Ag}{\cos.\nu}$; on aura $Ah : hB :: Ag :: gG = \frac{b \sin.\alpha}{b \cos.\alpha - a} . Ag$.

En égalant les deux valeurs de gG, on aura

$$\frac{aBb \sin.\alpha}{Aa + Bb \cos.\alpha} + \frac{Bb \sin.\alpha}{Aa + Bb \cos.\alpha} Ag = \frac{b \sin.\alpha}{b \cos.\alpha - a} Ag;$$

donc $Ag = \frac{B(b \cos.\alpha - a)}{A + B}$, $Gg = \frac{Bb \sin.\alpha}{A + B}$,

$OG = \frac{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb \cos.\alpha + B^2b^2)}}{A + B}$.

On aura $GA : GB :: Ag : gh :: Ag : Ah - Ag ::$ $\frac{B(b\,\text{cof.}\,\alpha - a)}{A + B} : b\,\text{cof.}\,\alpha - a - \frac{B(b\,\text{cof.}\,\alpha - a)}{A + B} :: B : A.$

Soit $G = A + B$, & $OG = g$, on aura $\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + B^2b^2)} = Gg$; donc $N = \frac{G^2g^2}{Aa^2 + Bb^2}$ & $n = \frac{Aa^2 + Bb^2}{Gg}$.

Si le plan eſt doué de trois points maſſifs A, B, C, l'on déterminera le centre de force N' des points maſſifs N & C, comme on vient de déterminer le centre de force N des points maſſifs A, B.

Soit $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $AOB = \alpha$, $AOC = \alpha'$, $BOC = \alpha' - \alpha = \beta$, $ON = n$, $AON = \nu$, $ON' = n'$, $AON' = \nu'$, on aura

$$N' = \frac{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + 2AaCc\,\text{cof.}\,\alpha' + 2BbCc\,\text{cof.}\,\beta}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2},$$

$$n' = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + 2AaCc\,\text{cof.}\,\alpha' + 2BbCc\,\text{cof.}\,\beta)}};$$

$$\text{fin.}\,\nu' = \frac{Bb\,\text{fin.}\,\alpha + Cc\,\text{fin.}\,\alpha'}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + 2AaCc\,\text{cof.}\,\alpha' + 2BbCc\,\text{cof.}\,\beta)}},$$

$$\text{cof.}\,\nu' = \frac{Aa + Bb\,\text{cof.}\,\alpha + Cc\,\text{cof.}\,\alpha'}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + 2AaCc\,\text{cof.}\,\alpha' + 2BbCc\,\text{cof.}\,\beta)}},$$

Soit G' le centre de force des points maſſifs A, B, C, ou, ce qui revient au même, des points maſſifs G & C, par rapport à un axe infiniment diſtant, & ſoit $G' = A + B + C$, $OG' = g'$, en ſubſtituant pour A, a, B, b, α, les valeurs ſuivantes, $A + B$, $\frac{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + B^2b^2)}}{A + B}$, C, c, $\alpha' - \nu$, l'on trouvera

$$g' = \frac{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + 2AaCc\,\text{cof.}\,\alpha' + 2BbCc\,\text{cof.}\,\beta)}}{A + B + C},$$

$\text{fin.}\,AOG' = \text{fin.}\,\nu'$, $\text{cof.}\,AOG' = \text{cof.}\,\nu'$; d'où l'on

conclurra que la ligne ON' passe par le centre de force G' des points massifs $A, B, C,$ & que $N' = \frac{G'^2 g'^2}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$, $n' = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{G'g'}$.

Si le plan est doué de quatre points massifs $A, B, C, D,$ l'on déterminera le centre de force N'' des points massifs N' & D, comme on a déterminé le centre de force N des points massifs A, B.

Soit $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, $AOB = \alpha$, $AOC = \alpha'$, $AOD = \alpha''$, $BOC = \beta$, $BOD = \beta'$, $COD = \gamma$, $ON = n$, $ON' = n'$, $ON'' = n''$, $AON = \nu$, $AON' = \nu'$, $AON'' = \nu''$, on aura $N'' = \frac{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + D^2d^2 + 2AaBb \operatorname{cof.} \alpha + 2AaCc \operatorname{cof.} \alpha' + 2AaDd \operatorname{cof.} \alpha'' + 2BbCc \operatorname{cof.} \beta + 2BbDd \operatorname{cof.} \beta' + 2CcDd \operatorname{cof.} \gamma}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2}$, $n'' = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}$,

$\operatorname{fin.} \nu'' = \frac{Bb \operatorname{fin.} \alpha + Cc \operatorname{fin.} \alpha' + Dd \operatorname{fin.} \alpha''}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}$,

$\operatorname{cof.} \nu'' = \frac{Aa + Bb \operatorname{cof.} \alpha + Cc \operatorname{cof.} \alpha' + Dd \operatorname{cof.} \alpha''}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}$,

$G'' = A + B + C + D$, $g'' = \frac{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}{G''}$,

$\operatorname{fin.} AOG'' = \operatorname{fin.} \nu''$, $\operatorname{cof.} AOG'' = \operatorname{cof.} \nu''$; donc $N'' = \frac{G''^2 g''^2}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2}$, $n'' = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2}{G'' g''}$.

Si c'est un espace solide, roide, dénué d'inertie, & doué de points massifs, qui tourne autour de l'axe O, l'on projètera tous les points massifs dont cet espace sera doué sur le plan perpendiculaire à l'axe qui passe par son centre de force par rapport à un axe infiniment distant; après quoi, l'on déterminera le centre de force de ce plan par rapport à l'axe O.

XIII.

Soit AOB (*fig. 28*) un espace plan roide, dénué d'inertie, & doué de deux points massifs A, B, se mouvant librement dans le plan AOB autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan. Soit $OA = a$, $OB = b$, l'angle $AOB = \alpha$, la vîtesse angulaire de $AOB = V$; la vîtesse de A autour de O sera $= aV$, & la force centrifuge de A sera $= AaV^2$; la vîtesse de B sera $= bV$, & sa force centrifuge sera $= BbV^2$. Soit $OA : Oe :: Aa : Bb$, on aura $Oe = \frac{Bb}{A}$.

OA & Oe étant les directions & les mesures des forces centrifuges de A & de B, la diagonale Of du parallèlogramme $AOef$ sera la direction & la mesure de la force résultante de ces deux forces; on aura $1 : \text{sin.}\,\alpha :: Af : hf = \frac{Bb}{A}\,\text{sin.}\,\alpha$, $1 : \text{cos.}\,\alpha :: Af : Ah = \frac{Bb}{A}\,\text{cos.}\,\alpha$; donc $Oh = \frac{Aa + Bb\,\text{cos.}\,\alpha}{A}$, $Of = \frac{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\,\text{cos.}\,\alpha + B^2b^2)}}{A}$, & la force dans la direction $Of = \sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\,\text{cos.}\,\alpha + B^2b^2)}.V^2$; on aura $Of : hf :: 1 : \text{sin.}\,AOf = \frac{Bb\,\text{sin.}\,\alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\,\text{cos.}\,\alpha + B^2b^2)}}$, $Of : Oh :: 1 : \text{cos.}\,AOf = \frac{Aa + Bb\,\text{cos.}\,\alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\,\text{cos.}\,\alpha + B^2b^2)}}$. La ligne Of passe par le centre de force G de la ligne AB, & en faisant $G = A + B$, $OG = g$, on aura la force dans la direction $Of = GgV^2$.

XIV.

Soit AOB (*fig. 29*) un espace plan roide, dénué d'inertie, & doué de deux points massifs A, B, se mouvant librement dans le plan AOB autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan. Je suppose que tout-à-coup l'axe O vienne à manquer, &

qu'au même inſtant on lui en ſubſtitue un autre au point O' parallèle au premier.

Soit $OA = a$, $OB = b$, l'angle $AOB = \alpha$, la vîteſſe angulaire de $AOB = V$; & ſoit $OO' = x$, l'angle $AOO' = \xi$, l'angle BOO' ſera $= \alpha - \xi$.

Je mène à OA, OB les perpendiculaires $O'e$, $O'f$; j'aurai $1 : \text{ſin.}\,\xi :: x : O'e = x\,\text{ſin.}\,\xi$, $1 : \text{coſ.}\,\xi :: x : Oe = x\,\text{coſ.}\,\xi$; donc $Ae = a - x\,\text{coſ.}\,\xi$, & $O'A = \sqrt{(a^2 - 2ax\,\text{coſ.}\,\xi + x^2)}$. J'aurai $1 : \text{ſin.}\,(\alpha - \xi) :: x : O'f = x\,\text{ſin.}\,(\alpha - \xi)$, $1 : \text{coſ.}\,(\alpha - \xi) :: x : Of = x\,\text{coſ.}\,(\alpha - \xi)$; donc $Bf = b - x\,\text{coſ.}\,(\alpha - \xi)$, & $O'B = \sqrt{(b^2 - 2bx\,\text{coſ.}\,(\alpha - \xi) + x^2)}$.

Si le point maſſif A étoit ſeul, ſa vîteſſe dans la direction $A\alpha$ perpendiculaire à OA, étant $= aV$, dans la direction Ar perpendiculaire à $O'A$, elle ſeroit $= \frac{(a - x\,\text{coſ.}\,\xi)\,aV}{\sqrt{(a^2 - 2ax\,\text{coſ.}\,\xi + x^2)}}$; & par conſéquent, la vîteſſe angulaire de $O'A$ ſeroit $= \frac{(a - x\,\text{coſ.}\,\xi)\,aV}{a^2 - 2ax\,\text{coſ.}\,\xi + x^2}$.

Si le point maſſif B étoit ſeul, ſa vîteſſe dans la direction $B\mathfrak{C}$ perpendiculaire à OB, étant $= bV$, dans la direction Bs perpendiculaire à $O'B$, elle ſeroit $= \frac{[b - x\,\text{coſ.}\,(\alpha - \xi)]\,bV}{\sqrt{[b^2 - 2bx\,\text{coſ.}\,(\alpha - \xi) + x^2]}}$; & par conſéquent, la vîteſſe angulaire de $O'B$ ſeroit $= \frac{[b - x\,\text{coſ.}\,(\alpha - \xi)]\,bV}{b^2 - 2bx\,\text{coſ.}\,(\alpha - \xi) + x^2}$. Mais à cauſe de l'incompatibilité entre les états de ces deux lignes, je ſuppoſe que la vîteſſe angulaire de OA ſera $= \frac{(a - x\,\text{coſ.}\,\xi)\,aV}{a^2 - 2ax\,\text{coſ.}\,\xi + x^2} + e$, que celle de $O'B$ ſera $= \frac{[b - x\,\text{coſ.}\,(\alpha - \xi)]\,bV}{b^2 - 2bx\,\text{coſ.}\,(\alpha - \xi) + x^2} + f$, & que celle de

$AO'B$ fera $= W$; on aura $\frac{(a - x \operatorname{cof.} \xi) a V}{a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \xi + x^2} + e = W$, & $\frac{[b - x \operatorname{cof.} (\alpha - \xi)] b V}{b^2 - 2bx \operatorname{cof.} (\alpha - \xi) + x^2} + f = W$.

D'ailleurs la force de $O'A$, pour n'être pas à une diſtance e de ſon état, eſt $= A\,(a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \xi + x^2)\,e$; celle de $O'B$, pour n'être pas à une diſtance f du ſien, eſt $= B\,[b^2 - 2bx \operatorname{cof.} (\alpha - \xi) + x^2]\,f$.

Ces deux forces ſe vaincront mutuellement, ou ſeront en équilibre; par conſéquent on aura $A(a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \xi + x^2)\,e + B\,[b^2 - 2bx \operatorname{cof.} (\alpha - \xi) + x^2]\,f = 0$, ou $A\,(a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \xi + x^2)\,(W - \frac{(a - x \operatorname{cof.} \xi)\,aV}{a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \xi + x^2}) +$
$B\,[b^2 - 2bx \operatorname{cof.} (\alpha - \xi) + x^2]\,(W - \frac{[b - x \operatorname{cof.} (\alpha - \xi)]}{b^2 - 2bx \operatorname{cof.} (\alpha - \xi) + x^2}) = 0$;
donc $W = \frac{(a - x \operatorname{cof.} \xi)\,AaV + [b - x \operatorname{cof.} (\alpha - \xi)]\,BbV}{A(a^2 - 2ax \operatorname{cof.} \xi + x^2) + B\,[b^2 - 2bx \operatorname{cof.} (\alpha - \xi) + x^2]}$.

Si l'on veut que le point O' ſoit placé de façon que $W = 0$, on aura $(a - x \operatorname{cof.} \xi)\,Aa + [b - x \operatorname{cof.} (\alpha - \xi)]\,Bb = 0$; donc $x = \frac{Aa^2 + Bb^2}{Aa \operatorname{cof.} \xi + Bb \operatorname{cof.} \alpha \operatorname{cof.} \xi + Bb \operatorname{fin.} \alpha \operatorname{fin.} \xi}$, & l'on trouvera que N étant le centre de force de l'eſpace AOB, le lieu du point O' ſera dans la ligne droite qui coupe perperpendiculairement la ligne ON au point N, comme nous le ſavions.

X V.

Soit AOB (*fig. 30*) une ligne roide, dénuée d'inertie, & douée de deux points maſſifs A, B, ſe mouvant librement dans le plan OAa autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan. Je ſuppoſe que tout-à-coup le point maſſif B ceſſe d'être retenu par l'axe O, & qu'il continue d'être emporté par la ligne OAB.

Soit $OA = a, OB = b$, la vîteſſe angulaire de $OAB = \alpha$. Je ſuppoſe qu'après un temps quelconque le point maſſif B ſoit en B'.

Soit $OB' = x$, la vîteſſe angulaire de $OAB' = v$, la vîteſſe de B' le long de $OB' = u$; la vîteſſe de B' autour de O' ſera $= xv$, la force centriſuge de $B' = xv^2$; on aura $xv^2 = \frac{\dot{u}}{\left(\frac{\dot{x}}{u}\right)}$ & $(Aa^2 + Bx^2)v = (Aa^2 + Bb^2)\alpha$.

XVI.

Soit AOB (*fig. 31*) un eſpace plan roide, dénué d'inertie, & doué de deux points maſſifs A, B, ſe mouvant librement en vertu de la peſanteur des points maſſifs A, B dans le plan vertical AOB autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan. Soit $OA = a$, $OB = b$, l'angle $AOB = \alpha$, la force qui accélère les corps verticalement $= 1$; je mène l'horizontale Oa, & je fais l'angle $aOA = x$; l'angle aOB ſera $= \alpha + x$.

1.° Si le point maſſif A étoit ſeul, la force qui l'accéléreroit autour de l'axe O ſeroit $=$ coſ. x, & par conſéquent, la force qui accéléreroit la ligne OA ſeroit $= \frac{\text{coſ.}\, x}{a}$. Si le point maſſif B étoit ſeul, la force qui l'accélèreroit autour de O ſeroit $=$ coſ. $(\alpha + x) =$ coſ. α coſ. x — ſin. α ſin. x, & par conſéquent la force qui accéléreroit la ligne OB, ſeroit $= \frac{\text{coſ.}\,\alpha\ \text{coſ.}\,x\ -\ \text{ſin.}\,\alpha\ \text{ſin.}\,x}{b}$.

Mais à cauſe de la roideur de l'eſpace AOB, je ſuppoſe que la force qui accélérera OA, eſt $= \frac{\text{coſ.}\, x}{a} + e$, que celle qui accélérera $OB = \frac{\text{coſ.}\,\alpha\ \text{coſ.}\,x\ -\ \text{ſin.}\,\alpha\ \text{ſin}\,x}{b} + f$,

$AO'B$ [illegible] le plan $AOB = \varphi$, on aura

& [illegible] $\frac{\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x}{b} + f = \varphi$.

[illegible] de OA, pour n'être pas à une distance e [illegible] $= Aa^2 e$; celle de OB, pour n'être pas [illegible] f du sien, est $= Bb^2 f$.

[illegible] forces se vaincront mutuellement, ou seront en [illegible] par conséquent, on aura $Aa^2 e + Bb^2 f = 0$, ou [illegible] $\varphi - \frac{\text{cof.}\,x}{a}) + Bb^2(\varphi - \frac{\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x}{b}) = 0$;

[illegible] $\varphi = \frac{Aa\,\text{cof.}\,x + Bb\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - Bb\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x}{Aa^2 + Bb^2}$.

2.° Trouver le point P, dont la vîtesse est à tout instant la même que si, les points A, B n'étant pas des points massifs, il étoit un point massif.

Soit $OP = p$, l'angle $AOP = \pi$, l'angle aOP sera $= \pi + x$, la force qui accéléreroit P autour de $O = \text{cof.}\,(\pi + x) = \text{cof.}\,\pi\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\pi\,\text{fin.}\,x$, & par conséquent celle qui accéléreroit la ligne $OP = \frac{\text{cof.}\,\pi\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\pi\,\text{fin.}\,x}{p}$: on aura donc $\frac{\text{cof.}\,\pi\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\pi\,\text{fin.}\,x}{p} = \frac{Aa\,\text{cof.}\,x + Bb\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - Bb\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x}{Aa^2 + Bb^2}$.

Pour que ce problème-ci soit possible, il faut que p & π soient indépendans de x, c'est-à-dire, qu'ils ne varient point pendant que x variera. Pour remplir cette condition, je différencie l'équation précédente, & j'ai $\frac{-\text{cof.}\,\pi\,\text{fin.}\,x - \text{fin.}\,\pi\,\text{cof.}\,x}{p} = \frac{-Aa\,\text{fin.}\,x - Bb\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x - Bb\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x}{Aa^2 + Bb^2}$. En égalant les deux valeurs de $\frac{1}{p}$, j'aurai $\frac{Aa\,\text{cof.}\,x + Bb\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - Bb\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x}{\text{cof.}\,\pi\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\pi\,\text{fin.}\,x} = \frac{Aa\,\text{fin.}\,x + Bb\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x + Bb\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x}{\text{cof.}\,\pi\,\text{fin.}\,x + \text{fin.}\,\pi\,\text{cof.}\,x}$;

d'où je tirerai $\text{cof.}\,\pi = \frac{Aa + Bb\,\text{cof.}\,\alpha}{Bb\,\text{fin.}\,\alpha}\,\text{fin.}\,\pi$, & en fubftituant cette valeur de cof. π dans l'une des valeurs de $\frac{1}{p}$, j'aurai $p = \frac{Aa^2 + Bb^2}{Bb\,\text{fin.}\,\alpha}\,\text{fin.}\,\pi$.

Donc enfin $\text{fin.}\,\pi = \frac{Bb\,\text{fin.}\,\alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + B^2b^2)}}$;

$$\text{cof.}\,\pi = \frac{Aa + Bb\,\text{cof.}\,\alpha}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + B^2b^2)}},$$

$$p = \frac{Aa^2 + Bb^2}{\sqrt{(A^2a^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + B^2b^2)}}.$$

Si le plan eft doué de trois points maffifs A, B, C, je fais $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $AOB = \alpha$, $AOC = \alpha'$, $BOC = \alpha' - \alpha = \zeta$, & menant l'horizontale Oa, je fais l'angle $aOA = x$, l'angle aOB fera $= \alpha + x$, l'angle $aOC = \alpha' + x$.

Si le point maffif A étoit feul, la force qui l'accéléreroit autour de O feroit $= \text{cof.}\,x$, & par conféquent celle qui accéléreroit la ligne OA feroit $= \frac{\text{cof.}\,x}{a}$.

Si le point B étoit feul, la force qui l'accéléreroit autour de O feroit $= \text{cof.}\,(\alpha + x)$, & par conféquent celle qui accéléreroit la ligne OB feroit $= \frac{\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x}{b}$.

Enfin fi le point maffif C étoit feul, la force qui l'accéléreroit autour de O feroit $= \text{cof.}\,(\alpha' + x)$, & par conféquent celle qui accéléreroit la ligne OC feroit $= \frac{\text{cof.}\,\alpha'\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\alpha'\,\text{fin.}\,x}{c}$.

Soit la force qui accélérera $OA = \frac{\text{cof.}\,x}{a} + e$, celle qui accélérera $OB = \frac{\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x}{b} + f$, celle qui

accélérera $OC = \frac{\text{cof.}\,\alpha'\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\alpha'\,\text{fin.}\,x}{c} + h$, & celle qui accélérera le plan $= \varphi$;

on aura $\frac{\text{cof.}\,x}{a} + e = \varphi$, $\frac{\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x}{b} + f = \varphi$, $\frac{\text{cof.}\,\alpha'\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\alpha'\,\text{fin.}\,x}{c} + h = \varphi$.

D'ailleurs, la force de OA, pour n'être pas à une diftance e de fon état, eft $= Aa^2e$; celle de OB, pour n'être pas à une diftance f du fien, eft $= Bb^2f$, & celle de OC, pour n'être pas à une diftance h du fien, eft $= Cc^2h$. Ces trois forces fe vaincront mutuellement, ou feront en équilibre; par conféquent, on aura $Aa^2e + Bb^2f + Cc^2h = 0$, ou $Aa^2(\varphi - \frac{\text{cof.}\,x}{a}) + Bb^2(\varphi - \frac{\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x}{b}) + Cc^2(\varphi - \frac{\text{cof.}\,\alpha'\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\alpha'\,\text{fin.}\,x}{c}) = 0$; donc $\varphi = \frac{Aa\,\text{cof.}\,x + Bb\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - Bb\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x + Cc\,\text{cof.}\,\alpha'\,\text{cof.}\,x - Cc\,\text{fin.}\,\alpha'\,\text{fin.}\,x}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$.

Trouver le point P, dont la vîteffe eft à tout inftant la même que fi les points A, B, C, n'étant pas des points maffifs, il étoit un point maffif.

Soit $OP = p$, l'angle $AOP = \pi$, l'angle aOP fera $= \pi + x$; la force qui accéléreroit P autour de O, eft $= \text{cof.}\,(\pi + x)$, & par conféquent la force qui accéléreroit $OP = \frac{\text{cof.}\,\pi\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\pi\,\text{fin.}\,x}{p}$;

on aura $\frac{\text{cof.}\,\pi\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\pi\,\text{fin.}\,x}{p} = \frac{Aa\,\text{cof.}\,x + Bb\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - Bb\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x + Cc\,\text{cof.}\,\alpha'\,\text{cof.}\,x - Cc\,\text{fin.}\,\alpha'\,\text{fin.}\,x}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$. En différenciant, & ne faifant varier que x, on aura $\frac{-\text{cof.}\,\pi\,\text{fin.}\,x - \text{fin.}\,\pi\,\text{cof.}\,x}{p} = \frac{-Aa\,\text{fin.}\,x - Bb\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x - Bb\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - Cc\,\text{cof.}\,\alpha'\,\text{fin.}\,x - Cc\,\text{fin.}\,\alpha'\,\text{cof.}\,x}{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}$

En égalant les deux valeurs de $\frac{1}{p}$, on aura

$$\frac{Aa\,\text{cof.}\,x + Bb\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x - Bb\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x + Cc\,\text{cof.}\,\alpha'\,\text{cof.}\,x - Cc\,\text{fin.}\,\alpha'\,\text{fin.}\,x}{\text{cof.}\,\pi\,\text{cof.}\,x - \text{fin.}\,\pi\,\text{fin.}\,x} =$$

$$\frac{Aa\,\text{fin.}\,x + Bb\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{fin.}\,x + Bb\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,x + Cc\,\text{cof.}\,\alpha'\,\text{fin.}\,x + Cc\,\text{fin.}\,\alpha'\,\text{cof.}\,x}{\text{cof.}\,\pi\,\text{fin.}\,x + \text{fin.}\,\pi\,\text{cof.}\,x},$$

d'où l'on tirera $\text{cof.}\,\pi = \frac{Aa + Bb\,\text{cof.}\,\alpha + Cc\,\text{cof.}\,\alpha'}{Bb\,\text{fin.}\,\alpha + Cc\,\text{fin.}\,\alpha'}\,\text{fin.}\,\pi$;
& en fubftituant cette valeur de $\text{cof.}\,\pi$ dans l'une des valeurs de $\frac{1}{p}$, on aura $p = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{Bb\,\text{fin.}\,\alpha + Cc\,\text{fin.}\,\alpha'}\,\text{fin.}\,\pi$. Donc enfin

$$\text{fin.}\,\pi = \frac{Bb\,\text{fin.}\,\alpha + Cc\,\text{fin.}\,\alpha'}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + 2AaCc\,\text{cof.}\,\alpha' + 2BbCc\,\text{cof.}\,\mathcal{C})}},$$

$$\text{cof.}\,\pi = \frac{Aa + Bb\,\text{cof.}\,\alpha + Cc\,\text{cof.}\,\alpha'}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}},\quad p = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}.$$

Si le plan eft doué de quatre points maffifs A, B, C, D, en faifant $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, $AOB = \alpha$, $AOC = \alpha'$, $AOD = \alpha''$, $BOC = \mathcal{C}$, $BOD = \mathcal{C}'$, $COD = \gamma$, $OP = p$, $AOP = \pi$, on aura

$$\text{fin.}\,\pi = \frac{Bb\,\text{fin.}\,\alpha + Cc\,\text{fin.}\,\alpha' + Dd\,\text{fin.}\,\alpha''}{\sqrt{(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + D^2d^2 + 2AaBb\,\text{cof.}\,\alpha + 2AaCc\,\text{cof.}\,\alpha' + 2AaDd\,\text{cof.}\,\alpha'' + 2BbCc\,\text{cof.}\,\mathcal{C} + 2BbDd\,\text{cof.}\,\mathcal{C}' + 2CcDd\,\text{cof.}\,\gamma)}},$$

$$\text{cof.}\,\pi = \frac{Aa + Bb\,\text{cof.}\,\alpha + Cc\,\text{cof.}\,\alpha' + Dd\,\text{cof.}\,\alpha''}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}},$$

$$p = \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2}{\sqrt{(A^2a^2 + \&c.)}}.$$

Le point P fe nomme le centre d'ofcillation de l'efpace AOB, & l'on voit qu'il eft le même que le centre de force N de ce même efpace.

XVII.

Un efpace plan roide PON (*fig. 32*) dénué d'inertie & doué de points maffifs, fe meut dans le plan PON autour de

l'axe O perpendiculaire à ce plan, & cet eſpace reçoit un coup au point P dans la direction Pp.

Soit N le point & la particule maſſive dont la force eſt le réſultat des forces de tous les points maſſifs dont l'eſpace PON eſt doué.

Je mène PT perpendiculaire à Pp que je ſuppoſe qui rencontre la ligne NO au point T.

Je fais $ON = n$, $OP = p$, l'angle $OPT = \pi$, $OTP = \theta$, $PON = \alpha$, le coup que reçoit l'eſpace $PON = C$, la vîteſſe angulaire de cet eſpace avant de recevoir ce coup $= V$, ſa vîteſſe angulaire après l'avoir reçû $= V + v$. Le coup C peut être regardé comme étant le réſultat de deux autres coups, l'un dans la direction PO, & l'autre dans la direction PB perpendiculaire à PO; on aura le coup dans la direction $PO = C \text{ ſin. } \pi$, celui dans la direction $PB = C \text{ coſ. } \pi$. On aura $pC \text{ coſ. } \pi = Nn^2 v$; donc $v = \frac{pC \text{ coſ. } \pi}{Nn^2}$.

La force de N dans la direction Nr perpendiculaire à ON eſt $= Nnv = \frac{pC \text{ coſ. } \pi}{n}$.

Soit D le point d'interſection des directions Nr, PB, & ſoit priſe ſur PD prolongée $DE : DN$ comme la force dans la direction PB à la force dans la direction Nr, c'eſt-à-dire, $DE : DN :: C \text{ coſ. } \pi : \frac{pC \text{ coſ. } \pi}{n} :: n : p$.

DE & DN étant les directions & les meſures des forces de P & de N, la diagonale DF du parallélogramme $NDEF$ ſera la direction & la meſure de la force réſultante de ces deux forces; on aura $\text{coſ. } \alpha : \text{ſin. } \alpha :: p : PB = \frac{p \text{ ſin. } \alpha}{\text{coſ. } \alpha}$, $\text{coſ. } \alpha : 1 :: p : OB = \frac{p}{\text{coſ. } \alpha}$; donc $BN = \frac{n \text{ coſ. } \alpha - p}{\text{coſ. } \alpha}$.

On

On aura $\text{fin.}\,\alpha : \text{cof.}\,\alpha :: BN : DN = \frac{n\,\text{cof}\,\alpha - p}{\text{fin.}\,\alpha}$; donc $DE = \frac{n(n\,\text{cof}\,\alpha - p)}{p\,\text{fin.}\,\alpha}$, $\text{fin.}\,\alpha : 1 :: BN : BD = \frac{n\,\text{cof.}\,\alpha - p}{\text{fin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\alpha}$; donc $BE = \frac{n^2(\text{cof.}\,\alpha)^2 - p^2}{p\,\text{fin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\alpha}$.

On aura $1 : \text{fin.}\,\alpha :: BE : BH = \frac{n^2(\text{cof.}\,\alpha)^2 - p^2}{p\,\text{cof.}\,\alpha}$; donc NH ou $DG = \frac{n(n\,\text{cof.}\,\alpha - p)}{p}$, $1 : \text{cof.}\,\alpha :: BE : 2DN + GF$; donc $GF = \frac{(n\,\text{cof.}\,\alpha - p)^2}{p\,\text{fin.}\,\alpha}$, $DF = \frac{n\,\text{cof.}\,\alpha - p}{p\,\text{fin.}\,\alpha}\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cof.}\,\alpha + p^2)}$, & le coup dans la direction $DF = \frac{C\,\text{cof.}\,\pi}{n}\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cof.}\,\alpha + p^2)}$. L'on trouvera que $FG : GD :: DN : NO$, & que par conséquent la direction DF paſſe par l'axe O; on aura $OD = \frac{\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cof.}\,\alpha + p^2)}}{\text{fin.}\,\alpha}$; donc $\text{fin.}\,POD = \frac{n - p\,\text{cof.}\,\alpha}{\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cof.}\,\alpha + p^2)}}$, $\text{cof.}\,POD = \frac{p\,\text{fin.}\,\alpha}{\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cof.}\,\alpha + p^2)}}$.

Soit priſe ſur PO prolongée $OK : OD$ comme le coup que reçoit l'axe O dans la direction PO au coup qu'il reçoit dans la direction OD, la diagonale OL du parallélogramme $OKLD$ ſera la direction & la meſure du coup réſultant de ces deux coups; on aura $OK = \frac{n\,\text{fin.}\,\pi}{\text{cof.}\,\pi\,\text{fin.}\,\alpha}$.

Du point L je mène à OD la perpendiculaire LI, on aura $1 : \text{fin.}\,POD :: OK : LI = \frac{n\,\text{fin.}\,\pi\,(n - p\,\text{cof.}\,\alpha)}{\text{cof.}\,\pi\,\text{fin.}\,\alpha\,\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cof.}\,\alpha + p^2)}}$, $1 : \text{cof.}\,POD :: LD : DI = \frac{np\,\text{fin.}\,\pi}{\text{cof.}\,\pi\,\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cof.}\,\alpha + p^2)}}$; donc $OI = \frac{\text{cof.}\,\pi\,(n^2 - 2np\,\text{cof.}\,\alpha + p^2) - np\,\text{fin.}\,\pi\,\text{fin.}\,\alpha}{\text{cof.}\,\pi\,\text{fin.}\,\alpha\,\sqrt{(n^2 - 2np\,\text{cof.}\,\alpha + p^2)}}$,

$pC \text{ cof. } OPT = (Ee^2 + Ff^2)v$, & la vîteſſe du point P autour de O ſera $= \frac{p^2 C \text{ cof. } OPT}{Ee^2 + Ff^2}$.

Le point P commun aux corps A & B ne doit avoir après le choc qu'une ſeule vîteſſe dans la direction APp; par conſéquent on aura $\alpha - \frac{C}{A} = \pi + \frac{C}{B} + \frac{p^2 C . (\text{cof. } OPT)^2}{Ee^2 + Ff^2}$; donc $C = \frac{AB\,(Ee^2 + Ff^2)\,(\alpha - \pi)}{(A + B).(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2 (\text{cof. } OPT)^2}$.

La vîteſſe de la boule A dans la direction Pp ſera donc $= \alpha - \frac{B.(Ee^2 + Ff^2).(\alpha - \pi)}{(A + B).(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2 (\text{cof. } OPT)^2}$, celle du corps B dans la même direction ſera $= \pi + \frac{A.(Ee^2 + Ff^2).(\alpha - \pi)}{(A + B).(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2 (\text{cof. } OPT)^2}$, & ſa vîteſſe angulaire autour de O ſera $= \frac{p \text{ cof. } OPT . AB . (\alpha - \pi)}{(A + B).(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2 (\text{cof. } OPT)^2}$.

Si les corps A & B ſont des corps à reſſort, & ſi leur reſſort eſt infiniment roide, ils recevront dans le ſecond inſtant un coup égal à celui qu'ils auront reçû dans le premier.

La vîteſſe de la boule A dans la direction Pp ſera donc $= \alpha - \frac{2B\,(Ee^2 + Ff^2)\,(\alpha - \pi)}{(A + B)\,(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2 (\text{cof. } OPT)^2}$, celle du corps B dans la même direction ſera $= \pi + \frac{2A\,(Ee^2 + Ff^2)\,(\alpha - \pi)}{(A + B)\,(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2 (\text{cof. } OPT)^2}$, & la vîteſſe angulaire de B autour de O ſera $= \frac{2p \text{ cof. } OPT . AB . (\alpha - \pi)}{(A + B)\,(Ee^2 + Ff^2) + ABp^2 (\text{cof. } OPT)^2}$.

XIX.

Deux figures planes roides A, A' (*fig. 34*) dénuées d'inertie, & douées de points maſſifs, ſe meuvent dans le plan $OAA'O'$ autour des axes roides immobiles O, O', perpendiculaires à ce plan, & ſe choquent au point P dans la direction APA' perpendiculaire à leur circonférence ou à la tangente Tt de ces circonférences au point P.

Soit N le point & la particule maſſive dont la force eſt le réſultat des forces de tous les points maſſifs dont A eſt doué, & N' le point & la particule maſſive dont la force eſt le réſultat des forces de tous les points maſſifs dont A' eſt doué.

Soit $ON = n$, $OP = p$, l'angle $OPT = \alpha$, $OTP = \beta$, la vîteſſe angulaire de A autour de O avant le choc $= a$, & après le choc $= a - v$.

$O'N' = n'$, $O'P = p'$, l'angle $O'PT' = \alpha'$, $O'T'P = \beta'$, la vîteſſe angulaire de A' autour de O' avant le choc $= a'$, & après le choc $= a' + v'$.

Le coup que reçoit le corps A dans la direction PA eſt égal à celui que reçoit le corps A' dans la direction PA'. Soit ce coup $= C$, le point P commun aux deux corps ne doit avoir qu'une ſeule vîteſſe dans la direction PA' après le choc.

Par conſéquent on aura

$p.(a - v).\text{coſ.}\,\alpha = p'.(a' + v').\text{coſ.}\,\alpha'$; mais $v = \frac{pC\,\text{coſ.}\,\alpha}{Nn^2}$, $v' = \frac{p'C\,\text{coſ.}\,\alpha'}{N'n'^2}$; donc $C = \frac{pa\,\text{coſ.}\,\alpha - p'a'\,\text{coſ.}\,\alpha'}{\frac{p^2(\text{coſ.}\,\alpha)^2}{Nn^2} + \frac{p'^2(\text{coſ.}\,\alpha')^2}{N'n'^2}}$.

La vîteſſe angulaire de A après le choc ſera donc

$= a - \frac{p\,\text{coſ.}\,\alpha}{Nn^2} \cdot \frac{pa\,\text{coſ.}\,\alpha - p'a'\,\text{coſ.}\,\alpha'}{\frac{p^2(\text{coſ.}\,\alpha)^2}{Nn^2} + \frac{p'^2(\text{coſ.}\,\alpha')^2}{N'n'^2}}$, celle de

A' ſera $= a' + \frac{p'\,\text{coſ.}\,\alpha'}{N'n'^2} \cdot \frac{pa\,\text{coſ.}\,\alpha - p'a'\,\text{coſ.}\,\alpha'}{\frac{p^2(\text{coſ.}\,\alpha)^2}{Nn^2} + \frac{p'^2(\text{coſ.}\,\alpha')^2}{N'n'^2}}$,

Le coup que recevra l'axe O sera $=$

$$\frac{\sqrt{[n^2 - 2np \operatorname{cof.} \alpha \operatorname{cof.} \beta + p^2 (\operatorname{cof.} \alpha)^2]}}{n} \cdot \frac{pa \operatorname{cof.} \alpha - p'a' \operatorname{cof.} \alpha'}{\frac{p^2 (\operatorname{cof.} \alpha)^2}{Nn^2} + \frac{p'^2 (\operatorname{cof.} \alpha')^2}{N'n'^2}};$$

& OL étant la direction de ce coup, le sinus de l'angle POL sera $= \frac{\operatorname{cof.} \alpha . (n - p \operatorname{cof.} AOP)}{\sqrt{[n^2 - 2np \operatorname{cof.} \alpha \operatorname{cof.} \beta + p^2 (\operatorname{cof.} \alpha)^2]}}$, & son cosinus sera $= \frac{p \operatorname{cof.} \alpha \operatorname{fin.} AOP - n \operatorname{fin.} \alpha}{\sqrt{[n^2 - 2np \operatorname{cof.} \alpha \operatorname{cof.} \beta + p^2 (\operatorname{cof.} \alpha)^2]}}$.

Le coup que recevra l'axe O' sera $=$

$$\frac{\sqrt{[n'^2 - 2n'p' \operatorname{cof.} \alpha' \operatorname{cof.} \beta' + p'^2 (\operatorname{cof.} \alpha')^2]}}{n'} \cdot \frac{pa \operatorname{cof.} \alpha - p'a' \operatorname{cof.} \alpha'}{\frac{p^2 (\operatorname{cof.} \alpha)^2}{Nn^2} + \frac{p'^2 (\operatorname{cof.} \alpha')^2}{N'n'^2}};$$

& $O'L'$ étant la direction de ce coup, le sinus de l'angle $PO'L'$ sera $= \frac{\operatorname{cof.} \alpha' . (n' - p' \operatorname{cof.} PO'A')}{\sqrt{[n'^2 - 2n'p' \operatorname{cof.} \alpha' \operatorname{cof.} \beta' + p'^2 (\operatorname{cof.} \alpha')^2]}}$, & son cosinus sera $= \frac{p' \operatorname{cof.} \alpha' \operatorname{fin.} PO'A' - n' \operatorname{fin.} \alpha'}{\sqrt{[n'^2 - 2n'p' \operatorname{cof.} \alpha' \operatorname{cof.} \beta' + p'^2 (\operatorname{cof.} \alpha')^2]}}$.

X X.

Une ligne roide OAB (*fig. 35*) dénuée d'inertie & douée de deux points maſſifs A, B, ſe meut dans le plan OBb autour de l'axe O perpendiculaire à ce plan, & cet axe vient à manquer tout-à-coup.

Soit $OA = a$, $OB = b$, la vîteſſe angulaire de OB autour de $O = V$.

La vîteſſe de A dans la direction Aa perpendiculaire à OB eſt $= aV$; celle de B dans la direction Bb parallèle à Aa eſt $= bV$.

Je regarde la ligne AB comme en repos & comme recevant au point A dans la direction Aa un coup $= A . aV$, & au point B dans la direction Bb un coup $= B . bV$.

Soit C le centre de force des points maſſifs A, B, par rapport à un axe infiniment diſtant, on aura $OC = \frac{Aa + Bb}{A + B}$, $CA = \frac{B . (b - a)}{A + B}$, $CB = \frac{A . (b - a)}{A + B}$.

Le coup que reçoit le point C dans la direction Cc parallèle à Aa eſt $= AaV + BbV$; la vîteſſe de ce point dans cette direction ſera donc $= \frac{(Aa + Bb)V}{A + B}$, comme auparavant.

Soit la vîteſſe angulaire de AB autour de $C = v$, on aura $BbV . \frac{A.(b - a)}{A + B} - AaV . \frac{B.(b - a)}{A + B} = (A . \frac{B^2.(b - a)^2}{(A + B)^2} + B . \frac{A^2.(b - a)^2}{(A + B)^2})v$, ou $v = V$.

SECTION CINQUIÉME.

I.

DE même qu'un corps ſeul dans l'eſpace ſe mouvroit éternellement avec la même vîteſſe & dans la même direction, le centre de force d'un ſyſtème quelconque de corps, ſeul dans l'eſpace, ſe mouvroit auſſi toûjours avec la même vîteſſe & dans la même direction.

Soient les corps $A, B, C, D, E,$ &c. ſe mouvans dans l'eſpace.

Concevons 1.° que non ſeulement ces corps ne rencontrent aucun obſtacle étranger à leur ſyſtème, mais même qu'ils ne peuvent ſe nuire les uns aux autres, & que chacun d'eux ſe meut auſſi librement que s'il étoit ſeul.

Je dis que le centre de force de tous ces corps ſe mouvera uniformément en ligne droite.

Je vais démontrer que le centre de force de deux quelconques de ces corps, ſe mouvera uniformément en ligne droite, & j'en conclurai que le centre de force de tout le ſyſtème ſe mouvera de même.

Soient donc les deux corps A & B (*fig. 36*) & ſoient Aa, Bb les vîteſſes & les directions de ces corps.

Je marque ſur leur diſtance AB le point G que je ſuppoſe être leur centre de force, & de ce point je mène $G\alpha$ égal & parallèle à Aa, $G\mathfrak{b}$ égal & parallèle à Bb; enſuite je

mène les lignes ab, $\alpha\beta$, qui étant toutes les deux dans le plan des parallèles $a\alpha$, $b\beta$, se couperont en un point g. Ce point sera le centre de force des corps a & b, & Gg sera la direction & la vîtesse de ce centre; car à cause des triangles semblables $ag\alpha$, $bg\beta$, on aura $ag : bg :: \alpha g : \beta g :: a\alpha : b\beta :: AG : BG$.

Anéantissez par la pensée les corps A & B, & concevez en même temps au centre de leur force un corps $A' = A + B$, le centre de force des corps A' & C se mouvera uniformément en ligne droite.

Anéantissez les corps A' & C, & concevez en même temps au centre de leur force un corps $B' = A' + C = A + B + C$, le centre de force des corps B & D se mouvera uniformément en ligne droite, & ainsi de suite.

Par conséquent, dans cette hypothèse, le centre de force d'un systême quelconque de corps se mouvera uniformément en ligne droite.

Concevons 2.° que deux, trois ou quatre, &c. de ces corps se rencontrant au même instant, leurs états soient incompatibles entr'eux, si je démontre que dans cet instant le centre de force de ces deux, trois ou quatre corps, &c. ne sera point dérangé, il sera démontré que le centre de force de tout le systême ne le sera jamais.

La direction & la vîtesse du centre de force G (*fig. 37*) de plusieurs corps, étant Gg, pour que la direction & la vîtesse de ce point soient $G\gamma$, il faut une impulsion dont la mesure est le produit de la masse de tous ces corps par $g\gamma$, & dont la direction est $g\gamma$, ou il en faut plusieurs dont le résultat soit tel que nous venons de le dire; mais dans la rencontre de plusieurs corps ensemble, les forces de ces corps s'entredétruisant mutuellement, ou étant en équilibre, (*Section 3.me, art. III*) le résultat de toutes les impulsions qui se font, est $= 0$ dans toutes les directions possibles; par conséquent, dans cette rencontre le centre de force de ces corps ne souffrira aucun dérangement, & sa vîtesse & sa direction continueront d'être Gg.

II.

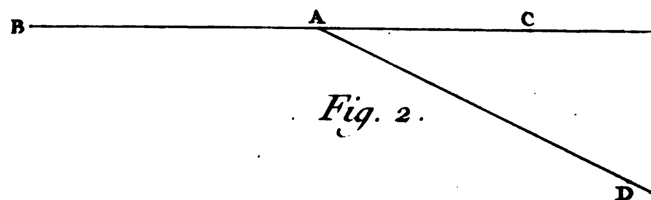


Fig. 2.

Fig. 1.

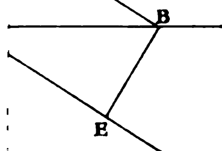


Fig. 3.

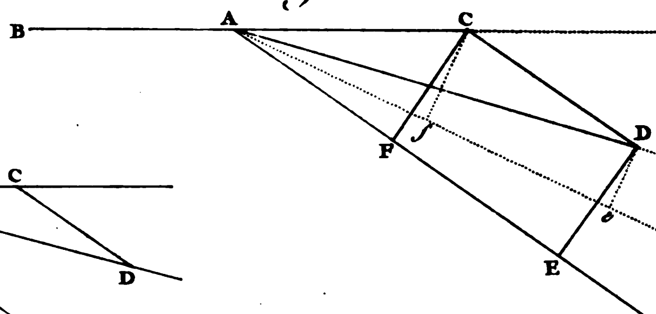


Fig. 4

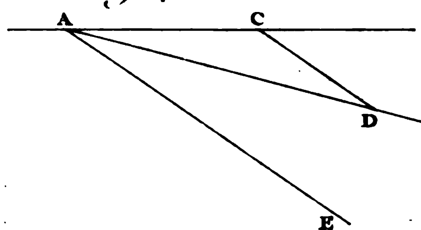


Fig. 6.

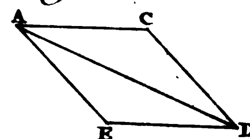


Fig. 5.

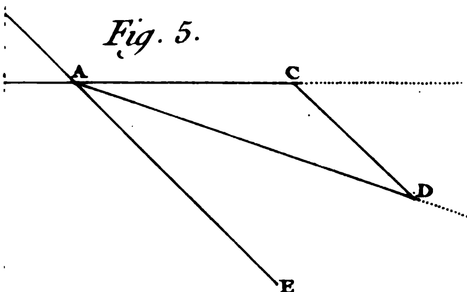
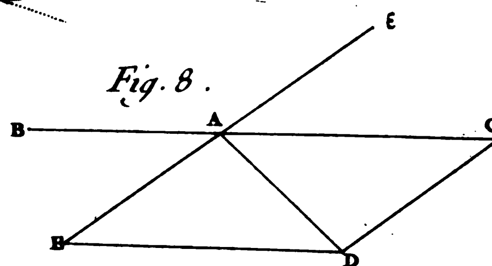
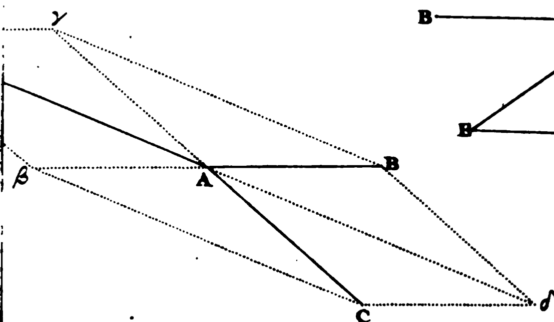


Fig. 8.





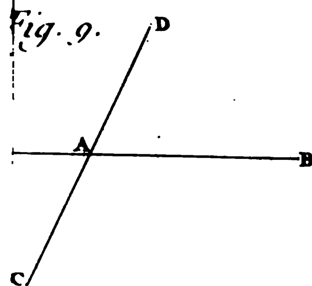


Fig. 9.

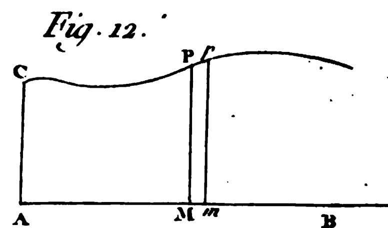


Fig. 12.

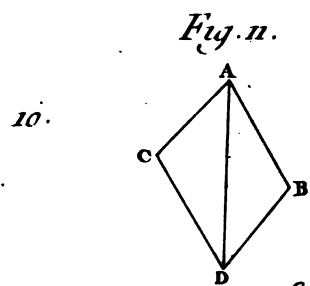


Fig. 11.

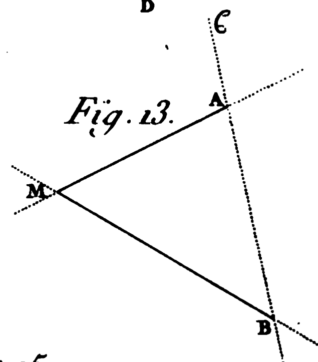


Fig. 13.

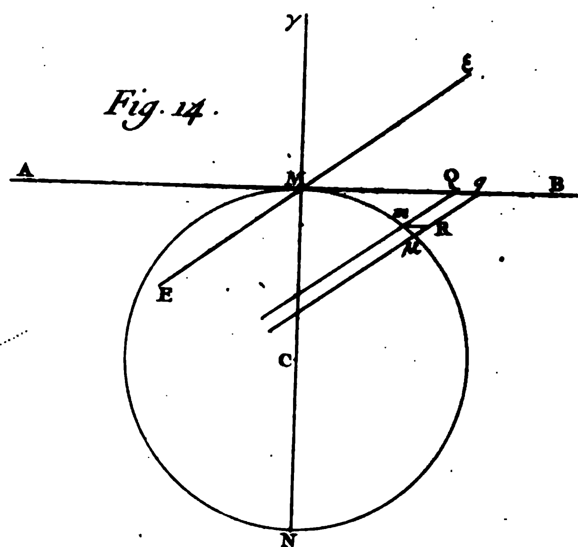


Fig. 14.

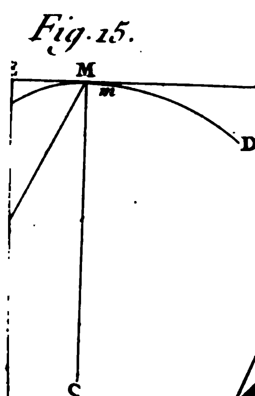


Fig. 15.

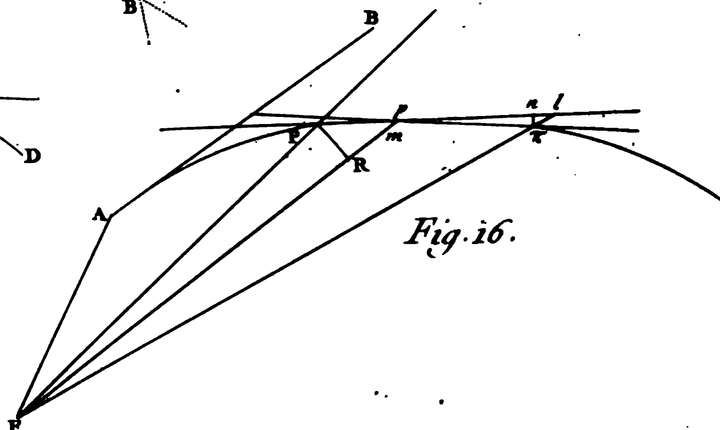
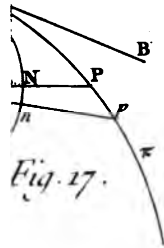
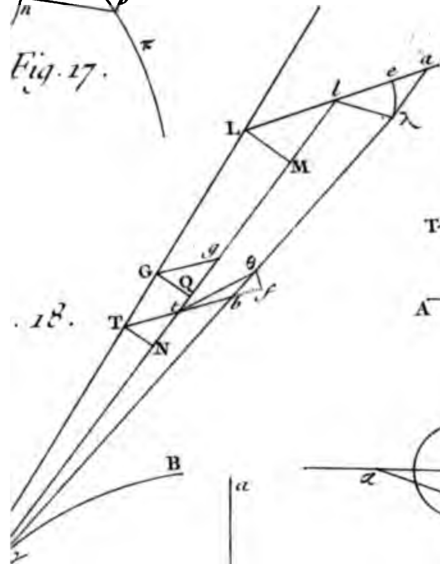
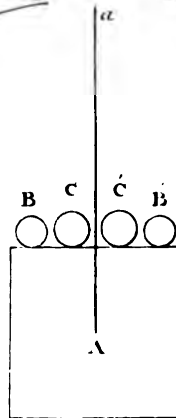


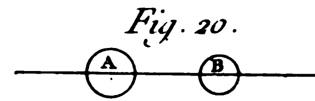
Fig. 16.

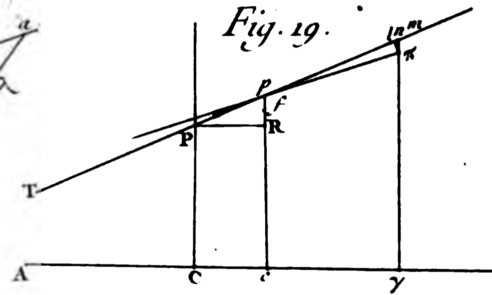


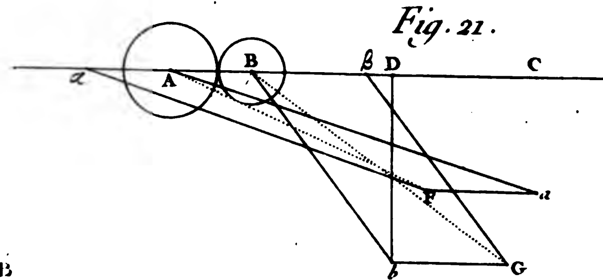

B
N
P
p
n
π
Fig. 17.

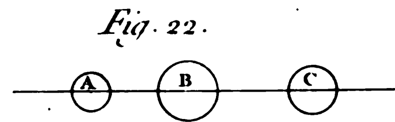

a
e
l
L
λ
M
g
G
Q
θ
f
T
t
b
N
. 18.
B

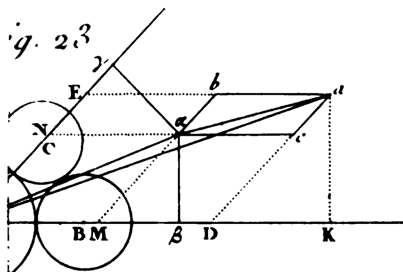

a
B
C
C
B
Fig. 24.
A

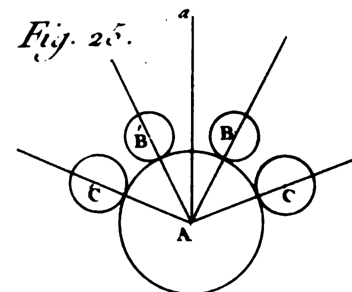

Fig. 20.
A
B

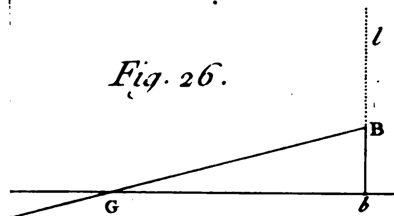

Fig. 19.
π
p
f
P
R
T
A
C
c
γ

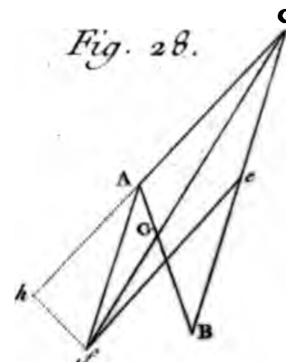

Fig. 21.
α
A
B
β
D
C
F
a
b
G

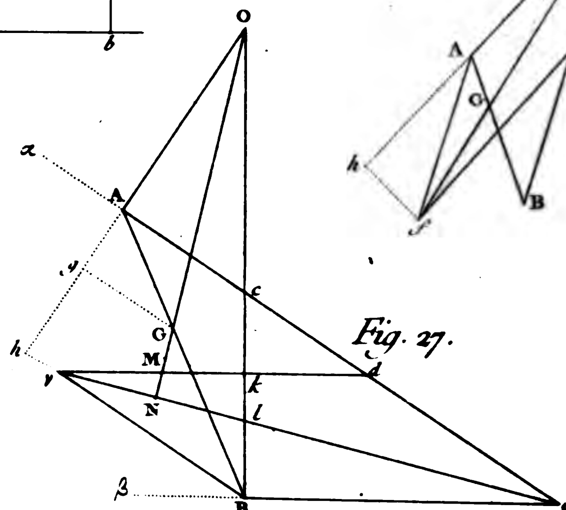

Fig. 22.
A
B
C

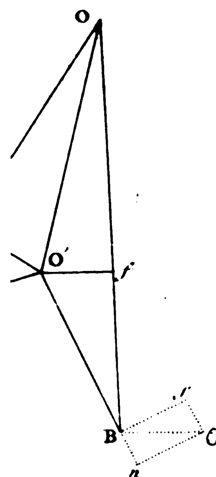

γ
E
b
a
N
C
α
c
BM
β
D
K

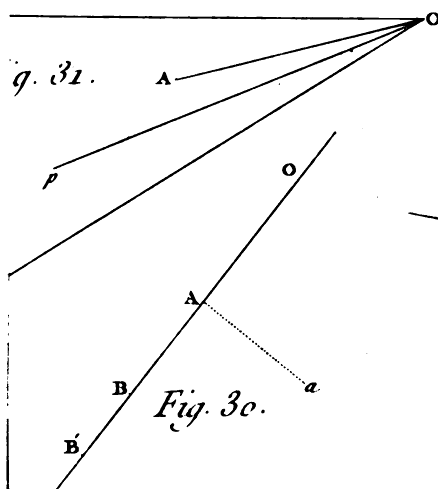

Fig. 25.
a
B
B
C
C
A

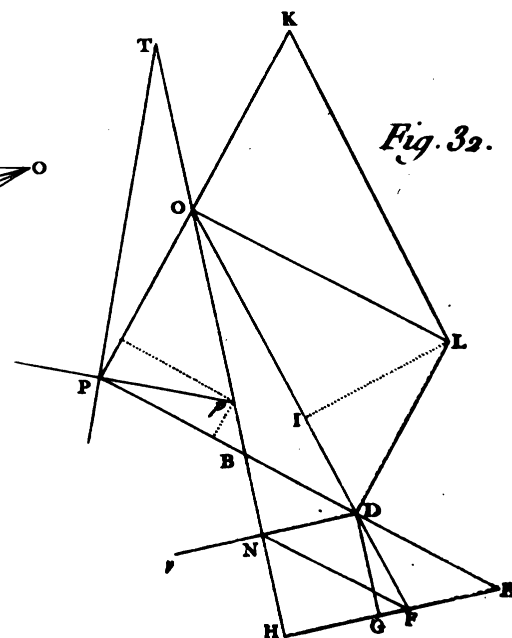

Fig. 26.
l
B
G
b


Fig. 28.
O
A
e
G
h
B
f


O
α
A
c
G
h
M
Fig. 27.
γ
k
d
N
l
β
B
e


O
O′
f
B
C
n


O
q. 31.
A
p
O
A
a
B
B′
Fig. 30.


K
T
Fig. 32.
O
L
P
I
B
D
N
H
G
F
R





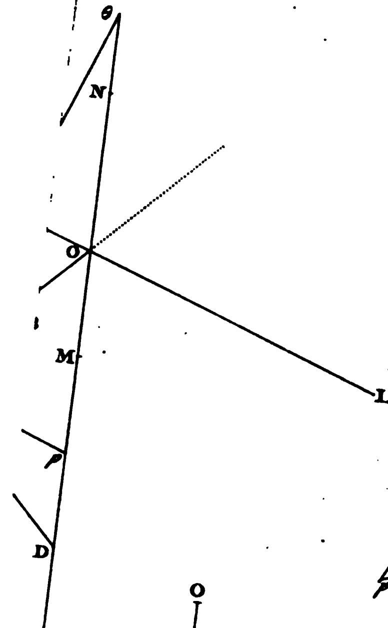


Fig. 33.

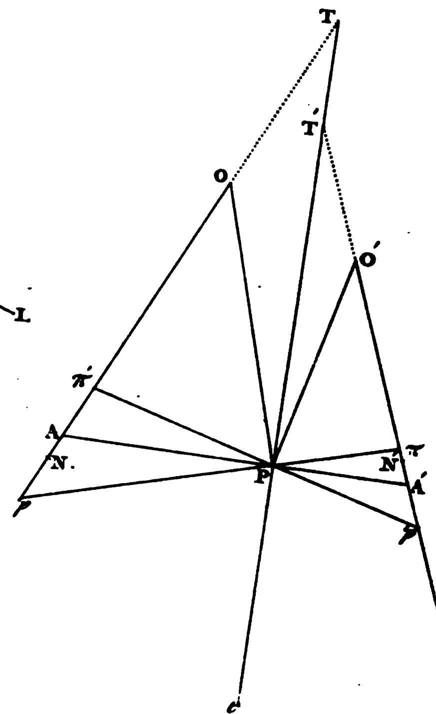


Fig. 34.

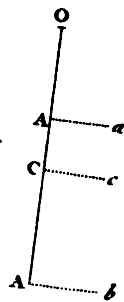


Fig. 35.

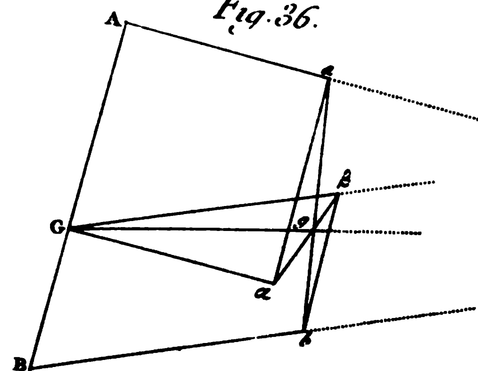
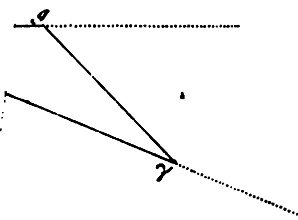


Fig. 36.

7.







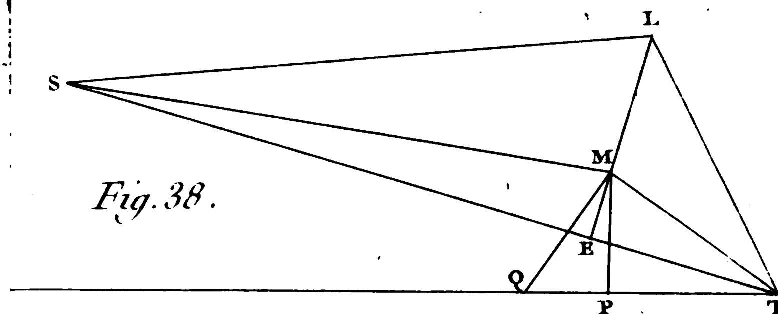


Fig. 38.

Fig. 39.

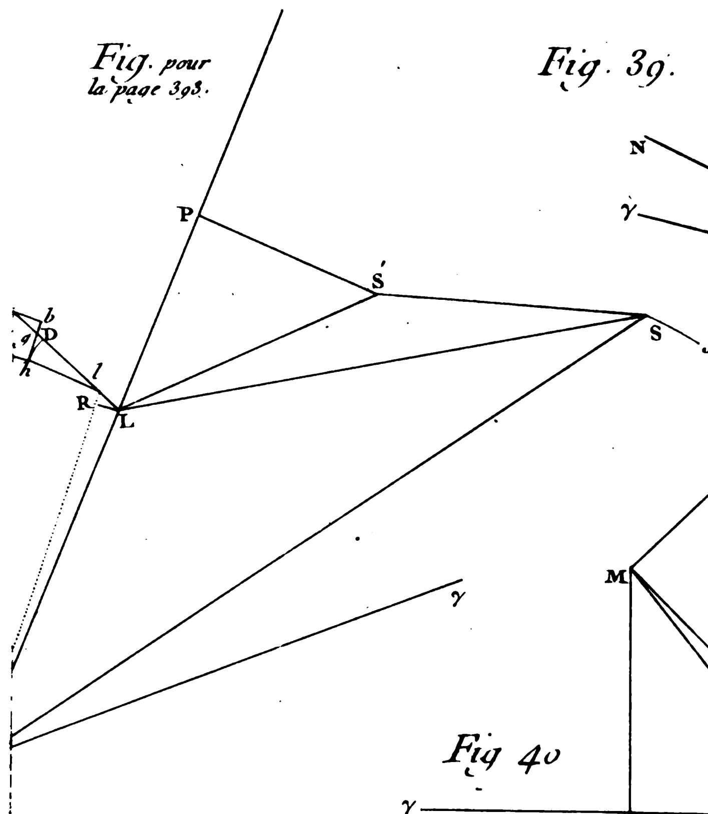


Fig. pour la page 393.

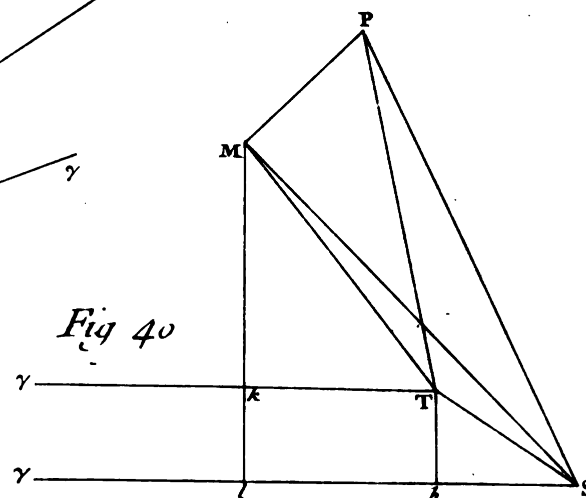


Fig 40

II.

Soient les corps $A, B, C, D, E,$ &c. & soient $Aa, Bb, Cc, Dd, Ee,$ &c. les directions & les vîtesses de ces corps, pour avoir la direction & la vîtesse de leur centre de force.

Soit la masse de tous ces corps $= M$; d'un point quelconque P, je mène $P\alpha$ parallèle à Aa & $= \frac{A.Aa}{M}$, $P\beta$ parallèle à Bb & $= \frac{B.Bb}{M}$, $P\gamma$ parallèle à Cc & $= \frac{C.Cc}{M}$, $P\delta$ parallèle à Dd & $= \frac{D.Dd}{M}$, $P\varepsilon$ parallèle à Ee & $= \frac{E.Ee}{M}$, &c. la dernière diagonale Pp de toutes ces lignes sera parallèle à la direction du centre de force de tous ces corps, & elle sera égale à la vîtesse de ce centre.

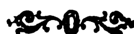
III.

Qu'un quelconque D des corps de ce système reçoive dans la direction Dd' un coup $D.Dd'$, du point P je mène $P\delta'$ parallèle à Dd' & $= \frac{D.Dd'}{M}$, la diagonale Pp' du parallélogramme $Ppp'\delta'$ sera la direction & la vîtesse du centre de force des corps $A, B, C, D, E,$ &c. après ce coup.

IV.

Qu'un, ou deux, ou trois, ou quatre, &c. des corps de ce système reçoivent au même instant chacun un ou plusieurs corps, du point P je mène une ligne parallèle à la direction de chaque coup & égale à ce coup divisé par M; la dernière diagonale de toutes ces lignes sera la direction du coup que recevra dans cet instant le centre de force de tout ce système, & le produit de cette ligne par M sera égal à ce coup.

Si tous ces coups sont en équilibre, comme il arrive lorsque plusieurs corps se repoussent ou s'attirent, ou se repoussent & s'attirent en même temps, cette dernière diagonale sera $= 0$, & par conséquent le coup que recevra le centre de force de tout le système, sera nul dans toutes les directions possibles.





NOUVELLE MÉTHODE *D'APPROXIMATION,*

Pour la ſolution des Problèmes qui ſe réduiſent aux Quadratures.

L'INTÉGRALE de l'élément ydx, y étant une fonction quelconque de x, eſt égale au produit de $\frac{1}{2^{n-1}}x$ par une ſuite, dont on aura le premier terme, en mettant $\frac{1}{2^n}x$ au lieu de x dans la fonction donnée y; le ſecond, en y mettant $\frac{3}{2^n}x$; le troiſième, en y mettant $\frac{5}{2^n}x$; le quatrième, en mettant $\frac{7}{2^n}x$; le cinquième, en y mettant $\frac{9}{2^n}x$, &c. le dernier, en y mettant $\frac{2^n-1}{2^n}x$, d'autant plus exactement que le nombre entier poſitif n ſera plus grand.

EXEMPLE PREMIER.

Suivant cette règle, on aura

$$\int \sqrt{(2x-x^2)}\,.\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}x \Big(\sqrt{[2\,.\,\tfrac{1}{2^n}x-(\tfrac{1}{2^n}x)^2]}+\sqrt{[2\,.\,\tfrac{3}{2^n}x-(\tfrac{3}{2^n}x)^2]}+\sqrt{[2\,.\,\tfrac{5}{2^n}x-(\tfrac{5}{2^n}x)^2]}+\sqrt{[2\,.\,\tfrac{7}{2^n}x-(\tfrac{7}{2^n}x)^2]}+\sqrt{[2\,\tfrac{9}{2^n}x-(\tfrac{9}{2^n}x)^2]}+\&c.+\sqrt{[2\,.\,\tfrac{2^n-1}{2^n}x-(\tfrac{2^n-1}{2^n}x)^2]}\Big)$$

ou

$$\int \sqrt{(2x-x^2)}\,dx = \frac{1}{2^{2n-1}}x\Big[\sqrt{(2^{n+1}x-x^2)}+\sqrt{(2^{n+1}3x-3^2x^2)}+\sqrt{(2^{n+1}5x-5^2x^2)}+\sqrt{(2^{n+1}7x-7^2x^2)}+\sqrt{(2^{n+1}9x-9^2x^2)}+\&c.+\sqrt{[2^{n+1}(2^n-1)x-(2^n-1)^2x^2]}\Big]$$

d'autant plus exactement que n ſera plus grand.

Soit, par exemple, $x = 1$ & $n = 5$, l'aire d'un cercle dont le rayon est 1 sera $= \frac{1}{2^7}\left[\sqrt{(63.1)} + \sqrt{(61.3)} + \sqrt{(59.5)} + \sqrt{(57.7)} + \sqrt{(55.9)} + \sqrt{(53.11)} + \sqrt{(51.13)} + \sqrt{(49.15)} + \sqrt{(47.17)} + \sqrt{(45.19)} + \sqrt{(43.21)} + \sqrt{(41.23)} + \sqrt{(39.25)} + \sqrt{(37.27)} + \sqrt{(35.29)} + \sqrt{(33.31)}\right]$. Soit $n = 6$, cette aire sera $= \frac{1}{2^9}\left[\sqrt{(127.1)} + \sqrt{(125.3)} + \sqrt{(123.5)} + \sqrt{(121.7)} + \sqrt{(119.9)} + \&c. + \sqrt{(65.63)}\right]$.

EXEMPLE II.

On aura $\int \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{2^{n-1}} x \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2^n} x} + \frac{1}{1 + \frac{3}{2^n} x} + \frac{1}{1 + \frac{5}{2^n} x} + \frac{1}{1 + \frac{7}{2^n} x} + \frac{1}{1 + \frac{9}{2^n} x} + \&c. + \frac{1}{1 + \frac{2^n - 1}{2^n} x}\right)$

ou $\int \frac{1}{1+x} dx = 2x \left(\frac{1}{2^n + x} + \frac{1}{2^n + 3x} + \frac{1}{2^n + 5x} + \frac{1}{2^n + 7x} + \frac{1}{2^n + 9x} + \&c. + \frac{1}{2^n + (2^n - 1)x}\right)$ d'autant plus exactement que n sera plus grand.

Mais $\frac{1}{2^n + x} = \frac{1}{2^n} - \frac{x}{2^{2n}} + \frac{x^2}{2^{3n}} - \frac{x^3}{2^{4n}} + \frac{x^4}{2^{5n}} - \frac{x^5}{2^{6n}} + \&c.$ à l'infini.

$\frac{1}{2^n + 3x} = \frac{1}{2^n} - \frac{3x}{2^{2n}} + \frac{3^2 x^2}{2^{3n}} - \frac{3^3 x^3}{2^{4n}} + \frac{3^4 x^4}{2^{5n}} - \frac{3^5 x^5}{2^{6n}} + \&c.$

$$\frac{1}{2^n + 5x} = \frac{1}{2^n} - \frac{5x}{2^{2n}} + \frac{5^2x^2}{2^{3n}} - \frac{5^3x^3}{2^{4n}} + \frac{5^4x^4}{2^{5n}} - \frac{5^5x^5}{2^{6n}} + \&c.$$

$$\frac{1}{2^n + 7x} = \frac{1}{2^n} - \frac{7x}{2^{2n}} + \frac{7^2x^2}{2^{3n}} - \frac{7^3x^3}{2^{4n}} + \frac{7^4x^4}{2^{5n}} - \frac{7^5x^5}{2^{6n}} + \&c.\ \&c.$$

Le nombre des termes étant 2^{n-1}, la somme de la suite $1 + 1 + 1 + 1 + \&c. = 2^{n-1}$.

Celle de la suite $1 + 3 + 5 + 7 + \&c. = 2^{2n-2}$.

Celle de la suite $1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \&c. = \frac{2^{n-1}(2^{2n} - 1)}{3}$.

Celle de la suite $1 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \&c. = 2^{2n-2}(2^{2n-1} - 1)$.

Celle de la suite $1 + 3^4 + 5^4 + 7^4 + \&c. = \frac{2^{n-1}[2^{2n+1}.(3.2^{2n-1} - 5) + 7]}{3.5}$.

Celle de la suite $1 + 3^5 + 5^5 + 7^5 + \&c. = \frac{2^{2n-2}[2^{2n}.(2^{2n} - 5) + 7]}{3}$.

Par conséquent on aura

$$\int \frac{1}{1+x} dx = 2x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} x + \frac{2^{2n} - 1}{3.2^{2n+1}} x^2 - \frac{2^{2n-1} - 1}{2^{2n+2}} x^3 + \frac{2^{2n+1}(3.2^{2n-1} - 5) + 7}{3.5.2^{4n+1}} x^4 - \frac{2^{2n}(2^{2n} - 5) + 7}{3.2^{4n+2}} x^5 + \&c. \text{ à l'infini.} \right)$$

d'autant plus exactement que n sera plus grand.

Soit n un nombre si grand que $2^{2n} - 1 = 2^{2n}$, $2^{2n-1} - 1 = 2^{2n-1}$, $3.2^{2n-1} - 5 = 3.2^{2n-1}$, $3.2^{4n} + 7 = 3.2^{4n}$, $2^{2n} - 5 = 2^{2n}$, $2^{4n} + 7 = 2^{4n}$, &c.

on aura $\int \frac{1}{1+x} dx = 2x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} x + \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{8} x^3 + \frac{1}{10} x^4 - \frac{1}{12} x^5 + \text{\&c. à l'infini.} \right)$

ou $\int \frac{1}{1+x} dx = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 + \text{\&c.}$

REMARQUE.

Il ſera toûjours facile de changer les ſuites que donnera cette méthode-ci en d'autres où le nombre indéterminé n ne ſe trouvera pas.

Par exemple, nous venons de trouver $\int \sqrt{(2x - x^2)} . dx = \frac{1}{2^{2n-1}} x^{\frac{3}{2}} \left[(2^{n+1} - x)^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} (2^{n+1} - 3x)^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} (2^{n+1} - 5x)^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}} (2^{n+1} - 7x)^{\frac{1}{2}} + \text{\&c.} \right]$ En convertiſſant chaque terme de cette ſuite en une ſérie infinie par la méthode du binome de M. Newton, en écrivant à meſure ces ſéries l'une ſous l'autre, & les ajoûtant enſuite enſemble, on auroit $\int \sqrt{(2x - x^2)} . dx = x^{\frac{3}{2}} (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{\&c.})$ Pour avoir les coëfficiens A, B, C, D, E, &c. que nous ne ſavons pas déterminer, comme dans l'exemple précédent, je différencie, & j'aurai $\sqrt{(2x - x^2)} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{\&c.}) + x^{\frac{3}{2}} (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{\&c.})$ ou $\sqrt{(2 - x)} = \frac{3}{2} A + \frac{5}{2} Bx + \frac{7}{2} Cx^2 + \frac{9}{2} Dx^3 + \frac{11}{2} Ex^4 + \text{\&c.}$

Mais $(2 - x)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}x - \frac{1}{2^{\frac{9}{2}}}x^2 - \frac{1}{2^{\frac{13}{2}}}x^3 - \frac{5}{2^{\frac{21}{2}}}x^4 - \frac{7}{2^{\frac{25}{2}}}x^5 - \frac{3 \cdot 7}{2^{\frac{31}{2}}}x^6 - \&c.$

Donc $A = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}$, $B = \frac{-1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 5}$, $C = \frac{-1}{2^{\frac{7}{2}} \cdot 7}$, $D = \frac{-1}{2^{\frac{11}{2}} \cdot 9}$; $E = \frac{-5}{2^{\frac{19}{2}} \cdot 11}$, $F = \frac{-7}{2^{\frac{23}{2}} \cdot 13}$, $G = \frac{-7}{2^{\frac{29}{2}} \cdot 5}$, &c.

Donc $\int \sqrt{(2x - x^2)} \cdot dx = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{7}{2}} \cdot 7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{11}{2}} \cdot 9}x^{\frac{9}{2}} - \frac{15}{2^{\frac{19}{2}} \cdot 11}x^{\frac{11}{2}} - \frac{7}{2^{\frac{23}{2}} \cdot 13}x^{\frac{13}{2}} - \frac{7}{2^{\frac{29}{2}} \cdot 5}x^{\frac{15}{2}} - \&c.$

EXEMPLE III.

On aura $\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2^{n-1}} x \left[\frac{1}{1 + (\frac{1}{2^n} x)^2} + \frac{1}{1 + (\frac{3}{2^n})x^2} + \frac{1}{1 + (\frac{5}{2^n})x^2} + \frac{1}{1 + (\frac{7}{2^n})x^2} + \&c. + \frac{1}{1 + (\frac{2^n - 1}{2^n})x^2} \right]$

ou $\int \frac{1}{1 + x^2} dx = 2^{n+1} x \left(\frac{1}{2^{2n} + x^2} + \frac{1}{2^{2n} + 3^2 x^2} + \frac{1}{2^{2n} + 5^2 x^2} + \frac{1}{2^{2n} + 7^2 x^2} + \&c. + \frac{1}{2^{2n} + (2^n - 1)^2 x^2} \right).$

EXEMPLE IV.

On aura $\int \frac{b}{a}(a - x) dx = \frac{bx}{2^{n-1}a} \left(a - \frac{1}{2^n}x + a - \frac{3}{2^n}x + a - \frac{5}{2^n}x + a - \frac{7}{2^n}x + \&c. + a - \frac{2^n - 1}{2^n}x \right).$

ou $\int \frac{b}{a}(a - x)dx = \frac{bx}{2^{n-1}a}\left(2^{n-1}a - \frac{1}{2^n}x - \frac{3}{2^n}x - \frac{5}{2^n}x - \frac{7}{2^n}x - \&c. - \frac{2^n - 1}{2^n}x\right)$

ou $\int \frac{b}{a}(a - x)dx = bx - \frac{bx}{2^{n-1}a}\left(\frac{1}{2^n}x + \frac{3}{2^n}x + \frac{5}{2^n}x + \frac{7}{2^n}x + \&c. + \frac{2^n - 1}{2^n}x\right)$

ou $\int \frac{b}{a}(a - x)dx = bx - \frac{bx}{2^{2n-1}a}(1 + 3 + 5 + 7 + \&c. + 2^n - 1)$.

Mais le nombre des termes étant 2^{n-1}, la somme de la suite $1 + 3 + 5 + 7 + \&c. = 2^{2n-2}$; par conséquent on aura

$\int \frac{b}{a}(a - x)dx = bx - \frac{bx^2}{2^{2n-1}a} \cdot 2^{2n-2} = bx - \frac{bx^2}{2a} = \frac{bx(2a - x)}{2a}$.

EXEMPLE V.

On aura $\int ax^2dx = \frac{ax}{2^{n-1}}\left[\left(\frac{1}{2^n}x\right)^2 + \left(\frac{3}{2^n}x\right)^2 + \left(\frac{5}{2^n}x\right)^2 + \left(\frac{7}{2^n}x\right)^2 + \&c. + \left(\frac{2^n - 1}{2^n}x\right)^2\right]$ ou $\int ax^2dx = \frac{ax^3}{2^{3n-1}}[1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \&c. + (2^n - 1)^2]$.

Mais le nombre des termes étant 2^{n-1}, la somme de la suite $1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \&c. = \frac{2^{n-1}(2^{2n}-1)}{3}$; on aura donc $\int ax^2dx = \frac{ax^3}{2^{2n}.3} \cdot (2^{2n} - 1)$ d'autant plus exactement que n sera plus grand.

Soit n un nombre si grand que $2^{2n} - 1 = 2^{2n}$, on aura $\int ax^2dx = \frac{1}{3}ax^3$.

EXEMPLE VI.

On aura $\int \sqrt{ax}\,.\,dx = \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{2^{n-1}}\left(\sqrt{\frac{1}{2^n}x} + \sqrt{\frac{3}{2^n}x} + \sqrt{\frac{5}{2^n}x} + \sqrt{\frac{7}{2^n}x} + \&c. + \sqrt{\frac{2^n - 1}{2^n}x}\right)$

ou $\int \sqrt{ax}\,.\,dx = \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}n-1}}\left[1 + 3^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} + \&c. + (2^n - 1)^{\frac{1}{2}}\right]$ d'autant plus exactement que n ſera plus grand.

Soit la dernière valeur de $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}n-1}}\left[1 + 3^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} + 7^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} + \&c. + (2^n - 1)^{\frac{1}{2}}\right] = A$,
on aura $\int \sqrt{ax}\,.\,dx = A a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$;
& en différenciant, on aura $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} A a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$.
Donc $A = \frac{2}{3}$; donc $\int \sqrt{ax}\,.\,dx = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$.

EXEMPLE VII.

En général $\int y\,dx$, y étant une fonction de a & de x dont la dimenſion eſt $e - 1$, eſt $= - a^e x \int \frac{y}{a^{e+1}} da$; ainſi on aura, par exemple,

$$\int \sqrt{(2ax - xx)}\,.\,dx = - a^2 x^{\frac{3}{2}} \int \frac{\sqrt{(2a - x)}}{a^3} da.$$

Il s'agit d'avoir l'intégrale de l'élément $\frac{\sqrt{(2a - x)}}{a^3} da$. Mais comme cette méthode-ci exige que l'intégrale ſoit $= 0$, lorſque l'indéterminée eſt $= 0$, je fais $a = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$; il s'agira d'avoir l'intégrale de l'élément $\frac{4z^{\frac{1}{2}}dz}{(x + z)^3}$.

On

On aura $\int \frac{4z^{\frac{1}{2}}}{(x+z)^3}\,dz = -\frac{A}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2^{n-3}}\,z$

$$\left[\frac{(\frac{1}{2^n}z)^{\frac{1}{2}}}{(x+\frac{1}{2^n}z)^3} + \frac{(\frac{3}{2^n}z)^{\frac{1}{2}}}{(x+\frac{3}{2^n}z)^3} + \frac{(\frac{5}{2^n}z)^{\frac{1}{2}}}{(x+\frac{5}{2^n}z)^3} + \right.$$

$$\left.\frac{(\frac{7}{2^n}z)^{\frac{1}{2}}}{(x+\frac{7}{2^n}z)^3} + \&c. + \frac{(\frac{2^n-1}{2^n}z)^{\frac{1}{2}}}{(x+\frac{2^n-1}{2^n}z)^3}\right] \text{ ou}$$

$$\int \frac{4z^{\frac{1}{2}}}{(x+z)^3}\,dz = -\frac{A}{x^{\frac{1}{2}}} + 2^{\frac{1}{2}n+3} z^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(2^n x+z)^3} + \right.$$

$$\frac{3^{\frac{1}{2}}}{(2^n x+3z)^3} + \frac{5^{\frac{1}{2}}}{(2^n x+5z)^3} + \frac{7^{\frac{1}{2}}}{(2^n x+7z)^3} + \&c. +$$

$\left.\frac{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}{[2^n x+(2^n-1)z]^3}\right]$, & en remettant $2a-x$ au lieu de z,

on aura $\int \frac{\sqrt{(2a-x)}}{a^3}\,da = -\frac{A}{x^{\frac{1}{2}}} + 2^{\frac{1}{2}n+3}(2a-x)^{\frac{1}{2}}$

$$\left[\frac{1}{[(2^n-1)x+2a]^3} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-3)x+3.2a]^3} + \right.$$

$$\left.\frac{5^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-5)x+5.2a]^3} + \&c. + \frac{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}{[x+(2^n-1)2a]^3}\right];$$

Par conséquent, on aura

$$\int \sqrt{(2ax-xx)}\,dx = Aa^n - 2^{\frac{1}{2}n+3}a^2(2ax-xx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{1}{[(2^n-1)x+2a]^3} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-3)x+3.2a]^3} + \right.$$

$$\left.\frac{5^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-5)x+5.2a]^3} + \&c. + \frac{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}{[x+(2^n-1)2a]^1}\right].$$

Je veux que cette intégrale soit $=0$, lorsque x sera $=0$, ou, ce qui reviendra au même, lorsque x sera $=\frac{1}{2^n}a$;

j'aurai $A = 2^{\frac{1}{2}n+3} \left(2\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{\left(\frac{2^n - 1}{2^n} + 2\right)^3} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{2^n - 3}{2^n} + 3.2\right)^3} + \frac{5^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{2^n - 5}{2^n} + 5.2\right)^3} + \frac{7^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{2^n - 7}{2^n} + 7.2\right)^3} + \&c.\right]$

ou $A = 2^{\frac{1}{2}n+3} [2^n + 1(2^n - 1)]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{[2.2^n + 1(2^n - 1)]^3} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{[4.2^n + 3(2^n - 1)]^3} + \frac{5^{\frac{1}{2}}}{[6.2^n + 5(2^n - 1)]^3} + \frac{7^{\frac{1}{2}}}{[8.2^n + 7(2^n - 1)]^3} + \frac{9^{\frac{1}{2}}}{[10.2^n + 9(2^n - 1)]^3} + \&c.\right]$

& en supposant n si grand que $2^n - 1 = 2^n$, on aura $A = 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3^3} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{7^3} + \frac{5^{\frac{1}{2}}}{(11)^3} + \frac{7^{\frac{1}{2}}}{(15)^3} + \frac{9^{\frac{1}{2}}}{(19)^3} + \&c. \text{ à l'infini.}\right)$

On aura donc $\int \sqrt{(2ax - xx)}dx = 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3^3} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{7^3} + \frac{5^{\frac{1}{2}}}{(11)^3} + \frac{7^{\frac{1}{2}}}{(15)^3} + \frac{9^{\frac{1}{2}}}{(19)^3} + \&c.\right) a^2 - 2^{\frac{1}{2}n+3} a^2 (2ax - xx)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{[(2^n - 1)x + 2a]^3} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{[(2^n - 3)x + 3.2a]^3} + \frac{5^{\frac{1}{2}}}{[(2^n - 5)x + 5.2a]^3} + \frac{7^{\frac{1}{2}}}{[(2^n - 7)x + 7.2a]^3} + \&c.\right)$

Soit, par exemple, $x = 2a$, l'aire d'un cercle, dont le rayon est 1, sera $= 2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3^3} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{7^3} + \frac{5^{\frac{1}{2}}}{(11)^3} + \frac{7^{\frac{1}{2}}}{(15)^3} + \frac{9^{\frac{1}{2}}}{(19)^3} + \&c. \text{ à l'infini.}\right)$

Ceci, $2^{\frac{1}{2}n+3}a^2(2ax-xx)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{[(2^n-1)x+2a]^3}+\right.$ $\left.\frac{3^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-3)x+3.2a]^3}+\frac{5^{\frac{1}{2}}}{[(2^n-5)x+5.2a]^3}+\text{\&c.}\right)$ exprime l'aire au delà de la dernière ordonnée; par conséquent, si l'on y met $2a-x$ au lieu de x, on aura

$$\int \surd(2ax-xx)\,dx = 2^{\frac{1}{2}n+3}a^2(2ax-xx)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{[2^{n+1}a-(2^n-1)x]^3}+\frac{3^{\frac{1}{2}}}{[2^{n+1}a-(2^n-3)x]^3}+\frac{5^{\frac{1}{2}}}{[2^{n+1}a-(2^n-5)x]^3}+\text{\&c.}+\frac{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}{(2^{n+1}a-x)^3}\right)$$

Soit $x=2a$, ou, ce qui reviendra au même, soit $x=2a-\frac{1}{2^n}a=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}a$, on aura pour l'aire du demi-cercle la même expression que celle que nous venons de trouver. Soit $x=a$, on aura l'aire d'un cercle, dont le rayon est a, $=2^{\frac{1}{2}n+5}\left(\frac{1}{(2^n+1)^3}+\frac{3^{\frac{1}{2}}}{(2^n+3)^3}+\frac{5^{\frac{1}{2}}}{(2^n+5)^3}+\frac{7^{\frac{1}{2}}}{(2^n+7)^3}+\text{\&c.}+\frac{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}{(2^{n+1}-1)^3}\right)a^2$ d'autant plus exactement que n sera plus grand.

D'après la remarque ci-dessus,

on aura ici $\int \surd(2ax-xx)\,dx=(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}$ $(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{\&c.})$ & en différenciant, on aura $(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}$ $(2a-2x)(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{\&c.})+$ $(2ax-xx)^{\frac{1}{2}}(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{\&c.})$

ou $\begin{array}{llllll} +3Aa & +5Bax & +7Cax^2 & +9Dax^3 & +11Eax^4 & +\text{\&c.}=0. \\ -1 & -3A & -4B & -5C & -6D & \end{array}$

Donc $A = \frac{1}{3}a$, $B = \frac{3}{5a}A$, $C = \frac{4}{7a}B$, $D = \frac{5}{9a}C$, $E = \frac{6}{11a}D$, &c. Donc $\int \sqrt{(2ax - xx)}\, dx = (2ax - xx)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}a + \frac{3}{5a}Ax + \frac{4}{7a}Bx^2 + \frac{5}{9a}Cx^3 + \frac{6}{11a}Dx^4 + \&c.\right)$

EXEMPLE VIII.

Qu'il s'agiſſe de l'élément $\frac{1}{z}dz$, je fais $z = 1 + x$, il s'agira de l'élément $\frac{1}{1+x}dx$; mais $\int \frac{1}{1+x}dx = 2x\left(\frac{1}{2n+x} + \frac{1}{2^n+3x} + \frac{1}{2^n+5x} + \&c.\right)$

Donc, en remettant $z - 1$ au lieu de x, on aura $\int \frac{1}{z}dz = A + 2(z-1)\left(\frac{1}{2^n - 1 + z} + \frac{1}{2^n - 3 + 3z} + \frac{1}{2^n - 5 + 5z} + \&c.\right)$

Je veux que cette intégrale ſoit o lorſque z eſt o; j'aurai $A = 2\left(\frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n - 3} + \frac{1}{2^n - 5} + \&c. + 1.\right)$

Donc enfin $\int \frac{1}{z}dz = 2\left(\frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n - 3} + \frac{1}{2^n - 5} + \frac{1}{2^n - 7} + \&c. + 1\right) + 2(z-1)\left(\frac{1}{2^n - 1 + z} + \frac{1}{2^n - 3 + 3z} + \frac{1}{2^n - 5 + 5z} + \frac{1}{2^n - 7 + 7z} + \&c. + \frac{1}{1 + (2^n - 1)z}\right)$.

EXEMPLE IX.

Qu'il s'agiſſe de l'élément $\frac{a^3}{z^2} dz$, je fais $z = a + x$, il s'agira de l'élément $\frac{a^3}{(a+x)^2} dx$,

on aura $\int \frac{a^3}{(a+x)^2} dx = \frac{a^3}{2^{n-1}} x \left(\frac{1}{(a + \frac{1}{2^n} x)^2} + \frac{1}{(a + \frac{3}{2^n} x)^2} + \frac{1}{(a + \frac{5}{2^n} x)^2} + \&c. \right)$ ou

$\int \frac{a^3}{(a+x)^2} dx = 2^{n+1} a^3 x \left(\frac{1}{(2^n a + x)^2} + \frac{1}{(2^n a + 3x)^2} + \frac{1}{(2^n a + 5x)^2} + \&c. \right)$; & en remettant $z - a$ au lieu de x, on aura $\int \frac{a^3}{z^2} dz = Aa^2 + 2^{n+1} a^3 (z - a)$

$$\left(\frac{1}{[(2^n - 1)a + z]^2} + \frac{1}{[(2^n - 3)a + 3z]^2} + \frac{1}{[(2^n - 5)a + 5z]^2} + \frac{1}{[(2^n - 7)a + 7z]^2} + \&c. \right)$$

Je veux que cette intégrale ſoit o, lorſque z eſt o; j'aurai $A = 2^{n+1} \left(\frac{1}{(2^n - 1)^2} + \frac{1}{(2^n - 3)^2} + \frac{1}{(2^n - 5)^2} + \frac{1}{(2^n - 7)^2} + \&c. + 1 \right)$.

Donc enfin $\int \frac{a^3}{z^2} dz = 2^{n+1} \left(\frac{1}{(2^n - 1)^2} + \frac{1}{(2^n - 3)^2} + \frac{1}{(2^n - 5)^2} + \&c. + 1 \right) a^2 + 2^{n+1} a^3 (z - a)$.

$$\left(\frac{1}{[(2^n - 1)a + z]^2} + \frac{1}{[(2^n - 3)a + 3z]^2} + \frac{1}{[(2^n - 5)a + 5z]^2} + \&c. + \frac{1}{[a + (2^n - 1)z]^2} \right).$$

EXEMPLE X.

$\int \frac{b}{a}(a - x)dx = - abx \int \frac{a - x}{a^3} da$; il s'agit d'intégrer l'élément $\frac{a - x}{a^3} da$. Je fais $a = x + z$, & il s'agira d'intégrer l'élément $\frac{z}{(x + z)^3} dz$,

on aura $\int \frac{z}{(x + z)^3} dz = \frac{1}{2^{n-1}} z \left(\frac{\frac{1}{2^n} z}{(x + \frac{1}{2^n} z)^3} + \frac{\frac{3}{2^n} z}{(x + \frac{3}{2^n} z)^3} + \frac{\frac{5}{2^n} z}{(x + \frac{5}{2^n} z)^3} + \text{\&c.} \right)$

ou $\int \frac{z}{(x + z)^3} dz = 2^{n+1} z^2 \left(\frac{1}{(2^n x + z)^3} + \frac{3}{(2^n x + 3z)^3} + \frac{5}{(2^n x + 5z)^3} + \text{\&c.} \right)$

& en remettant $a - x$ à la place de z, on aura

$\int \frac{a - x}{a^3} da = - \frac{A}{x} + 2^{n+1} (a - x)^2 \left(\frac{1}{[(2^n - 1)x + a]^3} + \frac{3}{[(2^n - 3)x + 3a]^3} + \frac{5}{[(2^n - 5)x + 5a]^3} + \frac{7}{[(2^n - 7)x + 7a]^3} + \text{\&c.} \right)$

Par conséquent,

$\int \frac{b}{a}(a - x)dx = Aab - 2^{n+1} abx (a -)^2 \left(\frac{1}{[(2^n - 1)x + a]^3} + \frac{3}{[(2^n - 3)x + 3a]^3} + \frac{5}{[(2^n - 5)x + 5a]^3} + \frac{7}{[(2^n - 7)x + 7a]^3} + \text{\&c.} \right)$

Je veux que cette intégrale soit nulle lorsque x sera o,

ou, ce qui reviendra au même, lorsque x sera $\frac{1}{2^n} a$; j'aurai

$$A = 2^{n+1} (2^n - 1)^2 \left(\frac{1}{[2^n + 1 (2^n - 1)]^3} + \frac{3}{[2^n + 3 (2^n - 1)]^3} + \frac{5}{[2^n + 5 (2^n - 1)]^3} + \&c. \right)$$

Soit n un nombre si grand que $2^n - 1 = 2^n$, j'aurai

$$A = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{4^3} + \frac{9}{5^3} + \frac{11}{6^3} + \&c. \right)$$

On aura donc enfin $\int \frac{b}{a} (a - x) dx = \frac{bx (2a - x)}{2a} =$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{4^3} + \frac{9}{5^3} + \&c. \right)$$

$$ab - 2^{n+1} abx (a - x)^2 \left(\frac{1}{[(2^n - 1) x + a]^3} + \frac{3}{[(2^n - 3) x + 3a]^3} + \frac{5}{[(2^n - 5) x + 5a]^3} + \&c. \right)$$

Soit $x = a$, on aura

$$2 = \frac{1}{1^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{4^3} + \frac{9}{5^3} + \&c.$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \&c. \\ + \frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{5^3} + \frac{5}{6^3} + \&c. \end{matrix} \right\}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \&c. \right) - \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c. \right)$$

EXEMPLE XI.

On aura $\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \frac{1}{2^{n-1}} x \left(\frac{1}{(\frac{1}{2^n} x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(\frac{3}{2^n} x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(\frac{5}{2^n} x)^{\frac{1}{2}}} + \&c. + \frac{1}{(\frac{2^n - 1}{2^n} x)^{\frac{1}{2}}} \right)$

ou $\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n-1}} x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{7^{\frac{1}{2}}} + \&c. + \frac{1}{(2^n - 1)^{\frac{1}{2}}}\right).$

EXEMPLE XII.

$$\int \frac{\sqrt{(1+ax^2)}}{\sqrt{(1-bx^2)}} dx = \frac{1}{2^{n-1}} x \left(\frac{\sqrt{[1+a(\frac{1}{2^n}x)^2]}}{\sqrt{[1-b(\frac{1}{2^n}x)^2]}} + \frac{\sqrt{[1+a(\frac{3}{2^n}x)^2]}}{\sqrt{[1-b(\frac{3}{2^n}x)^2]}} + \frac{\sqrt{[1+a(\frac{5}{2^n}x)^2]}}{\sqrt{[1-b(\frac{5}{2^n}x)^2]}} + \&c. \right)$$

ou $\int \frac{\sqrt{(1+ax^2)}}{\sqrt{(1-bx^2)}} dx = \frac{1}{2^{n-1}} x \left(\frac{\sqrt{(2^{2n}+ax^2)}}{\sqrt{(2^{2n}-bx^2)}} + \frac{\sqrt{(2^{2n}+3^2ax^2)}}{\sqrt{(2^{2n}-3^2bx^2)}} + \frac{\sqrt{(2^{2n}+5^2ax^2)}}{\sqrt{(2^{2n}-5^2bx^2)}} + \&c. \right)$ ou

$$\int \left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2^{n-1}} x . \frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-bx^2)^{\frac{1}{2}}} . \frac{(1-bx^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+ax^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{(2^{2n}+ax^2)^{\frac{1}{2}}}{(1^{2n}-bx^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(2^{2n}+3^2ax^2)^{\frac{1}{2}}}{(2^{2n}-3^2bx^2)^{\frac{1}{2}}} + \&c. \right)$$ ou

$$\int \left(\frac{1+ax^2}{2-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2^{n-1}} x \left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(1+ax^2)^{-\frac{1}{2}} (1-bx^2)^{\frac{1}{2}} (2^{2n}+ax^2)^{\frac{1}{2}} (2^{2n}-bx^2)^{-\frac{1}{2}} + (1+ax^2)^{-\frac{1}{2}} (1-bx^2)^{\frac{1}{2}} (2^{2n}+3^2ax^2)^{\frac{1}{2}} (2^{2n}-3^2bx^2)^{-\frac{1}{2}} + (1+ax^2)^{-\frac{1}{2}} (1-bx^2)^{\frac{1}{2}} (2^{2n}+5^2ax^2)^{\frac{1}{2}} (2^{2n}-5^2bx^2)^{-\frac{1}{2}} + \&c. \right]$$

Chaque terme de cette dernière ſuite eſt compoſé de quatre facteurs. Chacun de ces facteurs peut ſe convertir en une ſérie infinie par la formule du Binome de M. Newton; l'on peut prendre le produit de ces quatre ſéries, & n'en avoir qu'une ſeule

pour

pour chaque terme ; l'on peut ajoûter toutes ces ſéries enſemble, & n'en avoir qu'une ſeule pour tous les termes de la ſuite. Par ce moyen, on aura $\int\left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ $(Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \&c.)$

En différenciant,

on aura $\left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2(a+b)x}{(1-bx^2)^2}$ $(Ax + Bx^3 + Cx^5 + \&c.) + \left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ $(A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + \&c.)$ ou $(1 - bx^2)^2 = 3(a+b)x(Ax + Bx^3 + Cx^5$ $+ Dx^7 + \&c.) + [1 + (a-b)x^2 - abx^4]$ $(A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + \&c.)$

$$\text{ou}\left\{\begin{array}{lllll} +A & +3Bx^2 & +5Cx^4 & +7Dx^6 & +9Ex^8 \\ -1 & +(4a+2b)A & +6aB & +(8a-2b)C & +(10a-4b)D \\ & +2b & -abA & -3abB & -5abC \\ & & -b^2 & & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} +11Fx^{10} & +\&c. \\ +(12a-6b)E & +\&c. \\ -7abD & -\&c. \end{array}\right\} = 0.$$

Donc $A = 1$, $B = -\frac{4}{3}(a+b)$, $C = \frac{1}{5}(8a+b)(a+b)$, $D = \frac{3abB - 2(4a-b)C}{7}$, $E = \frac{5abC - 2(5a-2b)D}{9}$, $F = \frac{7abD - 2(6a-3b)E}{11}$, $G = \frac{9abE - 2(7a-4b)F}{13}$, &c.

Donc $\int\frac{\sqrt{(1+ax^2)}}{\sqrt{(1-bx^2)}}dx = \left(\frac{1+ax^2}{1-bx^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[x - \frac{4}{3}(a+b)x^3 + \frac{1}{5}(8a+b)(a+b)x^5 + \frac{3abB - 2(4a-b)C}{7}x^7 + \frac{5abC - 2(5a-2b)D}{9}x^9 + \frac{7abD - 2(6a-3b)E}{11}x^{11} + \frac{9abE - 2(7a-4b)F}{13}x^{13} + \&c.\right]$

ADDITION À L'EXEMPLE III.

Soit, par exemple, la tangente x infinie, ou, ce qui revient au même, soit $x = 2^n$, on aura l'angle de 90 degrés $= 2\left(\frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+3^2} + \frac{1}{1+5^2} + \frac{1}{1+7^2} + \frac{1}{1+9^2} + \&c.\right)$

EXEMPLE XIII.

Le rayon étant 1, & le sinus verse x, l'élément de l'angle sera $\frac{1}{\sqrt{(2x - x^2)}} dx$, & on aura $\int \frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}} dx = \frac{1}{2^{n-1}} x$ $\left(\frac{1}{\sqrt{[2 \cdot \frac{1}{2^n} x - (\frac{1}{2^n} x)^2]}} + \frac{1}{\sqrt{[2 \cdot \frac{3}{2^n} x - (\frac{3}{2^n} x)^2]}} + \&c.\right) =$ $2x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{(2^{n+1} - x)}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}\sqrt{(2^{n+1} - 3x)}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}\sqrt{(2^{n+1} - 5x)}} + \&c.\right)$ ou $\int \frac{1}{\sqrt{(2x - x^2)}} dx = 2\sqrt{(2x - x^2)}\,[(2 - x)^{-\frac{1}{2}}$ $(2^{n+1} - x)^{-\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}(2 - x)^{-\frac{1}{2}}(2^{n+1} - 3x)^{-\frac{1}{2}}$ $+ 5^{-\frac{1}{2}}(2 - x)^{-\frac{1}{2}}(2^{n+1} - 5x)^{-\frac{1}{2}} + \&c.]$ & d'après la formule du binome, on aura $\int \frac{1}{\sqrt{(2x - x^2)}} dx$ $= \sqrt{(2x - x^2)}\,(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.)$ & en différenciant, l'on trouvera $A = 1$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5}$, $D = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7}$, $E = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$, &c.

EXEMPLE XIV.

Soit $dt = \frac{M}{(2a + b + b\,\text{cof.}\,\theta)^2} d\theta$,

on aura $t = \int \frac{M}{(2a + b + b\,\text{cof.}\,\theta)^2} d\theta = \frac{M}{2^{n-1}}\theta.$ $\left(\frac{1}{(2a + b + b\,\text{cof.}\,\frac{1}{2^n}\theta)^2} + \frac{1}{(2a + b + b\,\text{cof.}\,\frac{3}{2^n}\theta)^2} + \frac{1}{(2a + b + b\,\text{cof.}\,\frac{5}{2^n}\theta)^2} + \&c. + \frac{1}{(2a + b + b\,\text{cof.}\,\frac{2^n - 1}{2^n}\theta)^2}\right).$

SUR LES LOGARITHMES.

L'On conçoit une ſuite infinie de nombres en progreſſion géométrique, rangés en ligne droite à une égale diſtance l'un de l'autre, & l'on ſuppoſe la progreſſion ſi lente, que tous les nombres poſſibles depuis 1 juſqu'a ∞, & depuis 1 juſqu'à 0, s'y trouvent.

La diſtance de 1 à un nombre donné *m* étant faite $= a$, par exemple, la diſtance de 1 à 10 étant faite $= 1$, l'on ſait trouver la diſtance *x* de 1 à un nombre quelconque *y*, & *x* ſe nomme le logarithme de *y*.

Si l'on me demande la diſtance de 1 à un nombre pris négativement, par exemple, à -7, l'on me fait une queſtion abſurde, car ce nombre n'eſt pas dans la progreſſion; ainſi dès qu'on a établi *a* pour être le logarithme du nombre poſitif *m*, le logarithme de -7 eſt une chimère.

Les logarithmes des nombres ſont comme les expoſans de ces nombres dans la progreſſion où ils ont été pris; 1 étant le premier terme de cette progreſſion, & α ou $\frac{1}{\alpha}$ le ſecond, la progreſſion ſera

∞ & $\alpha^{-7}, \alpha^{-6}, \alpha^{-5}, \alpha^{-4}, \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^{0}, \alpha^{1}, \alpha^{2}, \alpha^{3}, \alpha^{4}, \alpha^{5}, \alpha^{6}, \alpha^{7}$, &c.

La diſtance de 1 à 2, par exemple, c'eſt-à-dire, le logarithme de 2 eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 2$; le logarithme de 3 eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 3$; le logarithme de 4 eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 4$; le logarithme de 5 eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 5$, & ainſi de ſuite; le logarithme de $\sqrt{2}$ eſt comme l'expoſant

de la puiſſance de α qui eſt $= \sqrt{2}$; le logarithme de $3^{\frac{2}{7}}$ eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 3^{\frac{2}{7}}$; le logarithme de $\frac{1}{2}$ eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= \frac{1}{2}$; le logarithme de $\frac{3}{5}$ eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= \frac{3}{5}$, &c.

Repréſentez 1 par une ligne droite infiniment longue, & α par cette même ligne augmentée d'un point, en entendant par un point ce qu'ont de commun deux lignes qui ſe coupent perpendiculairement, & vous concevrez comment il n'y a point de nombre qui ne puiſſe être exprimé par α^{e} ou par α^{-e}, e déſignant un nombre entier poſitif.

L'expoſant de $pq =$ l'expoſant de $p +$ l'expoſant de q : donc $lpq = lp + lq$.

L'expoſant de $\frac{A}{B} =$ l'expoſant de $A -$ l'expoſant de B; donc $l\frac{A}{B} = lA - lB$.

L'expoſant de $y^{m} =$ le produit de l'expoſant de y par m; donc $ly^{m} = mly$, &c.

Le logarithme de 1 eſt néceſſairement $= 0$, car il eſt comme l'expoſant de la puiſſance de α qui eſt $= 1$, lequel eſt néceſſairement $= 0$.

Soit dx la diſtance entre les termes de la progreſſion, & ſoient y, y', y'', trois termes conſécutifs de cette progreſſion, on aura $y : y' :: y' : y''$ ou $y' : y :: y'' : y'$ ou $y' - y : y :: y'' - y' : y'$ ou $dy : y :: dy' : y'$; donc $\frac{dy}{y} = \frac{dy'}{y'}$; par conſéquent, $\frac{dy}{y}$ eſt conſtant de même que dx.

Soient y, y', y'', y''', y'''', y''''', &c. une infinité de termes consécutifs de la progression, on aura $y : y' :: 1 : a$ ou $y' : y :: a : 1$, ou $y' - y : y :: a - 1 : 1$, ou $dy : y :: a - 1 : 1$; donc, la distance étant dx, $\frac{dy}{y} = a - 1$; on aura $y : y'' :: 1 : a^2$, ou $y'' : y :: a^2 : 1$, ou $y'' - y : y :: a^2 - 1 : 1$, ou $dy : y :: a^2 - 1 : 1$; donc la distance étant $2\,dx$, $\frac{dy}{y} = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1) = 2(a - 1)$.

Par la même raison, la distance étant $3\,dx$, $\frac{dy}{y} = a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1) = 3(a - 1)$.

La distance étant $4\,dx$, $\frac{dy}{y} = a^4 - 1 = (a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1) = 4(a - 1)$.

La distance étant $5\,dx$, $\frac{dy}{y} = 5(a - 1)$ &c.

Supposons que les termes de la progression se suivent d'aussi près l'un de l'autre que les points de la ligne, le long de laquelle ils sont disposés, on aura généralement $\frac{dy}{y}$ comme dx; & par conséquent, en prenant M pour une quantité déterminée, on aura $dx = \frac{Mdy}{y}$; donc $x = \int \frac{Mdy}{y}$. Si on pouvoit intégrer, l'on feroit que y soit $= 1$ lorsque x est $= 0$, & ensuite l'on détermineroit M tellement que x fût, par exemple $= 1$, lorsque y seroit $= 10$.

Soit $y = 1 + u$, on aura x ou $l(1 + u) = \int \frac{Mdu}{1+u} = \int M(1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + \&c.)\,du = M(u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + \&c.)a$. x étant donné, si l'on veut avoir $1 + u$ ou y, l'on trouvera

$\frac{x}{M} + \frac{x^2}{2M^2} + \frac{x^3}{6M^3} + \frac{x^4}{24M^4} + \frac{x^5}{120M^5} + \&c. = u,$
& par conséquent, $1 + u$ ou $y = 1 + \frac{x}{M} + \frac{x^2}{2M^2} + \frac{x^3}{6M^3} + \frac{x^4}{24M^4} + \frac{x^5}{120M^5} + \&c.$

Soit $x = M$, on aura le nombre, dont le logarithme est M, $= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \&c.$

Soit $y = 1 - u$, on aura x ou $l(1 - u) = - \int \frac{M\,du}{1-u} = - \int M(1 + u + u^2 + u^3 + \&c.)\,du$ $= - M\left(u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{4}u^4 + \&c.\right)$

x étant donné, si l'on veut avoir $1 - u$ ou y, on aura $-\frac{x}{M} - \frac{x^2}{2M^2} - \frac{x^3}{6M^3} - \frac{x^4}{24M^4} - \frac{x^5}{120M^5} - \&c. = u,$
& par conséquent $1 - u$ ou $y = 1 + \frac{x}{M} + \frac{x^2}{2M^2} + \frac{x^3}{6M^3} + \frac{x^4}{24M^4} + \frac{x^5}{120M^5} + \&c.$

Soit $x = - M$, on aura le nombre, dont le logarithme est $- M$, $= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \&c.$

z étant un nombre permanent quelconque, & v un nombre variable, trouver la distance de $z - v$ à $z + v$.

La distance de 1 à $z + v$ est $= \int \frac{M\,dv}{z+v}$; celle de 1 à $z - v$ est $= - \int \frac{M\,dv}{z-v}$; par conséquent, la distance de $z - v$ à $z + v$ est $= \int \frac{M\,dv}{z+v} + \int \frac{M\,dv}{z-v}$ $= M \int \left(\frac{1}{z+v} + \frac{1}{z-v}\right) dv = 2M \int \frac{z}{z^2 - v^2}\, dv$

$$= 2M\int \frac{1}{z - \frac{v^2}{z}}\,dv = 2M\int\left(\frac{1}{z} + \frac{v^2}{z^3} + \frac{v^4}{z^5} + \frac{v^6}{z^7} + \&c.\right)dv = 2M\left(\frac{v}{z} + \frac{v^3}{3z^3} + \frac{v^5}{5z^5} + \frac{v^7}{7z^7} + \&c.\right)$$

Si la ſomme de deux nombres eſt z, & leur différence v, & ſi l'on fait $\frac{2Mv}{z} = A$, $\frac{Av^2}{z^2} = B$, $\frac{Bv^2}{z^2} = C$, $\frac{Cv^2}{z^2} = D$, &c. la diſtance du moindre au plus grand, ſera $= A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{5}C + \frac{1}{7}D +$ &c.

Par exemple, en faiſant $M = 1$, l'on trouvera la diſtance p de 125 à 126, la diſtance q de 224 à 225, la diſtance r de 2400 à 2401, & la diſtance $ſ$ de 4374 à 4375.

Mais $p =$ la diſtance de 1 à 126 moins la diſtance de 1 à 125 $= l126 - l125 = l2.3^2.7 - l5^3 = l2 + 2l3 - 3l5 + l7$.

$q = l225 - l224 = l3^2.5^2 - l2^5.7 = -5l2 + 2l3 + 2l5 - l7$.

$r = l2401 - l2400 = l7^4 - l2^5.3.5^2 = -5l2 - l3 - 2l5 + 4l7$.

$ſ = l4375 - l4374 = l5^4.7 - l2.3^7 = -l2 - 7l3 + 4l5 + l7$.

Donc $ap = al2 + 2al3 - 3al5 + al7$.

$bq = -5bl2 + 2bl3 + 2bl5 - bl7$.

$cr = -5cl2 - cl3 - 2cl5 + 4cl7$.

$dſ = -dl2 - 7dl3 + 4dl5 + dl7$.

Je veux que a, b, c, d, ſoient tels que $ap + bq + cr + dſ = l2 + l5$.

Je trouve $a = 239$, $b = 90$, $c = -63$, $d = 103$; donc $239p + 90q - 63r + 103s$ ou $\dot{2}302585092994$, &c. $= l\,10$.

Quelle est la valeur qu'il auroit fallu donner à M pour trouver $1 = l\,10$, comme dans les Tables des logarithmes de Brigs & d'Ulac? on aura le logarithme $\dot{2}302585092994$ de 10 que nous venons de trouver, au logarithme 1 du même nombre 10, comme la valeur 1 que nous avons donnée à M à la valeur qu'il auroit fallu lui donner.

Donc $M = \frac{1}{\dot{2}302585092994} = \frac{1000000000000}{\dot{2}302585092994} = \frac{1000000000000}{2302585092994}$ ou $\frac{1000000000000}{2302585092994} = \dot{0}434294481903$, &c.

En mettant pour M cette valeur, on aura

$$M(202p + 76q - 53r + 87s) = l7.$$
$$M(167p + 63q - 44r + 72s) = l5.$$
$$M(114p + 43q - 30r + 49s) = l3 \;\&$$
$$1 - M(167p + 63q - 44r + 72s) = l2.$$

Ayant M & les logarithmes des nombres premiers, 2, 3, 5, 7, au dessous de 10, pour avoir les logarithmes des nombres premiers, 11, 13, 17, 19, &c. au dessus de 10, soit A un nombre premier quelconque, je suppose qu'on a les logarithmes de tous les nombres premiers qui précèdent A, on aura $lA = \frac{1}{2}\left[l\frac{A^2}{A^2-1} + l(A-1) + l(A+1)\right]$; mais $l\frac{A^2}{A^2-1} =$ la distance de $A^2 - 1$ à A^2, que nous venons d'apprendre à déterminer, & $l(A-1)$, $l(A+1)$ sont donnés.



DOUTES

DOUTES sur la Méthode d'Approximation dont M. Clairaut s'est servi pour déterminer le mouvement de la Lune autour de la Terre, & autre route pour la solution de ce Problème.

DEUX corps T & L s'attirent mutuellement, & sont attirés par un troisième corps S en raison des masses & en raison inverse du quarré des distances : le mouvement de S autour de T étant donné, trouver celui de L aussi autour de T.

La force qui accélère L vers T, est $= \frac{T}{(TL)^2}$; celle qui l'accélère vers S, est $= \frac{S}{(LS)^2}$.

La force qui accélère T vers L, est $= \frac{L}{(TL)^2}$; celle qui l'accélère vers S, est $= \frac{S}{(TS)^2}$.

Je ne changerois rien au mouvement de ces trois corps entr'eux, si à un même instant quelconque je leur imprimois une vîtesse égale & directement contraire à la vîtesse qu'auroit le corps T dans cet instant, & si à tous les instans suivans, outre les forces qui les accéléreroient, je les accélérois de plus par des forces égales & directement contraires à celles qui accéléreroient le corps T dans ces instans.

Par ce moyen, le corps T seroit en repos dans l'espace absolu ; les corps S, L continueroient de se mouvoir autour de T comme ils s'y meuvent, & le corps L seroit perpétuellement accéléré par quatre forces ; savoir :

1.° Dans la direction LT par la force $\frac{T}{(TL)^2}$.

2.° Dans la direction TL par la force $\frac{-L}{(TL)^2}$.

3.° Dans la direction LS par la force $\frac{S}{(LS)^2}$.

4.° Enfin dans la direction TS par la force $\frac{-S}{(TS)^2}$.

Je suppose que le corps S se meut autour de T dans le plan γTS, & que Sf, Ll sont deux petites lignes que parcourent en même temps les corps S, L.

Du point S je mène au plan LTl la perpendiculaire SS', & du point S' je mène à TL la perpendiculaire $S'P$.

La force $\frac{S}{(LS)^2}$ dans la direction LS, peut être regardée comme résultante d'une force dans la direction $S'S = \frac{S.SS'}{(LS)^3}$, & d'une force dans la direction $LS' = \frac{S.LS'}{(LS)^3}$.

La force $\frac{S.LS'}{(LS)^3}$ dans la direction LS', peut être regardée comme résultante d'une force dans la direction $TL = \frac{S.LP}{(LS)^3}$, & d'une force dans la direction $PS' = \frac{S.S'P}{(LS)^3}$.

La force $\frac{-S}{(TS)^2}$ dans la direction TS, peut être regardée comme résultante d'une force dans la direction $S'S = \frac{-S.SS'}{(TS)^3}$, & d'une force dans la direction $TS' = \frac{-S.TS'}{(TS)^3}$.

La force $\frac{-S.TS'}{(TS)^3}$ dans la direction TS', peut être regardée comme résultante d'une force dans la direction $TL = \frac{-S.TP}{(TS)^3}$, & d'une force dans la direction $PS' = \frac{-S.S'P}{(TS)^3}$.

La force qui accélère le corps L dans la direction LT est donc $= \frac{T+L}{(TL)^2} - \frac{S.LP}{(LS)^3} + \frac{S.TP}{(TS)^3} = \Sigma$.

Celle qui l'accélère dans la direction PS', est $= \frac{S.S'P}{(LS)^3} - \frac{S.S'P}{(TS)^3} = \Pi$.

Celle enfin qui l'accélère dans la direction $S'S$, est $= \frac{S.SS'}{(LS)^3} - \frac{S.SS'}{(TS)^3} = \Psi$.

Soit l'angle $LTl = \dot{v}$, $TL = r$, le temps que le corps L met à parcourir $Ll = \dot{x}$, l'arc LR, décrit du centre T & du rayon TL qui coupe Tl en R, sera $= r\dot{v}$, $Rl = \dot{r}$, $Ll = \sqrt{(r^2\dot{v}^2 + \dot{r}^2)} = \dot{f}$.

La vîtesse angulaire de L autour de $T = \frac{\dot{v}}{\dot{x}}$, & sa vîtesse autour de $T = r(\frac{\dot{v}}{\dot{x}})$; la force centrifuge de $L = r(\frac{\dot{v}}{\dot{x}})^2$; la vîtesse de L le long de $TL = \frac{\dot{r}}{\dot{x}}$.

Par le principe qu'une force agissant sans cesse est égale à l'effet qu'elle produit, divisé par le temps qu'elle met à le produire, on aura cette équation-ci, $r(\frac{\dot{v}}{\dot{x}})^2 - \Sigma = \frac{d(\frac{\dot{r}}{\dot{x}})}{\dot{x}}$

Le corps L arrivé en l continueroit de se mouvoir dans la direction Ll avec la vîtesse avec laquelle il vient de parcourir Ll.

Soit la la ligne qu'il parcourroit dans le second instant, on aura $\dot{f} : la :: \dot{x} : \dot{x}'$ ou $\dot{f} : la - \dot{f} :: \dot{x} : \ddot{x}$; donc $la = \dot{f} + \frac{\dot{f}\ddot{x}}{\dot{x}}$.

Mais à cause de la force Σ' dans la direction lT, le corps L a aussi au point l une petite vîtesse dans cette direction $= \Sigma'\dot{x}'$, en vertu de laquelle il parcourroit dans le second instant une ligne $= \Sigma'\dot{x}'\dot{x}' = \Sigma\dot{x}^2 + d(\Sigma\dot{x}^2) = \Sigma_{,}\dot{x}^2$.

Et à cauſe de la force Π' dans la direction $pſ'$, le corps L parcourroit pareillement dans le ſecond inſtant une ligne $= \Pi \dot{x}^2$.

Soit ab parallèle à $pſ'$ & $= \Pi \dot{x}^2$, ac parallèle à lT & $= \Sigma \dot{x}^2$, & ſoit achevé le rectangle $abhc$.

Le corps L, en vertu de ſa vîteſſe & des deux forces précédentes, parcourroit donc la ligne lh.

Du centre l & du rayon lh ſoit décrit l'arc $h\partial$ qui coupe la au point ∂, laquelle a déjà été coupée par bh au point g.

On aura les deux triangles abg, $gh\partial$ ſemblables entre eux, & au triangle LRl.

Donc $ag = ab.\frac{\dot{ſ}}{r\dot{v}}$, $bg = ab.\frac{\dot{r}}{r\dot{v}}$; donc $gh = \Sigma \dot{x}^2 - \frac{\dot{r}}{r\dot{v}} \Pi \dot{x}^2$ & $g\partial = la - \dot{ſ} - \frac{\dot{ſ}}{r\dot{v}} \Pi \dot{x}^2 = - \ddot{ſ} + \frac{\dot{ſ}\ddot{x}}{\dot{x}} - \frac{\dot{ſ}}{r\dot{v}} \Pi \dot{x}^2$.

Donc $\frac{gh}{g\partial} = \frac{\dot{ſ}}{\dot{r}}$, ou $d(\frac{\dot{ſ}^2}{\dot{x}^2}) + 2\Sigma\dot{r} + 2\Pi r\dot{v} = 0$,

ou $d(\frac{r^2\dot{v}^2 + \dot{r}^2}{\dot{x}^2}) + 2\Sigma\dot{r} + 2\Pi r\dot{v} = 0$.

Par la première équation, on aura $2\Sigma\dot{r} = 2r\dot{r}(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) - d(\frac{\dot{r}^2}{\dot{x}^2})$, & en ſubſtituant cette valeur de $2\Sigma\dot{r}$ dans la ſeconde, on aura $d(\frac{r^2\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 2r\dot{r}(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 2\Pi r\dot{v} = 0$,

ou $r^2 d(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 4r\dot{r}(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 2\Pi r\dot{v} = 0$,

ou $r^4 d(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 4r^3\dot{r}(\frac{\dot{v}^2}{\dot{x}^2}) + 2\Pi r^3\dot{v} = 0$;

& en intégrant, on aura $\frac{r^4\dot{v}^2}{\dot{x}^2} + 2\int \Pi r^3 \dot{v} = f^2$.

d'où l'on tirera $\dot{x} = \frac{r^2\dot{v}}{\sqrt{(f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{x})}}$;

Je substitue cette valeur de $\dot{x}$ dans la première équation; mais auparavant je fais $T + L = \dot{M}$, & $\Sigma = \frac{M}{r^2} + \Phi$.

J'aurai $2\dot{r}\dot{r}\left(\frac{f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}}{r^4}\right) - d\left[(f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v})\frac{\dot{r}^2}{r^4 \dot{v}^2}\right] = \frac{2M\dot{r}}{r^2} + 2\Phi\dot{r}$, ou $\frac{2\dot{r}}{r^3}(f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}) - d\left(\frac{\dot{r}^2}{r^4 \dot{v}^2}\right)$ $(f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}) - \frac{\dot{r}^2}{r^4 \dot{v}^2} d(f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}) = \frac{2M\dot{r}}{r^2} + 2\Phi\dot{r}$,

ou $\frac{2\dot{r}}{r^3} - d\left(\frac{\dot{r}}{r^2 \dot{v}}\right)^2 = \dfrac{\frac{2M\dot{r}}{r^2} + 2\Phi\dot{r} - \frac{2\Pi \dot{r}^2}{r\dot{v}}}{f^2 - 2\int \Pi r^3 \dot{v}}$, ou

$\frac{f^2}{Mr} - \frac{f^2}{M\dot{v}} d\left(\frac{\dot{r}}{r^2 \dot{v}}\right) = \dfrac{1 + \frac{\Phi r^2}{M} - \frac{\Pi r\dot{r}}{M\dot{v}}}{1 - 2\int \frac{\Pi r^3 \dot{v}}{f^2}}$, ou

$-1 + \frac{f^2}{Mr} - \frac{f^2}{M\dot{v}} d\left(\frac{\dot{r}}{r^2 \dot{v}}\right) = \dfrac{\frac{\Phi r^2}{M} - \frac{\Pi r\dot{r}}{M\dot{v}} + 2\int \frac{\Pi r^3 \dot{v}}{f^2}}{1 - 2\int \frac{\Pi r^3 \dot{v}}{f^2}} = \Omega$.

Soit $\dot{v}$ constant, on aura $-1 + \frac{f^2}{Mr} - \frac{f^2}{M\dot{v}^2} d\left(\frac{\dot{r}}{r^2}\right) = \Omega$; mais parce que $\frac{\dot{r}}{r^2} = -d\left(\frac{1}{r}\right)$, on aura

$$\frac{f^2}{Mr} - 1 + \frac{\frac{f^2}{M} dd\left(\frac{1}{r}\right)}{\dot{v}^2} = \Omega,$$

$$\text{ou } \frac{f^2}{Mr} - 1 + \frac{dd\left(\frac{f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} = \Omega,$$

$$\text{ou } \frac{f^2}{Mr} - 1 + \frac{dd\left(\frac{f^2}{Mr} - 1\right)}{\dot{v}^2} = \Omega;$$

$$\text{ou enfin } \left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right) + \frac{dd\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} + \Omega = 0.$$

Je ſuppoſe que l'on ſache que $\alpha + \beta$ coſ. μv eſt une valeur approchée de $\frac{1}{r}$, ſans cependant connoître les conſtantes α, β, μ, & qu'en ſubſtituant $\alpha + \beta$ coſ. μv au lieu de $\frac{1}{r}$ dans Ω, l'on parvienne à rendre $\Omega = A + B$ coſ. $mv + D$ coſ. nv + &c. on aura $(1 - \frac{f^2}{Mr}) + \frac{dd(1 - \frac{f^2}{Mr})}{\dot{v}^2} + A + B \text{coſ.}\, mv + D \text{coſ.}\, nv + \text{\&c.} = 0.$

A, B, D, &c. m, n, &c. déſignent des fonctions données des inconnues α, β, μ; & en multipliant par coſ. $v\,\dot{v}$, on aura $(1 - \frac{f^2}{Mr})\,\text{coſ.}\,v\,\dot{v} + \frac{dd(1 - \frac{f^2}{Mr}\,\text{coſ.}\,v}{\dot{v}} +$ $A\,\text{coſ.}\,v\,\dot{v} + B\,\text{coſ.}\,mv\,\text{coſ.}\,v\,\dot{v} + D\,\text{coſ.}\,nv\,\text{coſ.}\,v\,\dot{v} = 0;$

& en intégrant, on aura $\frac{d(1 - \frac{f^2}{Mr})\,\text{coſ.}\,v}{\dot{v}} +$ $(1 - \frac{f^2}{Mr})\,\text{ſin.}\,v + A\,\text{ſin.}\,v + B.\frac{m\,\text{coſ.}\,v\,\text{ſin.}\,mv - \text{ſin.}\,v\,\text{coſ.}\,mv}{m^2 - 1}$ $+ D.\frac{n\,\text{coſ.}\,v\,\text{ſin.}\,nv - \text{ſin.}\,v\,\text{coſ.}\,nv}{n^2 - 1} + \text{\&c.} = g.$

Je veux que lorſque l'angle $v = 0$, le rayon vecteur ſoit perpendiculaire à la courbe, c'eſt-à-dire, qu'à ce point $\dot{r}$ ſoit $= 0$; j'aurai $g = 0$; & en multipliant par $\frac{\dot{v}}{(\text{coſ.}\,v)^2}$, j'aurai $\frac{d(1 - \frac{f^2}{Mr})}{\text{coſ.}\,v} + \frac{(1 - \frac{f^2}{Mr})\,\text{ſin.}\,v\,\dot{v}}{(\text{coſ.}\,v)^2} +$ $\frac{A\,\text{ſin.}\,v\,\dot{v}}{(\text{coſ.}\,v)^2} + \frac{B}{m^2 - 1}.\frac{m\,\text{coſ.}\,v\,\text{ſin.}\,mv\,\dot{v} - \text{ſin.}\,v\,\text{coſ.}\,mv\,\dot{v}}{(\text{coſ.}\,v)^2} +$ $\frac{D}{n^2 - 1}.\frac{n\,\text{coſ.}\,v\,\text{ſin.}\,nv\,\dot{v} - \text{ſin.}\,v\,\text{coſ.}\,nv\,\dot{v}}{(\text{coſ.}\,v)^2} + \text{\&c.} = 0.$

En intégrant, j'aurai $\frac{1-\frac{f^2}{Mr}}{\text{cos}.\,v} + \frac{A}{\text{cos}.\,v} - \frac{B}{m^2-1}\,\frac{\text{cos}.\,mv}{\text{cos}.\,v} - \frac{D}{n^2-1}\,\frac{\text{cos}.\,nv}{\text{cos}.\,v} - \&c. = h,$

ou $\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2} + \frac{MA}{f^2} - \frac{Mh\,\text{cos}.\,v}{f^2} - \frac{MB}{f^2(m^2-1)}\,\text{cos}.\,mv - \frac{MD}{f^2(n^2-1)}\,\text{cos}.\,nv - \&c.$

Les lettres $A, B, D,$ &c. $m, n,$ &c. désignent, comme nous l'avons dit, des fonctions données des inconnues α, ζ, μ; par conséquent, si l'on étoit effectivement sûr que $\alpha + \zeta\,\text{cos}.\,\mu v$ est une valeur approchée de $\frac{1}{r}$; si de plus les constantes α, ζ, μ étoient données, & si toutes les négligences que l'on a été obligé de faire pour rendre $\Omega = A + B\,\text{cos}.\,mv + D\,\text{cos}.\,nv + \&c.$ n'étoient pas trop fortes, l'équation $\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2} + \frac{MA}{f^2} - \frac{Mh}{f^2}\,\text{cos}.\,v - \frac{MB}{f^2(m^2-1)}\,\text{cos}.\,mv - \frac{MD}{f^2(n^2-1)}\,\text{cos}.\,nv - \&c.$ seroit plus vraie que celle-ci, $\frac{1}{r} = \alpha + \zeta\,\text{cos}.\,\mu v$, & l'on pourroit s'en servir pour en trouver une autre encore plus approchée, comme l'on s'est servi de celle-ci, $\frac{1}{r} = \alpha + \zeta\,\text{cos}.\,\mu v$.

Mais comme les constantes α, ζ, μ ne sont pas données, M. Clairaut, pour les déterminer, fait égales ensemble les deux valeurs de $\frac{1}{r}$, celle qu'il a supposé, & celle qu'il en a déduit, & il faut, pour cet effet, qu'il fasse la constante h, que nous avons ajoûtée en intégrant, $= 0$; or il est certain que si les constantes α, ζ, μ étoient données, M. Clairaut ne feroit pas $h = 0$: pourquoi? parce que ces constantes ne sont pas données, est-il plus permis de faire $h = 0$? Il est vrai que de la manière dont M. Clairaut a intégré

ſon équation, il a pû ne pas s'apercevoir que ce qu'il faiſoit revenoit à faire $h = 0$.

Je ſuppoſe que les forces φ & π fuſſent telles que l'on eût tout de ſuite, & ſans aucune ſuppoſition $\Omega = A + B \operatorname{coſ.} mv + D \operatorname{coſ.} nv +$ &c. A, B, D, &c. m, n, &c. étant des quantités données, pour avoir l'équation de l'orbite de la Lune autour de la Terre, on intégreroit cette équation-ci,

$$\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right) + \frac{dd\left(1 - \frac{f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} + A + B \operatorname{coſ.} mv$$

$+ D \operatorname{coſ.} nv + E \operatorname{coſ.} pv +$ &c. $= 0$, & l'on détermineroit les conſtantes que l'on auroit ajoûtées en intégrant par quelques phénomènes du mouvement de la Lune, au lieu de les déterminer arbitrairement.

Soient, par exemple, $\varphi = \frac{V\dot{r}}{r^4 \dot{v}} + \frac{W}{r^2}$ & $\pi = \frac{V}{r^3}$ (V & W étant deux fonctions quelconques de v qui ſont données) on aura $\Omega = \frac{\frac{W}{M} + 2\int \frac{V\dot{v}}{f^2}}{1 - 2\int \frac{V\dot{v}}{f^2}}$; fera-t-on $h = 0$?

D'ailleurs, je ne ſais pas comment M. Clairaut a pû ſavoir que cette équation-ci $\frac{1}{r} = \alpha + \zeta \operatorname{coſ.} \mu v$ approchoit beaucoup d'être l'équation de l'orbite de la Lune autour de la Terre, ſans connoître en même temps les conſtantes α, ζ, μ. Si c'étoit réellement là l'équation de cette orbite à peu près, la meilleure façon ſeroit de tâcher de déterminer les conſtantes α, ζ, μ par quelques phénomènes du mouvement de la Lune, & enſuite de voir ſi elle ſatisferoit à tous les autres phénomènes du mouvement de cet aſtre; l'on ſuppoſeroit enſuite $\frac{1}{r} = \alpha + \zeta \operatorname{coſ.} \mu v + \gamma \operatorname{coſ.} \nu v$, mais α, ζ, μ n'auroient

n'auroient pas dans cette seconde supposition les mêmes valeurs que dans la première, ce qui est encore un des défauts de la solution de M. Clairaut, lorsqu'il joint de nouveaux termes à son équation, il suppose que les coëfficiens des premiers restent les mêmes.

De la solution de M. Clairaut, il suit que sans l'action du Soleil la Lune décriroit autour de la Terre un cercle; car tous les autres termes de son équation sont dûs à l'action du Soleil.

Voici maintenant une autre route que l'on pourroit prendre pour résoudre ce problème-ci à la manière de M. Clairaut.

Je reprends l'équation $1 - \frac{f^2}{Mr} + \frac{dd\left(\frac{-f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} + \Omega = 0$, & je l'écris ainsi,

$$1 - \frac{f^2}{Mr} + \frac{e}{r} + \frac{dd\left(\frac{-f^2}{Mr}\right)}{\dot{v}^2} + \Omega - \frac{e}{r} = 0, \text{ ou ainsi,}$$

$$\left(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}\right) + \frac{dd\left(-\frac{f^2 - eM}{Mr}\right)}{\frac{f^2 - eM}{f^2}\dot{v}^2} + \Omega - \frac{e}{r} = 0, \text{ ou}$$

$$\left(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}\right) + \frac{dd\left(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}\right)}{\frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v} \times \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v}} + \Omega - \frac{e}{r} = 0.$$

Je multiplie par cof. $\frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}v \times \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v}$, j'aurai $\left(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}\right)\text{cof.}\frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}v \times \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v}$

$$+ \frac{dd\left(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}\right)\text{cof.}\frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}v}{\frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v}} + \left(\Omega - \frac{e}{r}\right).$$

$\text{cof.}\frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}v \times \frac{1}{f}\sqrt{(f^2 - eM)}\dot{v} = 0$, &

en intégrant, j'aurai $\frac{d(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}) \operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v}{\frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} \dot{v}} +$

$(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}) \operatorname{fin.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v + \int (\Omega - \frac{e}{r}).$

$\operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v \times \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} \dot{v} = g.$

Je multiplie par

$\frac{\frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} \dot{v}}{[\operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v]^2}$; j'aurai $\frac{d(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr})}{\operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v} +$

$\frac{(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr}) \operatorname{fin.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v . \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} \dot{v}}{[\operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v]^2} +$

$\frac{\frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} \dot{v}}{[\operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v]^2} \int (\Omega - \frac{e}{r}) \operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v .$

$\frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v = \frac{g \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} \dot{v}}{[\operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v]^2}$; & en intégrant, j'aurai $\frac{(1 - \frac{f^2 - eM}{Mr})}{\operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v} + \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v}{\operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v}$

$\int (\Omega - \frac{e}{r}) \operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v . \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} \dot{v} -$

$\int (\Omega - \frac{e}{r}) \operatorname{fin.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v . \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} \dot{v} =$

$\frac{g \operatorname{fin.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v}{\operatorname{cof.} \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)} v} + h$, ou

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2 - eM} - \frac{Mg}{f^2 - eM} \text{ fin. } \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)}\, v - \frac{Mh}{f^2 - eM}$$
$$\text{cof. } \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)}\, v + \frac{M}{f^2 - eM} \text{ fin. } \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)}\, v$$
$$\int (\Omega - \tfrac{e}{r}) \text{ cof. } \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)}\, v \times \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)}\, \dot{v}$$
$$- \frac{M}{f^2 - eM} \text{ cof. } \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)}\, v \int (\Omega - \tfrac{e}{r})$$
$$\text{fin. } \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)}\, v \,.\, \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)}\, \dot{v}.$$

Pour première approximation, je fais $\Omega - \frac{e}{r} = 0$; j'aurai $\frac{1}{r} = \frac{M}{f^2 - eM} - \frac{Mg}{f^2 - eM} \text{ fin. } \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)}\, v - \frac{Mh}{f^2 - eM} \text{ cof. } \frac{1}{f} \sqrt{(f^2 - eM)}\, v$.

Au moyen de ces deux équations, & des autres équations du Problème, j'aurai une équation dans laquelle il n'y aura qu'une feule indéterminée; je ferai le coëfficient de chaque terme de cette équation $= 0$, &c.



SUR LE MOUVEMENT DE LA LUNE
AUTOUR DE LA TERRE,
d'après le système de la Pesanteur.

LEMME I.

JE suppose que x & z sont deux quantités indéterminées, qui dépendent l'une de l'autre, ou entre lesquelles il règne une équation dans la nature des choses, & que l'indéterminée z va toûjours en croissant ; si par aucune voie connue on ne peut parvenir à trouver l'expression de x en z, ni absolument, ni par approximation, voici une méthode pour avoir cette expression par le moyen de plusieurs observations, du moins pour l'intervalle compris entre la première & la dernière observation.

Soient, par exemple, $a, a_{I}, a_{II}, a_{III}, a_{IIII}$, cinq valeurs successives de z, & $\alpha, \alpha_{I}, \alpha_{II}, \alpha_{III}, \alpha_{IIII}$, autant de valeurs correspondantes de x. Je fais $x = A + Bz + Cz^{2} + Dz^{3} + Ez^{4}$; par conséquent, j'aurai $\alpha = A + aB + a^{2}C + a^{3}D + a^{4}E$, & en différenciant, j'aurai

$$\frac{\alpha_{I} - \alpha}{a_{I} - a} = \beta = B + (a + a_{I})C + (a^{2} + aa_{I} + a_{I}^{2})D + (a^{3} + a^{2}a_{I} + aa_{I}^{2} + a_{I}^{3})E,$$

$$\frac{\beta_{I} - \beta}{a_{II} - a} = \gamma = C + (a + a_{I} + a_{II})D + (a^{2} + aa_{I} + aa_{I}^{2} + a_{II} + a_{I}a_{II} + a_{II}^{2})E,$$

$$\frac{\gamma_{I} - \gamma}{a_{III} - a} = \delta = D + (a + a_{I} + a_{II} + a_{III})E,$$

$$\frac{\delta_{I} - \delta}{a_{IIII} - a} = \varepsilon = E.$$

Donc $A = \alpha - a\beta + aa_{\prime}\gamma - aa_{\prime}a_{\prime\prime}\delta + aa_{\prime}a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime}\varepsilon$,

$$B = \beta - (a + a_{\prime})\gamma + (aa_{\prime} + aa_{\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime})\delta - (aa_{\prime}a_{\prime\prime} + aa_{\prime}a_{\prime\prime\prime} + aa_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime})\varepsilon,$$

$$C = \gamma - (a + a_{\prime} + a_{\prime\prime})\delta + (aa_{\prime} + aa_{\prime\prime} + aa_{\prime\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime\prime} + a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime})\varepsilon,$$

$$D = \delta - (a + a_{\prime} + a_{\prime\prime} + a_{\prime\prime\prime})\varepsilon,$$

$$E = \varepsilon.$$

Donc $x = \alpha - a\beta + aa_{\prime}\gamma - aa_{\prime}a_{\prime\prime}\delta + aa_{\prime}a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime}\varepsilon + [\beta - (a + a_{\prime}).\gamma + (aa_{\prime} + aa_{\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime})\delta - (aa_{\prime}a_{\prime\prime} + aa_{\prime}a_{\prime\prime\prime} + aa_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime}).\varepsilon]z + [\gamma - (a + a_{\prime} + a_{\prime\prime})\delta + (aa_{\prime} + aa_{\prime\prime} + aa_{\prime\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime\prime} + a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime}).\varepsilon]z^2 + [\delta - (a + a_{\prime} + a_{\prime\prime} + a_{\prime\prime\prime}).\varepsilon]z^3 + \varepsilon z^4$, ou
$x = \alpha + \beta(z - a) + \gamma(z - a)(z - a_{\prime}) + \delta(z - a)(z - a_{\prime})(z - a_{\prime\prime}) + \varepsilon(z - a)(z - a_{\prime})(z - a_{\prime\prime})(z - a_{\prime\prime\prime})$.

Si nous étions partis de six observations, nous aurions fait $x = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5$, & nous aurions eu

$$A = \alpha - a\beta + aa_{\prime}\gamma - aa_{\prime}a_{\prime\prime}\delta + aa_{\prime}a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime}\varepsilon - aa_{\prime}a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime}a_{\prime\prime\prime\prime}\zeta.$$

$$B = \beta - (a + a_{\prime})\gamma + (aa_{\prime} + aa_{\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime})\delta - (aa_{\prime}a_{\prime\prime} + aa_{\prime}a_{\prime\prime\prime} + aa_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime})\varepsilon + (aa_{\prime}a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime} + aa_{\prime}a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime\prime} + aa_{\prime}a_{\prime\prime\prime}a_{\prime\prime\prime\prime} + aa_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime}a_{\prime\prime\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime}a_{\prime\prime\prime\prime})\zeta.$$

$$C = \gamma - (a + a_{\prime} + a_{\prime\prime})\delta + (aa_{\prime} + aa_{\prime\prime} + aa_{\prime\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime} + a_{\prime}a_{\prime\prime\prime} + a_{\prime\prime}a_{\prime\prime\prime})\varepsilon - (aa_{\prime}a_{\prime\prime} + aa_{\prime}a_{\prime\prime\prime} + aa_{\prime}a_{\prime\prime\prime\prime} +$$

$a a_{II} a_{III} + a a_{II} a_{IIII} + a a_{III} a_{IIII} + a_{I} a_{II} a_{III} + a_{I} a_{II} a_{IIII} + a_{I} a_{III} a_{IIII} + a_{II} a_{III} a_{IIII})\zeta.$

$D = \delta - (a + a_{I} + a_{II} + a_{III})\varepsilon + (a a_{I} + a a_{II} + a a_{III} + a a_{IIII} + a_{I} a_{II} + a_{I} a_{III} + a_{I} a_{IIII} + a_{II} a_{III} + a_{II} a_{IIII} + a_{III} a_{IIII})\zeta.$

$E = \varepsilon - (a + a_{I} + a_{II} + a_{III} + a_{IIII})\zeta.$

$F = \zeta.$

Donc $x =$ &c. ou $x = \alpha + \beta(z - a) + \gamma(z - a)(z - a_{I}) + \delta(z - a)(z - a_{I})(z - a_{II}) + \varepsilon(z - a)(z - a_{I})(z - a_{II})(z - a_{III}) + \zeta(z - a)(z - a_{I})(z - a_{II})(z - a_{III})(z - a_{IIII})$ &c.

Quant aux coëfficiens $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta,$ &c. on les déterminera de la manière suivante.

$$\frac{\alpha_{I} - \alpha}{a_{I} - a} \quad \frac{\alpha_{II} - \alpha_{I}}{a_{II} - a_{I}} \quad \frac{\alpha_{III} - \alpha_{II}}{a_{III} - a_{II}} \quad \frac{\alpha_{IIII} - \alpha_{III}}{a_{IIII} - a_{III}} \quad \frac{\alpha_{IIIII} - \alpha_{IIII}}{a_{IIIII} - a_{IIII}} \text{ \&c.}$$

$$\beta \quad \beta_{I} \quad \beta_{II} \quad \beta_{III} \quad \beta_{IIII}$$

$$\frac{\beta_{I} - \beta}{a_{II} - a} \quad \frac{\beta_{II} - \beta_{I}}{a_{III} - a_{I}} \quad \frac{\beta_{III} - \beta_{II}}{a_{IIII} - a_{II}} \quad \frac{\beta_{IIII} - \beta_{III}}{a_{IIIII} - a_{III}} \text{ \&c.}$$

$$\gamma \quad \gamma_{I} \quad \gamma_{II} \quad \gamma_{III}$$

$$\frac{\gamma_{I} - \gamma}{a_{III} - a} \quad \frac{\gamma_{II} - \gamma_{I}}{a_{IIII} - a_{I}} \quad \frac{\gamma_{III} - \gamma_{II}}{a_{IIIII} - a_{II}} \text{ \&c.}$$

$$\delta \quad \delta_{I} \quad \delta_{II}$$

$$\frac{\delta_{I} - \delta}{a_{IIII} - a} \quad \frac{\delta_{II} - \delta_{I}}{a_{IIIII} - a_{I}} \text{ \&c.}$$

$$\varepsilon \quad \varepsilon_{I}$$

$$\frac{\varepsilon_{I} - \varepsilon}{a_{IIIII} - a} \text{ \&c.}$$

LEMME II.

Je suppose que vous ayez une équation entre z, $\dot{z}$, x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, &c. à laquelle vous soyez arrivé, en faisant $\dot{z}$ constant, & que vous vouliez avoir x en z.

z étant $= a$, soit $x = c$, $\dot{x} = \dot{c}$, $\ddot{x} = \ddot{c}$, $\dddot{x} = \dddot{c}$, &c. à l'infini.

z étant $a + v$, on aura $x = c + \alpha v \frac{\dot{c}}{\dot{z}} + \beta v^2 \frac{\ddot{c}}{\dot{z}^2} + \gamma v^3 \frac{\dddot{c}}{\dot{z}^3} + \delta v^4 \frac{\ddddot{c}}{\dot{z}^4} +$ &c.

Il faut déterminer les coëfficiens α, β, γ, δ, &c.

En différenciant, on aura $\dot{x} = \alpha \dot{c} + 2\beta v \frac{\ddot{c}}{\dot{z}} + 3\gamma v^2 \frac{\dddot{c}}{\dot{z}^2} + 4\delta v^3 \frac{\ddddot{c}}{\dot{z}^3} +$ &c.

Mais chaque coëfficient de cette dernière suite doit être égal à son correspondant dans la première.

Donc $\alpha = 1$, $2\beta = \alpha$ ou $\beta = \frac{1}{2}$, $3\gamma = \beta$ ou $\gamma = \frac{1}{2.3}$, $4\delta = \gamma$ ou $\delta = \frac{1}{2.3.4}$, &c.

Par conséquent, z étant $a + v$, on aura $x = c + \frac{v}{1} \frac{\dot{c}}{\dot{z}} + \frac{v^2}{1.2} \frac{\ddot{c}}{\dot{z}^2} + \frac{v^3}{1.2.3} \frac{\dddot{c}}{\dot{z}^3} + \frac{v^4}{1.2.3.4} \frac{\ddddot{c}}{\dot{z}^4} +$ &c.

Maintenant au moyen de l'équation donnée & de ses différences à l'infini, vous aurez $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{x}$, &c. en z, $\dot{z}$, x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$.

Par conséquent vous aurez $\dddot{c}$, $\ddddot{c}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{c}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{c}$, &c. en a, $\dot{z}$, c, $\dot{c}$, $\ddot{c}$.

Substituez ces valeurs, & vous aurez x en a, $\dot{z}$, c, $\dot{c}$, $\ddot{c}$, & en v.

Remettez $z - a$ à la place de v, & vous aurez x en a, z, $\dot{z}$, c, $\dot{c}$, $\ddot{c}$, &c.

Faites $\dot{z} = 1$, & déterminez c, $\dot{c}$, $\ddot{c}$, en satisfaisant aux conditions de votre problème.

Si vous vouliez avoir z en x, il faudroit à la place de l'équation que vous avez, trouver celle que l'on auroit eue en ne faisant ni $\dot{x}$ ni $\dot{z}$ constant, & ensuite faire dans cette nouvelle équation $\ddot{x} = 0$, $\dddot{x} = 0$, &c.

PROBLÉME.

Deux corps T & L *(fig. 38.)* s'attirent mutuellement, & sont attirés par un troisième corps S en raison des masses & en raison inverse du quarré des distances: le mouvement de S autour de T étant donné, trouver celui de L aussi autour de T.

La force qui accélère L vers T, est $= \frac{T}{(TL)^2}$; celle qui l'accélère vers S, est $= \frac{S}{(LS)^2}$.

La force qui accélère T vers L, est $= \frac{L}{(TL)^2}$; celle qui l'accélère vers S, est $= \frac{S}{(TS)^2}$.

Je ne changerois rien au mouvement de ces trois corps entr'eux, si à un même instant quelconque je leur imprimois une vîtesse égale & directement contraire à la vîtesse qu'auroit le corps T dans cet instant, & si à tous les instans suivans, outre les forces qui les accéléreroient, je les accélérois de plus par des forces égales & directement contraires à celles qui accéléreroient le corps T dans ces instans.

Par

Par ce moyen, le corps T ſeroit en repos dans l'eſpace abſolu ; les corps S, L continueroient de ſe mouvoir autour de T comme ils s'y meuvent, & le corps L ſeroit perpétuellement accéléré par quatre forces; ſavoir :

1.° Dans la direction LT par la force $\frac{T}{(TL)^2}$.

2.° Dans la direction TL par la force $\frac{-L}{(TL)^2}$.

3.° Dans la direction LS par la force $\frac{S}{(LS)^2}$.

4.° Enfin dans la direction TS par la force $\frac{-S}{(TS)^2}$.

Je ſuppoſe que le corps S ſe meut autour de T dans le plan γTS. Soient S & L les lieux des corps S & L dans un inſtant quelconque, du point L je mène au plan γTS la perpendiculaire LM, & du point M je mène à $T\gamma$ la perpendiculaire MP; je fais $TP = p$, $PM = q$, $ML = r$; la force qui accélère L dans la direction $TP = -P$, celle qui l'accélère dans la direction $PM = -Q$, celle qui l'accélère dans la direction $ML = -R$; le temps $= t$.

En ſuppoſant $\dot{t}$ conſtant, j'aurai $\ddot{p} = -P\dot{t}^2$, $\ddot{q} = -Q\dot{t}^2$, $\ddot{r} = -R\dot{t}^2$.

Soit l'angle $\gamma TS = \theta$, $TS = y$; l'angle $\gamma TM = \varphi$, l'angle STM ſera $= \varphi - \theta$. Soit l'angle $MTL = \psi$, $TL = x$; TM ſera $= x \operatorname{coſ.} \psi$, $r = x \operatorname{ſin.} \psi$, $q = x \operatorname{coſ.} \psi \operatorname{ſin.} \varphi$, $p = x \operatorname{coſ.} \psi \operatorname{coſ.} \varphi$.

Donc $dd(x \operatorname{coſ.} \psi \operatorname{coſ.} \varphi) = -P\dot{t}^2$,

$dd(x \operatorname{coſ.} \psi \operatorname{ſin.} \varphi) = -Q\dot{t}^2$,

$dd(x \operatorname{ſin.} \psi) = -R\dot{t}^2$.

Il ne s'agit donc plus que d'avoir l'expreſſion des forces P, Q, R.

Du point M je mène à TM la perpendiculaire MQ, & à TS la perpendiculaire ME; j'aurai $ME = x \operatorname{cos.} \psi \operatorname{sin.} (\varphi - \theta)$, $TE = x \operatorname{cos.} \psi \operatorname{cos.} (\varphi - \theta)$; donc $ES = y - x \operatorname{cos.} \psi \operatorname{cos.} (\varphi - \theta)$, $MS = \sqrt{[x^2 (\operatorname{cos.} \psi)^2 + y^2 - 2xy \operatorname{cos.} \psi \operatorname{cos.} (\varphi - \theta)]}$, $LS = \sqrt{[y^2 - 2xy \operatorname{cos.} \psi \operatorname{cos.} (\varphi - \theta) + x^2]} = u$.

La force $\frac{T + L}{x^2}$ dans la direction LT, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $LM = \frac{(T + L) \operatorname{sin.} \psi}{x^2}$, & d'une force dans la direction $MT = \frac{(T + L) \operatorname{cos.} \psi}{x^2}$.

La force $\frac{S}{u^2}$ dans la direction LS, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $LM = \frac{S x \operatorname{sin.} \psi}{u^3}$, & d'une force dans la direction $MS = \frac{S.MS}{u^3}$.

La force $\frac{S.MS}{u^3}$ dans la direction MS, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $MT = \frac{S x \operatorname{cos.} \psi}{u^3}$, & d'une force dans la direction $TS = \frac{Sy}{u^3}$.

La force $\frac{Sy}{u^3} - \frac{S}{y^2}$ dans la direction TS, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $MT = \frac{S \operatorname{cos.} (\varphi - \theta)}{y^2} - \frac{Sy \operatorname{cos.} (\varphi - \theta)}{u^3}$, & d'une force dans la direction $MQ = \frac{Sy \operatorname{sin.} (\varphi - \theta)}{u^3} - \frac{S \operatorname{sin.} (\varphi - \theta)}{y^2}$.

La force $\frac{(T + L) \operatorname{cos.} \psi}{x^2} + \frac{S x \operatorname{cos.} \psi}{u^3} + \frac{S \operatorname{cos.} (\varphi - \theta)}{y^2} - \frac{Sy \operatorname{cos.} (\varphi - \theta)}{u^3}$ dans la direction MT, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $PT = \frac{(T + L) \operatorname{cos.} \psi \operatorname{cos.} \varphi}{x^2} + \frac{S x \operatorname{cos.} \psi \operatorname{cos.} \varphi}{u^3} + \frac{S \operatorname{cos.} \varphi \operatorname{cos.} (\varphi - \theta)}{y^2} - \frac{Sy \operatorname{cos.} \varphi \operatorname{cos.} (\varphi - \theta)}{u^3}$,

& d'une force dans la direction $MP = \frac{(T + L)\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi}{x^2} + \frac{Sx\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi}{u^3} + \frac{S\,\text{fin.}\,\varphi\,\text{cof.}\,(\varphi - \theta)}{y^2} - \frac{Sy\,\text{fin.}\,\varphi\,\text{cof.}\,(\varphi - \theta)}{u^3}$.

La force $\frac{Sy\,\text{fin.}\,(\varphi - \theta)}{u^3} - \frac{S\,\text{fin.}\,(\varphi - \theta)}{y^2}$ dans la direction MQ, peut être prise pour le résultat d'une force dans la direction $MP = \frac{Sy\,\text{cof.}\,\varphi\,\text{fin.}\,(\varphi - \theta)}{u^3} - \frac{S\,\text{cof.}\,\varphi\,\text{fin.}\,(\varphi - \theta)}{y^2}$, & d'une force dans la direction $PT = \frac{S\,\text{fin.}\,\varphi\,\text{fin.}\,(\varphi - \theta)}{y^2} - \frac{Sy\,\text{fin.}\,\varphi\,\text{fin.}\,(\varphi - \theta)}{u^3}$.

On aura donc $P = \frac{(T + L)\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi}{x^2} + \frac{Sx\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi}{u^3} + \frac{S\,\text{cof.}\,\theta}{y^2} - \frac{Sy\,\text{cof.}\,\theta}{u^3}$,

$$Q = \frac{(T + L)\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi}{x^2} + \frac{Sx\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi}{u^3} + \frac{S\,\text{fin.}\,\theta}{y^2} - \frac{Sy\,\text{fin.}\,\theta}{u^3},$$

$$R = \frac{(T + L)\,\text{fin.}\,\psi}{x^2} + \frac{Sx\,\text{fin.}\,\psi}{u^3},$$

& nos trois équations seront

$$dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi) = -\left(\frac{(T + L)\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi}{x^2} + \frac{Sx\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi}{u^3} - \frac{Sy\,\text{cof.}\,\theta}{u^3} + \frac{S\,\text{cof.}\,\theta}{y^2}\right) t^2,$$

$$dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi) = -\left(\frac{(T + L)\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi}{x^2} + \frac{Sx\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi}{u^3} - \frac{Sy\,\text{fin.}\,\theta}{u^3} + \frac{S\,\text{fin.}\,\theta}{y^2}\right) t^2,$$

$$dd(x\,\text{fin.}\,\psi) = -\left(\frac{(T + L)\,\text{fin.}\,\psi}{x^2} + \frac{Sx\,\text{fin.}\,\psi}{u^3}\right) t^2.$$

En multipliant la première par $\text{fin.}\,\varphi$, la deuxième par

cof. φ, & en suppofant $T + L = M$, j'aurai ces deux équations-ci,

$$dd(x \text{ cof. } \psi \text{ cof. } \varphi) \text{ fin. } \varphi = -\frac{M \text{ cof. } \psi \text{ fin. } \varphi \text{ cof. } \varphi}{x^2} \dot{t}^2 - \frac{Sx \text{ cof. } \psi \text{ fin. } \varphi \text{ cof. } \varphi}{u^3} \dot{t}^2 + \frac{Sy \text{ fin. } \varphi \text{ cof. } \theta}{u^3} \dot{t}^2 - \frac{S \text{ fin. } \varphi \text{ cof. } \theta}{y^2} \dot{t}^2,$$

$$dd(x \text{ cof. } \psi \text{ fin. } \varphi) \text{ cof. } \varphi = -\frac{M \text{ cof. } \psi \text{ fin. } \varphi \text{ cof. } \varphi}{x^2} \dot{t}^2 - \frac{Sx \text{ cof. } \psi \text{ fin. } \varphi \text{ cof. } \varphi}{u^3} \dot{t}^2 + \frac{Sy \text{ cof. } \varphi \text{ fin. } \theta}{u^3} \dot{t}^2 - \frac{S \text{ cof. } \varphi \text{ fin. } \theta}{y^2} \dot{t}^2,$$

qui, étant ôtées l'une de l'autre, donneront celle-ci,

$$dd(x \text{ cof. } \psi \text{ cof. } \varphi) \text{ fin. } \varphi - dd(x \text{ cof. } \psi \text{ fin. } \varphi) \text{ cof. } \varphi = \frac{Sy \text{ fin. } (\varphi - \theta)}{u^3} \dot{t}^2 - \frac{S \text{ fin. } (\varphi - \theta)}{y^2} \dot{t}^2.$$

En multipliant la première par cof. φ, la deuxième par fin. φ, j'aurai ces deux équations-ci,

$$dd(x \text{ cof. } \psi \text{ cof. } \varphi) \text{ cof. } \varphi = -\frac{M \text{ cof. } \psi (\text{cof. } \varphi)^2}{x^2} \dot{t}^2 - \frac{Sx \text{ cof. } \psi (\text{cof. } \varphi)^2}{u^3} \dot{t}^2 + \frac{Sy \text{ cof. } \varphi \text{ cof. } \theta}{u^3} \dot{t}^2 - \frac{S \text{ cof. } \varphi \text{ cof. } \theta}{y^2} \dot{t}^2,$$

$$dd(x \text{ cof. } \psi \text{ fin. } \varphi) \text{ fin. } \varphi = -\frac{M \text{ cof. } \psi (\text{fin. } \varphi)^2}{x^2} \dot{t}^2 - \frac{Sx \text{ cof. } \psi (\text{fin. } \varphi)^2}{u^3} \dot{t}^2 + \frac{Sy \text{ fin. } \varphi \text{ fin. } \theta}{u^3} \dot{t}^2 - \frac{S \text{ fin. } \varphi \text{ fin. } \theta}{y^2} \dot{t}^2,$$

qui, étant ajoûtées enfemble, donneront celle-ci,

$$dd(x \text{ cof. } \psi \text{ cof. } \varphi) \text{ cof. } \varphi + dd(x \text{ cof. } \psi \text{ fin. } \varphi) \text{ fin. } \varphi = -\frac{M \text{ cof. } \psi}{x^2} \dot{t}^2 - \frac{Sx \text{ cof. } \psi}{u^3} \dot{t}^2 + \frac{Sy \text{ cof. } (\varphi - \theta)}{u^3} \dot{t}^2 - \frac{S \text{ cof. } (\varphi - \theta)}{y^2} \dot{t}^2.$$

Nos trois équations ſeront donc deſormais

$$dd(x\cos.\psi\cos.\varphi)\sin.\varphi - dd(x\cos.\psi\sin.\varphi)\cos.\varphi = \frac{Sy\sin.(\varphi-\theta)}{u^3}\dot{t}^2 - \frac{S\sin.(\varphi-\theta)}{y^2}\dot{t}^2,$$

$$dd(x\cos.\psi\cos.\varphi)\cos.\varphi + dd(x\cos.\psi\sin.\varphi)\sin.\varphi = -\frac{M\cos.\psi}{x^2}\dot{t}^2 - \frac{Sx\cos.\psi}{u^3}\dot{t}^2 + \frac{Sy\cos.(\varphi-\theta)}{u^3}\dot{t}^2 - \frac{S\cos.(\varphi-\theta)}{y^2}\dot{t}^2,$$

$$dd(x\sin.\psi) = -\frac{M\sin.\psi}{x^2}\dot{t}^2 - \frac{Sx\sin.\psi}{u^3}\dot{t}^2.$$

En multipliant la première par coſ. $(\varphi - \theta)$, la deuxième par ſin. $(\varphi - \theta)$, nous aurons ces deux-ci,

$$dd(x\cos.\psi\cos.\varphi)\sin.\varphi\cos.(\varphi-\theta) - dd(x\cos.\psi\sin.\varphi)\cos.\varphi\cos.(\varphi-\theta) = \frac{Sy\sin.(\varphi-\theta)\cos.(\varphi-\theta)}{u^3}\dot{t}^2 - \frac{S\sin.(\varphi-\theta)\cos.(\varphi-\theta)}{y^2}\dot{t}^2,$$

$$dd(x\cos.\psi\cos.\varphi)\cos.\varphi\sin.(\varphi-\theta) + dd(x\cos.\psi\sin.\varphi)\cos.\varphi\sin.(\varphi-\theta) = -\frac{M\cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)}{x^2}\dot{t}^2 - \frac{Sx\cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)}{u^3}\dot{t}^2 + \frac{Sy\sin.(\varphi-\theta)\cos.(\varphi-\theta)}{u^3}\dot{t}^2 - \frac{S\sin.(\varphi-\theta)\cos.(\varphi-\theta)}{y^2}\dot{t}^2,$$

qui, étant ôtées l'une de l'autre, donneront celle-ci,

$$dd(x\cos.\psi\cos.\varphi)\sin.\theta - dd(x\cos.\psi\sin.\varphi)\cos.\theta = \frac{M\cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)}{x^2}\dot{t}^2 + \frac{Sx\cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)}{u^3}\dot{t}^2.$$

Et nos trois équations ſeront

$$dd(x\cos.\psi\cos.\varphi)\sin.\varphi - dd(x\cos.\psi\sin.\varphi)\cos.\varphi = \frac{Sy\sin.(\varphi-\theta)}{u^3}\dot{t}^2 - \frac{S\sin.(\varphi-\theta)}{y^2}\dot{t}^2,$$

$$dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi)\,\text{fin.}\,\theta - dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)\,\text{cof.}\,\theta = \frac{M\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)}{x^2}\,\dot{t}^2 + \frac{Sx\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,\dot{t}^2,$$

$$dd(x\,\text{fin.}\,\psi) = -\frac{M\,\text{fin.}\,\psi}{x^2}\,\dot{t}^2 - \frac{Sx\,\text{fin.}\,\psi}{u^3}\,\dot{t}^2.$$

En multipliant la deuxième par $\text{fin.}\,\psi$, la troisième par $\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)$, nous aurons ces deux-ci,

$$dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi)\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\psi - dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)\,\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\psi = \frac{M\,\text{fin.}\,\psi\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)}{x^2}\,\dot{t}^2 + \frac{Sx\,\text{fin.}\,\psi\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,\dot{t}^2,$$

$$dd(x\,\text{fin.}\,\psi)\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta) = -\frac{M\,\text{fin.}\,\psi\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)}{x^2}\,\dot{t}^2 - \frac{Sx\,\text{fin.}\,\psi\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,\dot{t}^2,$$

qui, étant ajoûtées enſemble, donneront celle-ci,

$$dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi)\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\psi - dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)\,\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\psi + dd(x\,\text{fin.}\,\psi)\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta) = 0.$$

Nos trois équations ſeront donc préſentement

$$dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi)\,\text{fin.}\,\varphi - dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)\,\text{cof.}\,\varphi = \frac{Sy\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,\dot{t}^2 - \frac{S\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)}{y^2}\,\dot{t}^2,$$

$$dd(x\,\text{fin.}\,\psi) = -\frac{M\,\text{fin.}\,\psi}{x^2}\,\dot{t}^2 - \frac{Sx\,\text{fin.}\,\psi}{u^3}\,\dot{t}^2,$$

$$dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi)\,\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\psi - dd(x\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)\,\text{cof.}\,\theta\,\text{fin.}\,\psi + dd(x\,\text{fin.}\,\psi)\,\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta) = 0,$$ ou

$$x\,[\text{fin.}\,\varphi\,dd(\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi) - \text{cof.}\,\varphi\,dd(\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)] + 2\,[\text{fin.}\,\varphi\,d(\text{cof.}\,\psi\,\text{cof.}\,\varphi) - \text{cof.}\,\varphi\,d(\text{cof.}\,\psi\,\text{fin.}\,\varphi)]\,\dot{x} = \frac{Sy\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)}{u^3}\,\dot{t}^2 - \frac{S\,\text{fin.}\,(\varphi-\theta)}{y^2}\,\dot{t}^2,$$

$$x\,dd\sin.\psi + 2d\sin.\psi\,\dot{x} + \sin.\psi\,\ddot{x} = -\frac{M\sin.\psi}{x^2}\,\dot{t}^2 - \frac{Sx\sin.\psi}{u^3}\,\dot{t}^2,$$

$$x\left[\sin.\psi\sin.\theta\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) + \cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)\,dd\sin.\psi\right] + 2\left[\sin.\psi\sin.\theta\,d(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,d(\cos.\psi\sin.\varphi) + \cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)\,d\sin.\psi\right]\dot{x} = 0,$$

ou, en mettant dans la première pour $\dot{x}$ ſa valeur priſe de la troiſième,

$$\frac{\sin.\Psi\left[d(\cos.\psi\cos.\varphi)\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) - d(\cos.\psi\sin.\varphi)\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi)\right] + \cos.\psi\sin.\varphi\left[d\sin.\psi\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi) - d(\cos.\psi\cos.\varphi)\,dd\sin.\psi\right] - \cos.\psi\cos.\varphi\left[d\sin.\psi\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) - d(\cos.\psi\sin.\varphi)\,dd\sin.\psi\right]}{\sin.\psi\sin.\theta\,d(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,d(\cos.\psi\sin.\varphi) + \sin.(\varphi-\theta)\cos.\psi\,d\sin.\psi}\,x = \frac{Sy}{u^3}\,\dot{t}^2 - \frac{S}{y^2}\,\dot{t}^2,$$

$$x\,dd\sin.\psi + 2d\sin.\psi\,\dot{x} + \sin.\psi\,\ddot{x} = -\frac{M\sin.\psi}{x^2}\,\dot{t}^2 - \frac{Sx\sin.\psi}{u^3}\,\dot{t}^2,$$

$$\frac{2\dot{x}}{x} = -\frac{\left[\sin.\psi\sin.\theta\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) + \cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)\,dd\sin.\psi\right]}{\sin.\psi\sin.\theta\,d(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,d(\cos.\psi\sin.\varphi) + \sin.(\varphi-\theta)\cos.\psi\,d\sin.\psi}$$

Soit $\sin.\Psi\left[d(\cos.\psi\cos.\varphi)\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) - d(\cos.\psi\sin.\varphi)\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi)\right] + \cos.\psi\sin.\varphi\left[d\sin.\psi\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi) - d(\cos.\psi\cos.\varphi)\,dd\sin.\psi\right] - \cos.\psi\cos.\varphi\left[d\sin.\psi\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) - d\cos.\psi\sin.\varphi)\,dd\sin.\psi\right] = \dddot{A},$

$\sin.\psi\sin.\theta\,dd(\cos.\psi\cos.\varphi) - \sin.\psi\cos.\theta\,dd(\cos.\psi\sin.\varphi) + \cos.\psi\sin.(\varphi-\theta)\,dd\sin.\psi = \ddot{B},$

$$\text{sin.}\,\psi\,\text{sin.}\,\theta\, d(\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi) - \text{sin.}\,\psi\,\text{cos.}\,\theta\, d(\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi) + \text{sin.}(\varphi - \theta)\,\text{cos.}\,\psi\, d\,\text{sin.}\,\psi = \dot{C},$$

nos trois équations seront $\frac{\dddot{A}x}{\dot{C}} = \frac{Sy\dot{t}^2}{u^3} - \frac{S\dot{t}^2}{y^2}$,

$$x\,dd\,\text{sin.}\,\psi + 2\,d\,\text{sin.}\,\psi\,\dot{x} + \text{sin.}\,\psi\,\ddot{x} = \frac{-M\,\text{sin.}\,\psi\,\dot{t}^2}{x^2} - \frac{Sx\,\text{sin.}\,\psi\,\dot{t}^2}{u^3}, \quad \frac{2\dot{x}}{x} = \frac{-\ddot{B}}{\dot{C}}.$$

Et en mettant dans la seconde pour $\ddot{x}$ & pour $\dot{x}$ leurs valeurs tirées de la troisième, elles seront

$$\frac{x\dddot{A}}{\dot{C}} = \frac{Sy\dot{t}^2}{u^3} - \frac{S\dot{t}^2}{y^2},$$

$$x\Big[4\dot{C}\,\text{sin.}\,\theta.[d(\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi)\,dd\,\text{sin.}\,\psi - d\,\text{sin.}\,\psi\,dd(\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi)] - 4\dot{C}\,\text{cos.}\,\theta.[d(\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi)\,dd\,\text{sin.}\,\psi - d\,\text{sin.}\,\psi\,dd(\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi)] - 2\dot{C}\dddot{B} + \ddot{B}^2 + 2\ddot{C}\ddot{B}\Big] = \frac{-4M\dot{C}^2\dot{t}^2}{x^2} - \frac{4Sx\dot{C}^2\dot{t}^2}{u^3},$$

$$\frac{2\dot{x}}{x} = \frac{-\ddot{B}}{\dot{C}}.$$

Soit $4\dot{C}\,\text{sin.}\,\theta\,[(d\,\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi)\,dd\,\text{sin.}\,\psi - d\,\text{sin.}\,\psi\,dd(\text{cos.}\,\psi\,\text{cos.}\,\varphi)] - 4\dot{C}\,\text{cos.}\,\theta\,[d(\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi)\,dd\,\text{sin.}\,\psi - d\,\text{sin.}\,\psi\,dd(\text{cos.}\,\psi\,\text{sin.}\,\varphi)] - 2\dot{C}\dddot{B} + \ddot{B}^2 + 2\ddot{C}\ddot{B} = \ddddot{D}$,

nos équations seront $\frac{x\dddot{A}}{\dot{C}} = \frac{Sy\dot{t}^2}{u^3} - \frac{S\dot{t}^2}{y^2}$,

$$x\ddddot{D} = \frac{-4M\dot{C}^2\dot{t}^2}{x^2} - \frac{4Sx\dot{C}^2\dot{t}^2}{u^3},$$

$$\frac{2\dot{x}}{x} = \frac{-\ddot{B}}{\dot{C}}.$$

Au

Au moyen des deux premières,

on aura $u^3 = \frac{S y^3 \dot{C} \dot{t}^2}{x y^2 \ddot{A} + S \dot{C} \dot{t}^2}$, $u^3 = \frac{-4 S x^3 \dot{C}^2 \dot{t}^2}{x^3 \ddddot{D} + 4 M \dot{C}^2 \dot{t}^2}$,

& en égalant ces deux valeurs de u^3, on aura

$$x^3 y^3 \ddddot{D} + 4 M y^3 \dot{C}^2 \dot{t}^2 + 4 x^4 y^2 \dot{C} \ddot{A} + 4 S x^3 \dot{C}^2 \dot{t}^2 = 0.$$

Nos trois équalions seront donc

$$[y^2 - 2 x y \operatorname{cos\!f.} \psi \operatorname{cos\!f.} (\varphi - \theta) + x^2]^{\frac{3}{2}} = \frac{S y^3 \dot{C} \dot{t}^2}{x y^2 \ddot{A} + S \dot{C} \dot{t}^2},$$

$$x^3 y^3 \ddddot{D} + 4 M y^3 \dot{C}^2 \dot{t}^2 + 4 x^4 y^2 \dot{C} \ddot{A} + 4 S x^3 \dot{C}^2 \dot{t}^2 = 0,$$

$$\frac{2 \dot{x}}{x} = \frac{-\ddot{B}}{\dot{C}}.$$

Au moyen de la première qui sera du septième degré, & de la seconde qui est du quatrième, on aura deux valeurs de x sans aucune extraction de racines; en égalant ces deux valeurs de x, & en substituant pour x la première de ses deux valeurs dans l'équation $\frac{2 \dot{x}}{x} = \frac{-\ddot{B}}{\dot{C}}$, on aura deux équations entre les indéterminées y, θ, t, φ, ψ. Mais le mouvement de S autour de T étant donné, on aura y & θ en t; par conséquent l'on aura deux équations entre φ, ψ & t; l'on chassera ψ, & l'on aura une équation entre φ & t; l'on chassera φ, & l'on aura une équation entre ψ & t. Au moyen de l'équation entre φ & t & du Lemme II, on aura φ en t; au moyen de l'équation entre ψ & t & du même Lemme, on aura ψ en t, & l'on déterminera les constantes par le moyen de quelques observations choisies.

Mais en attendant que l'on fasse ce calcul, en voici un très-curieux à faire pour s'assurer si réellement tout se passe

dans le Ciel comme ſi la Terre & la Lune s'attiroient mutuellement, & qu'elles fuſſent attirées par le Soleil en raiſon des maſſes & en raiſon inverſe du quarré des diſtances. Je ſuppoſe que le Soleil S ſe meut autour de la Terre T dans une ellipſe dont T eſt un des deux foyers; ſoit a le ſommet de cette ellipſe le plus près de T, & A ſon ſommet le plus éloigné de T, je fais $Ta = a$, $TA = a + b$, l'angle $aT\gamma = \alpha$; j'aurai $y = \frac{2a(a + b)}{2a + b + b \operatorname{cof.}(\alpha + \theta)}$, & je ſubſtituerai cette valeur de y dans les deux expreſſions de x, leſquelles ne ſeront plus compoſées que des indéterminées t, ſin. θ, cof. θ, ſin. ϕ, cof. ϕ, ſin. ψ, cof. ψ, & de leurs différences. Maintenant au moyen des obſervations & du Lemme I, j'aurai les expreſſions de ſin. θ, cof. θ, ſin. ϕ, cof. ϕ, ſin. ψ, cof. ψ en t; je ſubſtituerai ces expreſſions dans celles de x, & je verrai ſi elles auront une même valeur, & ſi cette valeur ſera conforme à ce que l'on ſait.



ANALYSE du Problème où il s'agit, par le moyen de trois obſervations, de déterminer dans le ſyſtème de M. Newton, la trajectoire d'une Comète, en ſuppoſant qu'elle ſe meut dans une ellipſe infiniment alongée, ou dans une parabole.

LA Terre T ſe meut autour du Soleil S en vertu d'une force motrice vers $S = \frac{S.T}{(ST)^2}$, & décrit par conſéquent autour de S une ellipſe dont S eſt un des deux foyers.

Soit a le ſommet de cette ellipſe le plus proche de S, & A ſon ſommet le plus éloigné de S, je conçois que la Terre va de a vers A.

Soit $Sa = a$, $SA = a + b$,

on aura $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+b \operatorname{coſ.} aST}$; l'élément du temps

$$= \frac{(ST)^2 daST}{\sqrt{\left[\frac{2Sa.(a+b)}{2a+b}\right]}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2a+b}{2S}\right)}.STdST}{\sqrt{[-a.(a+b)+(2a+b).ST-(ST)^2]}}.$$

Une planète P ſe meut pareillement autour de S en vertu d'une force motrice vers $S = \frac{S.P}{(SP)^2}$, & trace par conſéquent autour de S une ellipſe dont S eſt un des deux foyers.

Soit a' le ſommet de cette ellipſe le plus près de S, & A' ſon ſommet le plus éloigné de S, je conçois que cette planète va de a' vers A' & du même ſens que T.

Soit $Sa' = \alpha$, $SA' = \alpha + \beta$,

on aura $SP = \frac{2\alpha.(\alpha+\beta)}{2\alpha+\beta+\beta \operatorname{coſ} a'SP}$; l'élément du temps

$$= \frac{(SP)^2 . ddSP}{\sqrt{\left[\frac{2Sa-(a+c)}{2a+c}\right]}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{2a+c}{2S}\right)} . SPdSP}{\sqrt{[-a.(a+c)+(2a+c).SP-(SP)^2]}}.$$

Du point S je mène vers un point quelconque γ de l'Écliptique infiniment éloigné de S, la ligne $S\gamma$;

j'aurai l'angle $aST = aS\gamma + \gamma ST$,

& ST sera $= \frac{2a.(a+b)}{2a+b+b(\text{cof.} aS\gamma \,\text{cof.} \gamma ST - \text{fin.} aS\gamma \,\text{fin.} \gamma ST)}$;

Soit SN la commune section du plan de l'orbe de la Terre & du plan de l'orbe de la planète,

j'aurai l'angle $a'SP = a'SN + NSP$,

& SP sera $= \frac{2a.(a+c)}{2a+c+c(\text{cof.} a'SN \,\text{cof.} NSP - \text{fin.} a'SN \,\text{fin.} NSP)}$;

Du point P (*fig. 39*) j'abaisse sur le plan γSN la perpendiculaire PM. Sur SP je prends $Sp = 1$, & sur SM je prends $Sm = 1$. Du point p je mène à SM la perpendiculaire pq, & à SN la perpendiculaire pr; prq est l'angle du plan NSP sur le plan γSN.

J'aurai $1 : \text{fin.} prq :: \text{fin.} NSP : \text{fin.} MSP$; donc

$$\text{fin.} NSP = \frac{\text{fin.} MSP}{\text{fin.} prq}.$$

$$1 : \text{cof.} prq :: \frac{\text{fin.} MSP}{\text{fin.} prq} : qr = \frac{\text{fin.} MSP \,\text{cof.} prq}{\text{fin.} prq}.$$

J'aurai $1 : \text{fin.} (\gamma SM - \gamma SN) :: \text{cof.} MSP : \frac{\text{fin.} MSP \,\text{cof.} prq}{\text{fin.} prq}$;

donc $\frac{\text{cof.} prq \,\text{fin.} MSP}{\text{fin.} prq} = \text{cof.} MSP (\text{cof.} \gamma SN \,\text{fin.} \gamma SM - \text{fin.} \gamma SN \,\text{cof.} \gamma SM)$,

$1 : \text{cof.} (\gamma SM - \gamma SN) :: \text{cof.} MSP : \text{cof.} NSP$; donc $\text{cof.} NSP$ $= \text{cof.} MSP (\text{fin.} \gamma SN \,\text{fin.} \gamma SM + \text{cof.} \gamma SN \,\text{cof.} \gamma SM)$.

Nos équations ſeront $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+b(\text{coſ.}\,aS\gamma\,\text{coſ.}\,\gamma ST - \text{ſin.}\,aS\gamma\,\text{ſin.}\,\gamma ST)}$,

$$SP = \frac{2\alpha.(\alpha+\beta).\,\text{ſin.}\,prq}{(2\alpha+\beta).\,\text{ſin.}\,prq + \beta\,[\text{coſ.}\,\alpha' SN\,\text{ſin.}\,prq\,\text{coſ.}\,MSP.(\text{ſin.}\,\gamma SN\,\text{ſin.}\,\gamma SM + \text{coſ.}\,\gamma SN\,\text{coſ.}\,\gamma SM) - \text{ſin.}\,\alpha' SN\,\text{ſin.}\,MSP]},$$

$$\frac{\text{coſ.}\,prq\,\text{ſin.}\,MSP}{\text{ſin.}\,prq} = \text{coſ.}\,MSP(\text{coſ.}\,\gamma SN\,\text{ſin.}\,\gamma SM - \text{ſin.}\,\gamma SN\,\text{coſ.}\,\gamma SM),$$

& $\frac{\sqrt{(2a+b)}.\,STdST}{\sqrt{[-a.(a+b)+(2a+b).ST-(ST)^2]}} = \frac{\sqrt{(2\alpha+\beta)}.\,SPdSP}{\sqrt{[-\alpha.(\alpha+\beta)+(2\alpha+\beta)SP-(SP)^2]}}$.

Du point T (*fig. 40*) je mène vers P la ligne TP, & vers γ la ligne $T\gamma$.

J'aurai $1 : \text{ſin.}\,MSP :: SP : PM = SP\,\text{ſin.}\,MSP$,
& $1 : \text{coſ.}\,MSP :: SP : SM = SP\,\text{coſ.}\,MSP$.

J'aurai $1 : \text{ſin.}\,\gamma SM :: SP\,\text{coſ.}\,MSP : Ml = SP\,\text{coſ.}\,MSP\,\text{ſin.}\,\gamma SM$
& $1 : \text{coſ.}\,\gamma SM :: SP\,\text{coſ.}\,MSP : Sl = SP\,\text{coſ.}\,MSP\,\text{coſ.}\,\gamma SM$.

J'aurai $1 : \text{ſin.}\,\gamma ST :: ST : Th = ST\,\text{ſin.}\,\gamma ST$, &
$1 : \text{coſ.}\,\gamma ST :: ST : Sh = ST\,\text{coſ.}\,\gamma ST$.

Donc $Mk = SP\,\text{coſ.}\,MSP\,\text{ſin.}\,\gamma SM - ST\,\text{ſin.}\,\gamma ST$
& $Tk = SP\,\text{coſ.}\,MSP\,\text{coſ.}\,\gamma SM - ST\,\text{coſ.}\,\gamma ST$.

J'aurai $\text{ſin.}\,MTP : 1 :: SP\,\text{ſin.}\,MSP : TP = \frac{SP\,\text{ſin.}\,MSP}{\text{ſin.}\,MTP}$, &
$\text{ſin.}\,MTP : \text{coſ.}\,MTP :: SP\,\text{ſin.}\,MSP : TM = \frac{SP\,\text{ſin.}\,MSP\,\text{coſ.}\,MTP}{\text{ſin.}\,MTP}$.

Enfin j'aurai $1 : \text{ſin.}\,\gamma TM :: \frac{SP\,\text{ſin.}\,MSP\,\text{coſ.}\,MTP}{\text{ſin.}\,MTP} : SP\,\text{coſ.}\,MSP\,\text{ſin.}\,\gamma SM - ST\,\text{ſin.}\,\gamma ST$,

& $1 : \text{coſ.}\,\gamma TM :: \frac{SP\,\text{ſin.}\,MSP\,\text{coſ.}\,MTP}{\text{ſin.}\,MTP} : SP\,\text{coſ.}\,MSP\,\text{coſ.}\,\gamma SM - ST\,\text{coſ.}\,\gamma ST$.

Maintenant je fais coſ. $\gamma ST = X$, ſin. $\gamma ST = Y$, coſ. $\gamma SM = p$, ſin. $\gamma SM = q$, coſ. $MSP = r$, ſin. $MSP = s$, coſ. $\gamma TM = x$, ſin. $\gamma TM = y$, coſ. $MTP = z$, ſin. $MTP = u$.

coſ. $aS\gamma = c$, ſin. $aS\gamma = \partial$, coſ. $a'SN = \gamma$, ſin. $a'SN = \delta$, coſ. $\gamma SN = \varepsilon$, ſin. $\gamma SN = \zeta$, coſ. $prq = \eta$, ſin. $prq = \theta$.

J'aurai $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+b(cX-\partial Y)}$,

$$SP = \frac{2\alpha.(\alpha+\beta)\theta}{(2\alpha+\beta).\theta+\beta[\gamma\theta r.(\zeta q+\varepsilon p)-\delta s]},$$

$$\eta s = \theta r.(\varepsilon q - \zeta p),$$

$$\frac{SP}{ST} = \frac{Yu}{qru - szy}, \quad \frac{SP}{ST} = \frac{Xu}{pru - szx}.$$

En égalant enſemble les deux valeurs de $\frac{SP}{ST}$, on aura $\frac{Y}{qru - szy} = \frac{X}{pru - szx}$; donc $\frac{s}{r} = \frac{Xqu - Ypu}{Xyz - Yxz}$.

En égalant enſemble les deux valeurs de $\frac{s}{r}$, on aura

$$[\eta Xu - \varepsilon\theta z.(Xy - Yx)]q = [\eta Yu - \zeta\theta z.(Xy - Yx)]p;$$

$$\text{donc } p = \frac{\eta Xu - \varepsilon\theta z.(Xy - Yx)}{\sqrt{[[\eta Xu - \varepsilon\theta z.(Xy - Yx)]^2 + [\eta Yu - \zeta\theta z.(Xy - Yx)]^2]}},$$

$$q = \frac{\eta Yu - \zeta\theta z.(Xy - Yx)}{\sqrt{[[\eta Xu - \varepsilon\theta z.(Xy - Yx)]^2 + [\eta Yu - \zeta\theta z.(Xy - Yx)]^2]}};$$

En ſubſtituant pour p & q ces valeurs, on aura

$$r = \frac{\sqrt{[[\eta Xu - \varepsilon\theta z.(Xy - Yx)]^2 + [\eta Yu - \zeta\theta z.(Xy - Yx)]^2]}}{\sqrt{[\theta^2 u^2 (\varepsilon Y - \zeta X)^2 + [\eta Xu - \varepsilon\theta z.(Xy - Yx)]^2 + [\eta Yu - \zeta\theta z.(Xy - Yx)]^2]}},$$

$$s = \frac{\theta u.(\varepsilon Y - \zeta X)}{\sqrt{[\theta^2 u^2 (\varepsilon Y - \zeta X)^2 + [\eta Xu - \varepsilon\theta z.(Xy - Yx)]^2 + [\eta Yu - \zeta\theta z(Xy - Yx)]^2]}},$$

En ſubſtituant pour $p, q, r, ſ$, ces valeurs, nos équations ſeront $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+b(\varepsilon X - \delta Y)}$,

$$SP = \frac{ST\sqrt{[\theta^2u^2(\varepsilon Y - \zeta X)^2 + [nXu - \varepsilon\theta z.(Xy - Yx)]^2 + [nYu - \zeta\theta z.(Xy - Yx)]^2]}}{nu - \theta z.(\varepsilon y - \zeta x)},$$

$$SP = \frac{2\alpha.(\alpha+\beta).\sqrt{[\theta^2u^2(\varepsilon Y - \zeta X)^2 + [nXu - \varepsilon\theta z.(Xy - Yx)]^2 + [nYu - \zeta\theta z.(Xy - Yx)]^2]}}{(2\alpha+\beta).\sqrt{[\theta^2u^2(\varepsilon Y - \zeta X)^2 + [nXu - \varepsilon\theta z.(Xy - Yx)]^2 + [nYu - \zeta\theta z.(Xy - Yx)]^2]} + \beta\gamma[nu.(\varepsilon X + \zeta Y) - \theta z.(Xy - Yx)] - \beta\delta u.(\varepsilon Y - \zeta X)},$$

& $$\frac{\sqrt{(2a+b)}.STdST}{\sqrt{[-a.(a+b) + (2a+b).ST - (ST)^2]}} = \frac{\sqrt{(2\alpha+\beta)}.SPdSP}{\sqrt{[-\alpha.(\alpha+\beta) + (2\alpha+\beta).SP - (SP)^2]}}.$$

En intégrant cette dernière équation, on auroit quatre équations, qui, en chaſſant ST, SP, ſe réduiroient à deux; au moyen deſquelles, avec trois obſervations, on auroit ſix équations outre ces trois-ci, $\gamma^2 + \delta^2 = 1$, $\varepsilon^2 + \zeta^2 = 1$, $n^2 + \theta^2 = 1$, pour déterminer les huit inconnues α, β, γ, δ, ε, ζ, n, θ, & la conſtante qu'on auroit ajoûtée en intégrant; mais cette voie eſt impraticable, premièrement, parce que l'équation n'eſt pas intégrable; ſecondement, parce que, quand même elle le ſeroit, le calcul ſeroit immenſe.

Je ſuppoſe qu'il s'agit d'une Comète, qui, ſe mouvant dans une ellipſe exceſſivement alongée, c'eſt-à-dire, où β eſt extrêmement grand par rapport à α, peut être regardée comme ſe mouvant dans une parabole; l'équation qu'il s'agit d'intégrer ſera

$$\frac{\sqrt{(2a+b)}STdST}{\sqrt{[-a.(a+b) + (2a+b).ST - (ST)^2]}} = \frac{SPdSP}{\sqrt{(SP - \alpha)}}.$$

Soit le ſecteur elliptique tracé par le rayon vecteur de la Terre, & compris dans l'angle $\gamma ST = Q$, on aura $2\sqrt{(\frac{2a+b}{a.(a+b)})}.dQ = \frac{SPdSP}{\sqrt{(SP-\alpha)}}$, & en intégrant, on aura

$$(SP + 2\alpha).\sqrt{(SP - \alpha)} = 3\sqrt{(\frac{2a+b}{a.(a+b)})}.Q + \mu.$$

Par conſéquent, dans cette hypothèſe-ci, nos équations ſeront $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+bcX-b\varpi Y}$,

$$\frac{\ldots \epsilon Y - \zeta X)^2 + [\eta X u - \epsilon\theta\zeta.(Xy - Yx)]^2 + [\eta Y u - \zeta\theta\zeta.(Xy - Yx)]^2]}{\eta u - \theta\zeta.(\epsilon y - \zeta x)};$$

$$\frac{\ldots \epsilon Y - \zeta x)^2 + [\eta X u - \epsilon\theta\zeta.(Xy - Yx)]^2 + [\eta Y u - \zeta\theta\zeta.(Xy - Yx)]^2]}{\ldots - \zeta x)^2 + [\eta X u - \epsilon\theta\zeta.(Xy - Yx)]^2 + [\eta Y u - \zeta\theta\zeta.(Xy - Yx)]^2] +}$$

$$\frac{\ldots}{\ldots Y) - \theta\zeta.(Xy - Yx)] - \delta u.(\epsilon Y - \zeta X)},$$

$$(SP + 2\alpha).\sqrt{(SP - \alpha)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.Q + \mu.$$

Ainſi le Problème eſt plus que déterminé par trois obſervations, car pour les huit inconnues $\alpha, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \mu$, on auroit neuf équations; mais le calcul eſt, comme nous l'avons dit, impraticable.

Au moyen de la ſeconde des quatre équations précédentes, on aura

$$\sqrt{[\theta^2 u^2 (\epsilon Y - \zeta X)^2 + [\eta X u - \epsilon\theta\zeta.(Xy - Yx)]^2 + [\eta Y u - \zeta\theta\zeta.(Xy - Yx)]^2]} = \frac{SP}{ST}.(\eta u - \theta\zeta.(\epsilon y - \zeta x)],$$ & en

ſubſtituant dans la troiſième, on aura

$$SP.[\eta u - \theta\zeta.(\epsilon y - \zeta x)] = 2[\eta u - \theta\zeta.(\epsilon y - \zeta x)]\alpha - ST.[\eta u.(\epsilon X + \zeta Y) - \theta\zeta.(Xy - Yx)]\gamma + ST.u.(\epsilon Y - \zeta X)\delta.$$

Je remarque qu'au moyen de cette équation, ſi les nombres $\epsilon, \zeta, \eta, \theta$ étoient donnés avec trois obſervations, on auroit α, γ, δ; car on auroit SP par la ſeconde équation.

Nous avons trouvé ci-deſſus

$$TP = \frac{SP\,\text{ſin.}\,MSP}{\text{ſin.}\,MTP} = SP.\frac{f}{n} = \frac{\theta.(\epsilon Y - \zeta X).ST}{\eta u - \theta\zeta.(\epsilon y - \zeta x)}.$$

Je

Je fais $\zeta = \varepsilon\varkappa$, $\theta = \eta\lambda$; donc $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{(1+\varkappa^2)}}$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$, & je substitue pour ζ, θ ces valeurs; nous aurons $ST = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+bcX-b\partial Y}$,

$$TP[u - \varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)] = \varepsilon\lambda.(Y-\varkappa X).ST,$$

$$SP = \frac{ST\sqrt{[\varepsilon^2\lambda^2u^2(Y-\varkappa X)^2 + [Xu - \varepsilon\lambda z.(Xy-Yx)]^2 + [Yu - \varepsilon\lambda.\varkappa z.(Xy-Yx)]^2]}}{u - \varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)},$$

$$\eta SP[u - \varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)] = 2\eta[u - \varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)]\alpha - \eta ST[\varepsilon u.(X+\varkappa Y) - \lambda z.(Xy-Yx)]\gamma + \varepsilon u.ST(Y-\varkappa X)\delta,$$

$$(SP+2\alpha).\sqrt{(SP-\alpha)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}Q + \mu.$$

Je suppose qu'à la première observation les valeurs de $X, Y, ST, TP, SP, Q, x, y, z, u$, sont $A, B, C, D, E, F, e, f, g, h$; qu'à la seconde elles sont $A_{\text{I}}, B_{\text{I}}, C_{\text{I}}, D_{\text{I}}, E_{\text{I}}, F_{\text{I}}, e_{\text{I}}, f_{\text{I}}, g_{\text{I}}, h_{\text{I}}$, & qu'à la troisième elles sont $A_{\text{II}}, B_{\text{II}}, C_{\text{II}}, D_{\text{II}}, E_{\text{II}}, F_{\text{II}}, e_{\text{II}}, f_{\text{II}}, g_{\text{II}}, h_{\text{II}}$.

En substituant les valeurs de la première observation dans l'équation $TP[u - \varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)] = \varepsilon\lambda.(Y-\varkappa X)ST$, on aura $D[h - \varepsilon\lambda g.(f-\varkappa e)] = \varepsilon\lambda.(B-\varkappa A)C$, & en y substituant celles de la seconde, on aura $D_{\text{I}}[h_{\text{I}} - \varepsilon\lambda g_{\text{I}}.(f_{\text{I}} - \varkappa e_{\text{I}})] = \varepsilon\lambda.(B_{\text{I}} - \varkappa A_{\text{I}})C_{\text{I}}$; & au moyen de ces deux équations, D & D_{I} étant pris à volonté, l'on déterminera $\varepsilon\lambda$ & $\varkappa$, & par conséquent on aura ε, ζ, η, θ, $\varkappa$, λ.

$\varepsilon\lambda$ & $\varkappa$ étant donnés, on aura SP généralement par le moyen de l'équation suivante.

$$SP = \frac{ST\sqrt{[\varepsilon^2\lambda^2u^2(Y-\varkappa X)^2 + [Xu - \varepsilon\lambda z.(Xy-Yx)]^2 + [Yu - \varepsilon\lambda.\varkappa z.(Xy-Yx)]^2]}}{u - \varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)},$$

& par conſéquent on aura $E, E_{\prime}, E_{\prime\prime}$.

En ſubſtituant les valeurs de la première obſervation dans l'équation

$$n.SP.[u-\varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)] = 2n[u-\varepsilon\lambda z.(y-\varkappa x)]\alpha - n.ST[\varepsilon u.(X+\varkappa Y) - \lambda z.(Xy-Yx)]\gamma + \varepsilon u.ST(Y-\varkappa X)\delta,$$ on aura

$$nE[h-\varepsilon\lambda g.(f-\varkappa e)] = 2n[h-\varepsilon\lambda g.(f-\varkappa e)]\alpha - nC[\varepsilon h.(A+\varkappa B) - \lambda g.(Af-Be)]\gamma + \varepsilon hC(B-\varkappa A)\delta;$$

& en y ſubſtituant celles de la ſeconde, on aura

$$nE_{\prime}[h_{\prime}-\varepsilon\lambda g_{\prime}.(f_{\prime}-\varkappa e_{\prime})] = 2n[h_{\prime}-\varepsilon\lambda g_{\prime}.(f_{\prime}-\varkappa e_{\prime})]\alpha - nC_{\prime}[\varepsilon h_{\prime}.(A_{\prime}+\varkappa B_{\prime}) - \lambda g_{\prime}.(A_{\prime}f_{\prime}-B_{\prime}e_{\prime})]\gamma + \varepsilon h_{\prime}C_{\prime}(B_{\prime}-\varkappa A_{\prime})\delta,$$

& en y ſubſtituant celles de la troiſième, on aura

$$nE_{\prime\prime}[h_{\prime\prime}-\varepsilon\lambda g_{\prime\prime}.(f_{\prime\prime}-\varkappa e_{\prime\prime})] = 2n[h_{\prime\prime}-\varepsilon\lambda g_{\prime\prime}.(f_{\prime\prime}-\varkappa e_{\prime\prime})]\alpha - nC_{\prime\prime}[\varepsilon h_{\prime\prime}.(A_{\prime\prime}+\varkappa B_{\prime\prime}) - \lambda g_{\prime\prime}.(A_{\prime\prime}f_{\prime\prime}-B_{\prime\prime}e_{\prime\prime})]\gamma + \varepsilon h_{\prime\prime}C_{\prime\prime}(B_{\prime\prime}-\varkappa A_{\prime\prime})\delta;$$

& au moyen de ces trois équations, l'on déterminera α, γ, δ.

Le problème ſeroit donc réſolu, ſi D & $D_{\prime}$ avoient été pris exactement; mais comme on ne connoît pas ces deux lignes, je ſuppoſe que la valeur que l'on a donnée à D eſt exacte, & je dis qu'il faut que $D_{\prime}$ ſoit tel que $\gamma^2 + \delta^2 - 1 = 0$.

L'on recommencera l'opération, en augmentant ou en

diminuant D à chaque fois, jusqu'à ce que cette condition soit remplie.

Enfin, au moyen de cette équation-ci,

$$(SP + 2\alpha).\sqrt{(SP - \alpha)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.Q + \mu,$$

on aura les trois équations qui suivent.

$$(E + 2\alpha).\sqrt{(E - \alpha)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.F + \mu,$$

$$(E_{\prime} + 2\alpha).\sqrt{(E_{\prime} - \alpha)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.F_{\prime} + \mu,$$

$$(E_{\prime\prime} + 2\alpha).\sqrt{(E_{\prime\prime} - \alpha)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.F_{\prime\prime} + \mu.$$

Soit $A = 1$, $B = 0$; donc $C = \frac{2a.(a+b)}{2a+b+bc}$, $F = 0$, on aura $\mu = (E + 2\alpha).\sqrt{(E - \alpha)}$, & en mettant cette valeur de μ dans les deux équations restantes, on aura

$$(E_{\prime} + 2\alpha).\sqrt{(E_{\prime} - \alpha)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.F_{\prime} + (E + 2\alpha).\sqrt{(E - \alpha)},$$

$$(E_{\prime\prime} + 2\alpha).\sqrt{(E_{\prime\prime} - \alpha)} = 3\sqrt{\left(\frac{2a+b}{a.(a+b)}\right)}.F_{\prime\prime} + (E + 2\alpha).\sqrt{(E - \alpha)}.$$

Soit le temps entre la première & la seconde observation $= L$, celui entre la première & la troisième $= L_{\prime}$, on aura $F_{\prime} : F_{\prime\prime} :: L : L_{\prime}$; donc $F_{\prime\prime} = \frac{F_{\prime}L_{\prime}}{L}$, & D devra avoir été pris tel que

$$\frac{(E_{\prime\prime} + 2\alpha).\sqrt{(E_{\prime\prime} - \alpha)} - (E + 2\alpha).\sqrt{(E - \alpha)}}{(E_{\prime} + 2\alpha).\sqrt{(E_{\prime} - \alpha)} - (E + 2\alpha).\sqrt{(E - \alpha)}} = \frac{L_{\prime}}{L}.$$

L'on recommencera donc l'opération, en augmentant ou en diminuant D à chaque fois, jusqu'à ce que cette condition soit remplie.

Par la première condition pour chaque D l'on trouve le $D_{\prime}$ qui lui appartient, & par la seconde l'on trouve le vrai D.

REMARQUE.

A la première opération, en ſubſtituant pour γ & pour δ leurs valeurs dans cette équation-ci $\gamma^2 + \delta^2 - 1 = 0$, ou dans celle-ci, $1 - \gamma^2 - \delta^2 = 0$, vous trouverez un reſte > o.

Je ſuppoſe qu'à la ſeconde opération où vous aurez augmenté $D_{\prime}$, vous trouviez encore un reſte > o, mais moindre que le premier reſte, vous ſerez ſûr que le premier $D_{\prime}$ étoit trop petit, que le ſecond $D_{\prime}$ eſt auſſi trop petit, mais qu'il approche plus du vrai que le premier.

Si à la troiſième opération où vous aurez encore augmenté $D_{\prime}$, vous trouvez un reſte < o, vous ſerez ſûr que ce nouveau $D_{\prime}$ là eſt trop grand, qu'ainſi, le vrai $D_{\prime}$ eſt entre celui-là & le précédent.

Si à la ſeconde opération où vous aurez augmenté $D_{\prime}$, vous trouvez un reſte non ſeulement > o, mais plus grand que le premier reſte, vous ſerez ſûr que le premier $D_{\prime}$ étoit trop grand, qu'ainſi, au lieu de l'augmenter, il falloit le diminuer.

La même choſe aura lieu à l'égard de D, lorſque l'on ſatisfera à cette équation-ci,

$$(E_{\prime\prime} + 2a).\sqrt{(E_{\prime\prime} - a)} - (E + 2a).\sqrt{(E - a)} - \frac{L_{\prime}}{L}[(E_{\prime} + 2a).\sqrt{(E_{\prime} - a)} - (E + 2a).\sqrt{(E - a)}] = 0,$$

ou à celle-ci,

$$-(E_{\prime\prime} + 2a).\sqrt{(E_{\prime\prime} - a)} + (E + 2a).\sqrt{(E - a)} + \frac{L_{\prime}}{L}[(E_{\prime} + 2a).\sqrt{(E_{\prime} - a)} - (E + 2a).\sqrt{(E - a)}] = 0.$$



SOLUTION D'UN PROBLÈME
SUR LES JEUX DE HASARD.

PIERRE me propoſe de jouer avec lui à *croix* ou *pile*, & il offre de me donner un écu, ſi j'amène croix au premier coup; deux, ſi je ne l'amène qu'au ſecond; quatre, ſi je ne l'amène qu'au troiſième; huit, ſi je ne l'amène qu'au quatrième; ſeize, ſi je ne l'amène qu'au cinquième, & ainſi de ſuite en doublant; trouver la ſomme que je dois lui donner au commencement de chaque partie pour que le jeu ſoit égal.

En ſuivant les règles ordinaires des jeux de haſard, l'on trouvoit que je devois donner à Pierre une ſomme infinie, & il falloit réſoudre cette difficulté.

Je ſuppoſe que nous jouons, Pierre & moi, argent ſur jeu, enſorte que, quelque choſe qui arrive, je ne puiſſe jamais gagner au delà de ce qui eſt au jeu; il eſt évident que cette condition ne change rien à l'énoncé du Problème, car l'on peut ſuppoſer que Pierre met tout ſon bien au jeu.

Soit la ſomme d'écus que Pierre met au jeu $= x$, celle que je dois y mettre, pour que le jeu ſoit parfaitement égal, $= y$, l'argent du jeu ſera $= x + y$, & on aura $y = \frac{(n + 1) 2^n + x}{2^{n+1} - 1}$.

Quant au nombre entier poſitif n, on le déterminera par la condition que x doit être $> \frac{2^{n+1} - n - 2}{2}$ & $< \frac{2^{n+2} - n - 3}{2}$.

Je ſuppoſe, par exemple, que Pierre met un million au jeu, c'eſt-à-dire, que $x = 333333 + \frac{1}{3}$, on aura $333333 + \frac{1}{3} > \frac{2^{n+1} - n - 2}{2}$ & $< \frac{2^{n+2} - n - 3}{2}$; donc $n = 18$; donc $y = \frac{19 \cdot 2^{18} + \frac{1000000}{3}}{2^{19} - 1} = 30^{l}\ 8^{f}\ 2^{d}$ à peu près.

Si c'eſt ma miſe qui eſt donnée, & que l'on veuille avoir celle de Pierre, on aura $x = 2^{n+1}y - (n + 1)\, 2^{n} - y$, & n ſera $> 2y - 3$ & $< 2y - 2$.

Si y eſt un nombre entier, vous ferez $n = 2y - 3$, ou $n = 2y - 2$, & vous aurez $x = 2^{2y-2} - y$.

Pour jouer à ce jeu-là, il n'y auroit qu'à avoir un dé à ſix faces, dont trois ſeroient noires, & les trois autres blanches; on auroit de plus une large & peſante pièce à deux faces, l'une noire & l'autre blanche; l'on retourneroit la pièce à chaque fois avant de jeter le dé, & l'on conviendroit qu'auſſi-tôt que la couleur du dé & celle de la pièce ſeront les mêmes, la partie ſera finie. Je ſuppoſe qu'en commençant la partie, la face ſupérieure de la pièce ſoit noir.

Je jette le dé; ſi j'amène noir, Pierre me donnera un écu. Si j'amène blanc, l'on fera une marque pour ſe ſouvenir que j'ai joué un coup; l'on retournera la pièce, & ſa couleur ſera blanc.

Je jette le dé; ſi j'amène blanc, Pierre me donnera deux écus. Si j'amène noir, l'on marquera que j'ai joué deux coups; l'on retournera la pièce, & ſa couleur ſera noir.

Je jette le dé; ſi j'amène noir, Pierre me donnera quatre écus. Si j'amène blanc, l'on marquera que j'ai joué trois coups; l'on retournera la pièce, & ſa couleur ſera blanc.

Je jette le dé; ſi j'amène blanc, Pierre me donnera huit écus. Si j'amène noir, l'on marquera que j'ai joué quatre coups; l'on retournera la pièce, & ſa couleur ſera noir.

Je jette le dé; ſi j'amène noir, Pierre me donnera ſeize écus. Si j'amène blanc, l'on marquera que j'ai joué cinq coups; l'on retournera la pièce, & ſa couleur ſera blanc, &c.

Pour n'avoir pas à calculer au commencement de chaque partie, il faudra que Pierre tienne toûjours la même ſomme au jeu.

Soit, par exemple, $y = 10$ écus, on aura
$x = 2^{2 \cdot 10 - 2} - 10 = 2^{18} - 10 = 262134$ écus; ainſi, ſi Pierre tient au jeu 262134 écus, au commencement de chaque partie, j'y mettrai 10 écus.

Soit $y = 11$ écus, on aura
$x = 2^{2 \cdot 11 - 2} - 11 = 2^{20} - 11 = 1048565$ écus. Si Pierre tient au jeu 1048565 écus, j'y mettrai 11 écus au commencement de chaque partie.



L'ART DE RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS.

Dès les premiers temps l'on résolut généralement la formule du second degré, & l'on trouva que $x^2 + Mx + N =$

$$[x + \tfrac{1}{2} M + \tfrac{1}{2} \sqrt{(M^2 - 4N)}]$$
$$[x + \tfrac{1}{2} M - \tfrac{1}{2} \sqrt{(M^2 - 4N)}].$$

Ensuite vint la Méthode de Cardan pour le troisième degré, dont en suivant les procédés pas à pas, je trouve que $x^3 + Mx^2 + Nx + \frac{z^2 + (9MN - 2M^3)z + (M^2 - 3N)^3}{27z}$ est divisible exactement par $x + \frac{z^{\frac{2}{3}} + Mz^{\frac{1}{3}} + (M^2 - 3N)}{3z^{\frac{1}{3}}}$.

Je fais $\frac{z^2 + (9MN - 2M^3)z + (M^2 - 3N)^3}{27z} = P$, ou

$$z^2 - (2M^3 - 9MN + 27P)z + (M^2 - 3N)^3 = 0;$$

j'ai $z = \frac{1}{2}(2M^3 - 9MN + 27P) - \frac{1}{2}\sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}$; d'où je conclus que la formule $x^3 + Mx^2 + Nx + P$ est divisible exactement par

$$x + \frac{[2M^3 - 9MN + 27P - \sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}]^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} M [2M^3 - 9MN + 27P - \sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}]^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}(M^2 - 3N)}{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3 [2M^3 - 9MN + 27P - \sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}]^{\frac{1}{3}}},$$

ou

ou par $x + \frac{1}{3}M + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}.3}[2M^3 - 9MN + 27P +$

$\sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}]^{\frac{1}{3}}$

$+ \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}.3}[2M^3 - 9MN + 27P -$

$\sqrt{[(2M^3 - 9MN + 27P)^2 - 4(M^2 - 3N)^3]}]^{\frac{1}{3}}$.

Cette méthode a été ſuivie de celle de Deſcartes pour la réſolution de la formule du quatrième degré, dont en ſuivant auſſi les procédés pas à pas, je trouve que $x^4 + Mx^3 + Nx^2 + Px +$

$$\frac{z^3 + (8N - 3M^2)z^2 + (3M^4 - 16M^2N + 16MP + 16N^2)z - (M^3 - 4MN + 8P)^2}{64z} =$$

$$[x^2 + \tfrac{1}{2}(M + z^{\frac{1}{2}})x + \frac{z^{\frac{3}{2}} + Mz + (4N - M^2)z^{\frac{1}{2}} - (M^3 - 4MN + 8P)}{8z^{\frac{1}{2}}}] \times$$

$$[x^2 + \tfrac{1}{2}(M - z^{\frac{1}{2}})x + \frac{z^{\frac{3}{2}} - Mz + (4N - M^2)z^{\frac{1}{2}} + (M^3 - 4MN + 8P)}{8z^{\frac{1}{2}}}].$$

Je fais $\frac{z^3 + (8N - 3M^2)z^2 + (3M^4 - 16M^2N + 16MP + 16N^2)z - (M^3 - 4MN + 8P)^2}{64z} = Q$ ou $z^3 + (8N - 3M^2)z^2 +$

$(3M^4 - 16M^2N + 16MP + 16N^2 - 64Q)z -$

$(M^3 - 4MN + 8P)^2 = 0$;

j'aurai z, & par conſéquent j'aurai les facteurs de la formule $x^4 + Mx^3 + Nx^2 + Px + Q$.

L'on pourroit peut-être faire dépendre la réſolution de la formule du cinquième degré, de la réſolution d'une équation du quatrième; celle de la formule du ſixième degré, de la réſolution d'une équation du cinquième, &c. c'eſt ce que je n'ai pas tenté, ayant tourné mes vûes ſur cette matière d'un autre côté, comme on va le voir.

PROPOSITION I.

Les lettres m, n, p, q, r, s, t, &c. désignant des nombres réels positifs, les formules du premier degré sont,

1.ere $x + m$,

2. $x - m$.

Celles du second degré sont,

1.ere $x^2 + mx + n$,

2. $x^2 + mx - n$,

3. $x^2 - mx + n$,

4. $x^2 - mx - n$,

5. $x^2 + n$,

6. $x^2 - n$.

Celles du troisième degré sont,

1.ere $x^3 + mx^2 + nx + p$,

2. $x^3 + mx^2 + nx - p$,

3. $x^3 + mx^2 - nx + p$,

4. $x^3 - mx^2 + nx + p$,

5. $x^3 + mx^2 - nx - p$,

6. $x^3 - mx^2 + nx - p$,

7. $x^3 - mx^2 - nx + p$,

8. $x^3 - mx^2 - nx - p$,

9. $x^3 + mx^2 + p$,

10. $x^3 + mx^2 - p$,

11. $x^3 - mx^2 + p$,

12. $x^3 - mx^2 - p$,

13. $x^3 + nx + p$,
14. $x^3 + nx - p$,
15. $x^3 - nx + p$,
16. $x^3 - nx - p$,
17. $x^3 + p$,
18. $x^3 - p$.

Celles du quatrième degré ſont,

1.ere $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$,
2. $x^4 + mx^3 + nx^2 + px - q$,
3. $x^4 + mx^3 + nx^2 - px + q$,
4. $x^4 + mx^3 - nx^2 + px + q$,
5. $x^4 - mx^3 + nx^2 + px + q$,
6. $x^4 + mx^3 + nx^2 - px - q$,
7. $x^4 + mx^3 - nx^2 + px - q$,
8. $x^4 - mx^3 + nx^2 + px - q$,
9. $x^4 + mx^3 - nx^2 - px + q$,
10. $x^4 - mx^3 + nx^2 - px + q$,
11. $x^4 - mx^3 - nx^2 + px + q$,
12. $x^4 + mx^3 - nx^2 - px - q$,
13. $x^4 - mx^3 + nx^2 - px - q$,
14. $x^4 - mx^3 - nx^2 + px - q$,
15. $x^4 - mx^3 - nx^2 - px + q$,
16. $x^4 - mx^3 - nx^2 - px - q$,
17. $x^4 + mx^3 + nx^2 + q$,
18. $x^4 + mx^3 + nx^2 - q$,

19. $x^4 + mx^3 - nx^2 + q$,
20. $x^4 - mx^3 + nx^2 + q$,
21. $x^4 + mx^3 - nx^2 - q$,
22. $x^4 - mx^3 + nx^2 - q$,
23. $x^4 - mx^3 - nx^2 + q$,
24. $x^4 - mx^3 - nx^2 - q$,
25. $x^4 + mx^3 + px + q$,
26. $x^4 + mx^3 + px - q$,
27. $x^4 + mx^3 - px + q$,
28. $x^4 - mx^3 + px + q$,
29. $x^4 + mx^3 - px - q$,
30. $x^4 - mx^3 + px - q$,
31. $x^4 - mx^3 - px + q$,
32. $x^4 - mx^3 - px - q$,
33. $x^4 + nx^2 + px + q$,
34. $x^4 + nx^2 + px - q$,
35. $x^4 + nx^2 - px + q$,
36. $x^4 - nx^2 + px + q$,
37. $x^4 + nx^2 - px - q$,
38. $x^4 - nx^2 + px - q$,
39. $x^4 - nx^2 - px + q$,
40. $x^4 - nx^2 - px - q$,
41. $x^4 + mx^3 + q$,
42. $x^4 + mx^3 - q$,
43. $x^4 - mx^3 + q$,
44. $x^4 - mx^3 - q$,

45. $x^4 + nx^2 + q$,

46. $x^4 + nx^2 - q$,

47. $x^4 - nx^2 + q$,

48. $x^4 - nx^2 - q$,

49. $x^4 + px + q$,

50. $x^4 + px - q$,

51. $x^4 - px + q$,

52. $x^4 - px - q$,

53. $x^4 + q$,

54. $x^4 - q$.

Celles du cinquième degré ſont,

1.ere $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$,

2. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + qx - r$,

3. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - qx + r$,

4. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 + qx + r$,

5. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 + qx + r$,

6. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$,

7. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - qx - r$,

8. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 + qx - r$,

9. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 + qx - r$,

10. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 + qx - r$,

11. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 - qx + r$,

12. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 - qx + r$,

13. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 - qx + r$,

14. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 + qx + r$,

15. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 + qx + r,$
16. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 + qx + r,$
17. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 - qx - r,$
18. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 - qx - r,$
19. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 + qx - r,$
20. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 - qx + r,$
21. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 - qx - r,$
22. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 + qx - r,$
23. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 - qx + r,$
24. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 + qx - r,$
25. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 - qx + r,$
26. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 + qx + r,$
27. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 - qx - r,$
28. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 - qx - r,$
29. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 - qx - r,$
30. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 + qx - r,$
31. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 - qx + r,$
32. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 - qx - r,$

33. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + r,$
34. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - r,$
35. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 + r,$
36. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 + r,$
37. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 + r,$
38. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 - r,$
39. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 - r,$
40. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 - r,$

41. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 + r,$
42. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 + r,$
43. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 + r,$
44. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 - r,$
45. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 - r,$
46. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 - r,$
47. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 + r,$
48. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 - r,$
49. $x^5 + mx^4 + nx^3 + qx + r,$
50. $x^5 + mx^4 + nx^3 + qx - r,$
51. $x^5 + mx^4 + nx^3 - qx + r,$
52. $x^5 + mx^4 - nx^3 + qx + r,$
53. $x^5 - mx^4 + nx^3 + qx + r,$
54. $x^5 + mx^4 + nx^3 - qx - r,$
55. $x^5 + mx^4 - nx^3 + qx - r,$
56. $x^5 - mx^4 + nx^3 + qx - r,$
57. $x^5 + mx^4 - nx^3 - qx + r,$
58. $x^5 - mx^4 + nx^3 - qx + r,$
59. $x^5 - mx^4 - nx^3 + qx + r,$
60. $x^5 + mx^4 - nx^3 - qx - r,$
61. $x^5 - mx^4 + nx^3 - qx - r,$
62. $x^5 - mx^4 - nx^3 + qx - r,$
63. $x^5 - mx^4 - nx^3 - qx + r,$
64. $x^5 - mx^4 - nx^3 - qx - r,$
65. $x^5 + mx^4 + px^2 + qx + r,$
66. $x^5 + mx^4 + px^2 + qx - r,$

67. $x^5 + mx^4 + px^2 - qx + r,$
68. $x^5 + mx^4 - px^2 + qx + r,$
69. $x^5 - mx^4 + px^2 + qx + r,$
70. $x^5 + mx^4 + px^2 - qx - r,$
71. $x^5 + mx^4 - px^2 + qx - r,$
72. $x^5 - mx^4 + px^2 + qx - r,$
73. $x^5 + mx^4 - px^2 - qx + r,$
74. $x^5 - mx^4 + px^2 - qx + r,$
75. $x^5 - mx^4 - px^2 + qx + r,$
76. $x^5 + mx^4 - px^2 - qx - r,$
77. $x^5 - mx^4 + px^2 - qx - r,$
78. $x^5 - mx^4 - px^2 + qx - r,$
79. $x^5 - mx^4 - px^2 - qx + r,$
80. $x^5 - mx^4 - px^2 - qx - r,$

81. $x^5 + nx^3 + px^2 + qx + r,$
82. $x^5 + nx^3 + px^2 + qx - r,$
83. $x^5 + nx^3 + px^2 - qx + r,$
84. $x^5 + nx^3 - px^2 + qx + r,$
85. $x^5 - nx^3 + px^2 + qx + r,$
86. $x^5 + nx^3 + px^2 - qx - r,$
87. $x^5 + nx^3 - px^2 + qx - r,$
88. $x^5 - nx^3 + px^2 + qx - r,$
89. $x^5 + nx^3 - px^2 - qx + r,$
90. $x^5 - nx^3 + px^2 - qx + r,$
91. $x^5 - nx^3 - px^2 + qx + r,$
92. $x^5 + nx^3 - px^2 - qx - r,$

93. $x^5 - nx^3 + px^2 - qx - r,$
94. $x^5 - nx^3 - px^2 + qx - r,$
95. $x^5 - nx^3 - px^2 - qx + r,$
96. $x^5 - nx^3 - px^2 - qx - r,$
97. $x^5 + mx^4 + nx^3 + r,$
98. $x^5 + mx^4 + nx^3 - r,$
99. $x^5 + mx^4 - nx^3 + r,$
100. $x^5 - mx^4 + nx^3 + r,$
101. $x^5 + mx^4 - nx^3 - r,$
102. $x^5 - mx^4 + nx^3 - r,$
103. $x^5 - mx^4 - nx^3 + r,$
104. $x^5 - mx^4 - nx^3 - r,$
105. $x^5 + mx^4 + px^2 + r,$
106. $x^5 + mx^4 + px^2 - r,$
107. $x^5 + mx^4 - px^2 + r,$
108. $x^5 - mx^4 + px^2 + r,$
109. $x^5 + mx^4 - px^2 - r,$
110. $x^5 - mx^4 + px^2 - r,$
111. $x^5 - mx^4 - px^2 + r,$
112. $x^5 - mx^4 - px^2 - r,$
113. $x^5 + nx^3 + px^2 + r,$
114. $x^5 + nx^3 + px^2 - r,$
115. $x^5 + nx^3 - px^2 + r,$
116. $x^5 - nx^3 + px^2 + r,$
117. $x^5 + nx^3 - px^2 - r,$
118. $x^5 - nx^3 + px^2 - r,$

PROPOSITION I.

Les lettres m, n, p, q, r, s, t, &c. désignant d
nombres réels positifs, les formules du premier degré son

1.ere $x + m$,

2. $x - m$.

Celles du second degré sont,

1.ere $x^2 + mx + n$,

2. $x^2 + mx - n$,

3. $x^2 - mx + n$,

4. $x^2 - mx - n$,

5. $x^2 + n$,

6. $x^2 - n$.

Celles du troisième degré sont,

1.ere $x^3 + mx^2 + nx + p$,

2. $x^3 + mx^2 + nx - p$,

3. $x^3 + mx^2 - nx + p$,

4. $x^3 - mx^2 + nx + p$,

5. $x^3 + mx^2 - nx - p$,

6. $x^3 - mx^2 + nx - p$,

7. $x^3 - mx^2 - nx + p$,

8. $x^3 - mx^2 - nx - p$,

9. $x^3 + mx^2 + p$,

10. $x^3 + mx^2 - p$,

11. $x^3 - mx^2 + p$,

12. $x^3 - mx^2 - p$,

13. $x^3 + nx + p$,

14. $x^3 + nx - p$,

15. $x^3 - nx + p$,

16. $x^3 - nx - p$,

17. $x^3 + p$,

18. $x^3 - p$.

Celles du quatrième degré ſont,

1.ere $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$,

2. $x^4 + mx^3 + nx^2 + px - q$,

3. $x^4 + mx^3 + nx^2 - px + q$,

4. $x^4 + mx^3 - nx^2 + px + q$,

5. $x^4 - mx^3 + nx^2 + px + q$,

6. $x^4 + mx^3 + nx^2 - px - q$,

7. $x^4 + mx^3 - nx^2 + px - q$,

8. $x^4 - mx^3 + nx^2 + px - q$,

9. $x^4 + mx^3 - nx^2 - px + q$,

10. $x^4 - mx^3 + nx^2 - px + q$,

11. $x^4 - mx^3 - nx^2 + px + q$,

12. $x^4 + mx^3 - nx^2 - px - q$,

13. $x^4 - mx^3 + nx^2 - px - q$,

14. $x^4 - mx^3 - nx^2 + px - q$,

15. $x^4 - mx^3 - nx^2 - px + q$,

16. $x^4 - mx^3 - nx^2 - px - q$,

17. $x^4 + mx^3 + nx^2 + q$,

18. $x^4 + mx^3 + nx^2 - q$,

19. $x^4 + mx^3 - nx^2 + q$,
20. $x^4 - mx^3 + nx^2 + q$,
21. $x^4 + mx^3 - nx^2 - q$,
22. $x^4 - mx^3 + nx^2 - q$,
23. $x^4 - mx^3 - nx^2 + q$,
24. $x^4 - mx^3 - nx^2 - q$,
25. $x^4 + mx^3 + px + q$,
26. $x^4 + mx^3 + px - q$,
27. $x^4 + mx^3 - px + q$,
28. $x^4 - mx^3 + px + q$,
29. $x^4 + mx^3 - px - q$,
30. $x^4 - mx^3 + px - q$,
31. $x^4 - mx^3 - px + q$,
32. $x^4 - mx^3 - px - q$,
33. $x^4 + nx^2 + px + q$,
34. $x^4 + nx^2 + px - q$,
35. $x^4 + nx^2 - px + q$,
36. $x^4 - nx^2 + px + q$,
37. $x^4 + nx^2 - px - q$,
38. $x^4 - nx^2 + px - q$,
39. $x^4 - nx^2 - px + q$,
40. $x^4 - nx^2 - px - q$,
41. $x^4 + mx^3 + q$,
42. $x^4 + mx^3 - q$,
43. $x^4 - mx^3 + q$,
44. $x^4 - mx^3 - q$,

45. $x^4 + nx^2 + q$,
46. $x^4 + nx^2 - q$,
47. $x^4 - nx^2 + q$,
48. $x^4 - nx^2 - q$,
49. $x^4 + px + q$,
50. $x^4 + px - q$,
51. $x^4 - px + q$,
52. $x^4 - px - q$,
53. $x^4 + q$,
54. $x^4 - q$.

Celles du cinquième degré ſont,

1.ere $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$,
2. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + qx - r$,
3. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - qx + r$,
4. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 + qx + r$,
5. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 + qx + r$,
6. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$,
7. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - qx - r$,
8. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 + qx - r$,
9. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 + qx - r$,
10. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 + qx - r$;
11. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 - qx + r$,
12. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 - qx + r$,
13. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 - qx + r$,
14. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 + qx + r$,

15. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 + qx + r,$

16. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 + qx + r,$

17. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 - qx - r,$

18. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 - qx - r,$

19. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 + qx - r,$

20. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 - qx + r,$

21. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 - qx - r,$

22. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 + qx - r,$

23. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 - qx + r,$

24. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 + qx - r,$

25. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 - qx + r,$

26. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 + qx + r,$

27. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 - qx - r,$

28. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 - qx - r,$

29. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 - qx - r,$

30. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 + qx - r,$

31. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 - qx + r,$

32. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 - qx - r,$

33. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + r,$

34. $x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 - r,$

35. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 + r,$

36. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 + r,$

37. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 + r,$

38. $x^5 + mx^4 + nx^3 - px^2 - r,$

39. $x^5 + mx^4 - nx^3 + px^2 - r,$

40. $x^5 - mx^4 + nx^3 + px^2 - r,$

41. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 + r,$
42. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 + r,$
43. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 + r,$
44. $x^5 + mx^4 - nx^3 - px^2 - r,$
45. $x^5 - mx^4 + nx^3 - px^2 - r,$
46. $x^5 - mx^4 - nx^3 + px^2 - r,$
47. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 + r,$
48. $x^5 - mx^4 - nx^3 - px^2 - r,$
49. $x^5 + mx^4 + nx^3 + qx + r,$
50. $x^5 + mx^4 + nx^3 + qx - r,$
51. $x^5 + mx^4 + nx^3 - qx + r,$
52. $x^5 + mx^4 - nx^3 + qx + r,$
53. $x^5 - mx^4 + nx^3 + qx + r,$
54. $x^5 + mx^4 + nx^3 - qx - r,$
55. $x^5 + mx^4 - nx^3 + qx - r,$
56. $x^5 - mx^4 + nx^3 + qx - r,$
57. $x^5 + mx^4 - nx^3 - qx + r,$
58. $x^5 - mx^4 + nx^3 - qx + r,$
59. $x^5 - mx^4 - nx^3 + qx + r,$
60. $x^5 + mx^4 - nx^3 - qx - r,$
61. $x^5 - mx^4 + nx^3 - qx - r,$
62. $x^5 - mx^4 - nx^3 + qx - r,$
63. $x^5 - mx^4 - nx^3 - qx + r,$
64. $x^5 - mx^4 - nx^3 - qx - r,$
65. $x^5 + mx^4 + px^2 + qx + r,$
66. $x^5 + mx^4 + px^2 + qx - r,$

67. $x^5 + mx^4 + px^2 - qx + r$,
68. $x^5 + mx^4 - px^2 + qx + r$,
69. $x^5 - mx^4 + px^2 + qx + r$,
70. $x^5 + mx^4 + px^2 - qx - r$,
71. $x^5 + mx^4 - px^2 + qx - r$,
72. $x^5 - mx^4 + px^2 + qx - r$,
73. $x^5 + mx^4 - px^2 - qx + r$,
74. $x^5 - mx^4 + px^2 - qx + r$,
75. $x^5 - mx^4 - px^2 + qx + r$,
76. $x^5 + mx^4 - px^2 - qx - r$,
77. $x^5 - mx^4 + px^2 - qx - r$,
78. $x^5 - mx^4 - px^2 + qx - r$,
79. $x^5 - mx^4 - px^2 - qx + r$,
80. $x^5 - mx^4 - px^2 - qx - r$,

81. $x^5 + nx^3 + px^2 + qx + r$,
82. $x^5 + nx^3 + px^2 + qx - r$,
83. $x^5 + nx^3 + px^2 - qx + r$,
84. $x^5 + nx^3 - px^2 + qx + r$,
85. $x^5 - nx^3 + px^2 + qx + r$,
86. $x^5 + nx^3 + px^2 - qx - r$,
87. $x^5 + nx^3 - px^2 + qx - r$,
88. $x^5 - nx^3 + px^2 + qx - r$,
89. $x^5 + nx^3 - px^2 - qx + r$,
90. $x^5 - nx^3 + px^2 - qx + r$,
91. $x^5 - nx^3 - px^2 + qx + r$,
92. $x^5 + nx^3 - px^2 - qx - r$,

93. $x^5 - nx^3 + px^2 - qx - r$,
94. $x^5 - nx^3 - px^2 + qx - r$,
95. $x^5 - nx^3 - px^2 - qx + r$,
96. $x^5 - nx^3 - px^2 - qx - r$,
97. $x^5 + mx^4 + nx^3 + r$,
98. $x^5 + mx^4 + nx^3 - r$,
99. $x^5 + mx^4 - nx^3 + r$,
100. $x^5 - mx^4 + nx^3 + r$,
101. $x^5 + mx^4 - nx^3 - r$,
102. $x^5 - mx^4 + nx^3 - r$,
103. $x^5 - mx^4 - nx^3 + r$,
104. $x^5 - mx^4 - nx^3 - r$,
105. $x^5 + mx^4 + px^2 + r$,
106. $x^5 + mx^4 + px^2 - r$,
107. $x^5 + mx^4 - px^2 + r$,
108. $x^5 - mx^4 + px^2 + r$,
109. $x^5 + mx^4 - px^2 - r$,
110. $x^5 - mx^4 + px^2 - r$,
111. $x^5 - mx^4 - px^2 + r$,
112. $x^5 - mx^4 - px^2 - r$,
113. $x^5 + nx^3 + px^2 + r$,
114. $x^5 + nx^3 + px^2 - r$,
115. $x^5 + nx^3 - px^2 + r$,
116. $x^5 - nx^3 + px^2 + r$,
117. $x^5 + nx^3 - px^2 - r$,
118. $x^5 - nx^3 + px^2 - r$,

119. $x^5 - nx^3 - px^2 + r$,

120. $x^5 - nx^3 - px^2 - r$,

121. $x^5 + mx^4 + qx + r$,

122. $x^5 + mx^4 + qx - r$,

123. $x^5 + mx^4 - qx + r$,

124. $x^5 - mx^4 + qx + r$,

125. $x^5 + mx^4 - qx - r$,

126. $x^5 - mx^4 + qx - r$,

127. $x^5 - mx^4 - qx + r$,

128. $x^5 - mx^4 - qx - r$,

129. $x^5 + nx^3 + qx + r$,

130. $x^5 + nx^3 + qx - r$,

131. $x^5 + nx^3 - qx + r$,

132. $x^5 - nx^3 + qx + r$,

133. $x^5 + nx^3 - qx - r$,

134. $x^5 - nx^3 + qx - r$,

135. $x^5 - nx^3 - qx + r$,

136. $x^5 - nx^3 - qx - r$,

137. $x^5 + px^2 + qx + r$,

138. $x^5 + px^2 + qx - r$,

139. $x^5 + px^2 - qx + r$,

140. $x^5 - px^2 + qx + r$,

141. $x^5 + px^2 - qx - r$,

142. $x^5 - px^2 + qx - r$,

143. $x^5 - px^2 - qx + r$,

144. $x^5 - px^2 - qx - r$,

145. $x^5 + mx^4 + r$,
146. $x^5 + mx^4 - r$,
147. $x^5 - mx^4 + r$,
148. $x^5 - mx^4 - r$,

149. $x^5 + nx^3 + r$,
150. $x^5 + nx^3 - r$,
151. $x^5 - nx^3 + r$,
152. $x^5 - nx^3 - r$,

153. $x^5 + px^2 + r$,
154. $x^5 + px^2 - r$,
155. $x^5 - px^2 + r$,
156. $x^5 - px^2 - r$,

157. $x^5 + qx + r$,
158. $x^5 + qx - r$,
159. $x^5 - qx + r$,
160. $x^5 - qx - r$,

161. $x^5 + r$,
162. $x^5 - r$.

Celles du sixième degré sont,

1.ere $x^6 + mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$, &c.

485. $x^6 + s$,
486. $x^6 - s$.

PROPOSITION II.

a & b étant des nombres réels positifs, & a étant plus grand que b, tout nombre, quel qu'il soit, & quelque compliquée que soit son expression, pourra toûjours se désigner par a, ou par $-a$, ou par $a\sqrt{-1}$, ou par $-a\sqrt{-1}$, ou par $a+a\sqrt{-1}$, ou par $a-a\sqrt{-1}$, ou par $-a+a\sqrt{-1}$, ou par $-a-a\sqrt{-1}$, ou par $a+b\sqrt{-1}$, ou par $a-b\sqrt{-1}$, ou par $-a+b\sqrt{-1}$, ou par $-a-b\sqrt{-1}$, ou par $b+a\sqrt{-1}$, ou par $b-a\sqrt{-1}$, ou par $-b+a\sqrt{-1}$, ou par $-b-a\sqrt{-1}$.

PROPOSITION III.

A & B étant des nombres réels positifs ou négatifs, si l'un des facteurs d'une formule est $x+A+B\sqrt{-1}$, ceci $x+A-B\sqrt{-1}$ sera nécessairement un autre des facteurs de cette même formule, sans quoi les nombres m, n, p, q, r, s, t, &c. ne seroient pas des nombres réels, comme nous le supposons.

PROPOSITION IV.

a, b, c, d, e, f, g, &c. étant des nombres réels positifs, & a étant plus grand que b, b plus grand que c, c plus grand que d, d plus grand que e, e plus grand que f, f plus grand que g, &c.

Les systêmes de facteurs des formules du second degré sont,

$(x+a)\,(x+a)$
$(x+a)\,(x-a)$
$(x-a)\,(x-a)$
$(x\pm a)\,(x\pm b)$.

$(x+a)(x-b)$
$(x-a)(x+b)$
$(x-a)(x-b)$
$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$

Ceux des formules du troisième degré sont,

$(x+a)(x+a)(x+a)$
$(x+a)(x+a)(x-a)$
$(x+a)(x-a)(x-a)$
$(x-a)(x-a)(x-a)$
$(x+a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x+b)(x-b)$
$(x-a)(x+b)(x+b)$
$(x+a)(x-b)(x-b)$
$(x-a)(x+b)(x-b)$
$(x-a)(x-b)(x-b)$
$(x+a)(x+a)(x+b)$
$(x+a)(x+a)(x-b)$
$(x+a)(x-a)(x+b)$
$(x+a)(x-a)(x-b)$
$(x-a)(x-a)(x+b)$
$(x-a)(x-a)(x-b)$
$(x+a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x-c)$

$$(x - a)(x - b)(x + c)$$
$$(x - a)(x - b)(x - c)$$

$$(x + a)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)(x + b\sqrt{-1})(x - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)(x + b\sqrt{-1})(x - b\sqrt{-1})$$
$$(x + b)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$$
$$(x - b)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$$

$$(x + a)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)(x - a + a\sqrt{-1})(x - a - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)(x - a + a\sqrt{-1})(x - a - a\sqrt{-1})$$

$$(x + a)(x + b - b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)(x + b + b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$$
$$(x + b)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$$
$$(x + b)(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1})$$
$$(x - b)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$$
$$(x - b)(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1})$$

$$(x + b)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$$
$$(x + b)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$$
$$(x - b)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$$
$$(x - b)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$$

$$(x + a)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$$
$$(x + b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$$
$$(x + b)(x - a + a\sqrt{-1})(x - a - a\sqrt{-1})$$

$(x - b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$
$(x - b)(x - a + a\sqrt{-1})(x - a - a\sqrt{-1})$
$(x + a)(x + b + c\sqrt{-1})(x + b - c\sqrt{-1})$
$(x + a)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$
$(x - a)(x + b + c\sqrt{-1})(x + b - c\sqrt{-1})$
$(x - a)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$
$(x + a)(x + c + b\sqrt{-1})(x + c - b\sqrt{-1})$
$(x + a)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$
$(x - a)(x + c + b\sqrt{-1})(x + c - b\sqrt{-1})$
$(x - a)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$
$(x + b)(x + a + c\sqrt{-1})(x + a - c\sqrt{-1})$
$(x + b)(x - a + c\sqrt{-1})(x - a - c\sqrt{-1})$
$(x - b)(x + a + c\sqrt{-1})(x + a - c\sqrt{-1})$
$(x - b)(x - a + c\sqrt{-1})(x - a - c\sqrt{-1})$
$(x + b)(x + c + a\sqrt{-1})(x + c - a\sqrt{-1})$
$(x + b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$
$(x - b)(x + c + a\sqrt{-1})(x + c - a\sqrt{-1})$
$(x - b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$
$(x + c)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$
$(x + c)(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1})$
$(x - c)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$
$(x - c)(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1})$
$(x + c)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$
$(x + c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$
$(x - c)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$
$(x - c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$

Ceux des formules du quatrième degré font,

$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)$
$(x + a)(x + a)(x + a)(x - a)$
$(x + a)(x + a)(x - a)(x - a)$
$(x + a)(x - a)(x - a)(x - a)$
$(x - a)(x - a)(x - a)(x - a)$
$(x + a)(x + b)(x + b)(x + b)$
$(x + a)(x + b)(x + b)(x - b)$

$(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x+b)(x-b)(x-b)$

$(x-a)(x+b)(x+b)(x-b)$

$(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)$

$(x-a)(x+b)(x-b)(x-b)$

$(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)$

$(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x+a)(x-b)$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x-b)$

$(x+a)(x-a)(x-a)(x+b)$

$(x+a)(x-a)(x-a)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)$

$(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)$

$(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)$

$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$

$(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x-b)(x+b)$

$(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+c)$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x-c)$

$(x+a)(x-b)(x+c)(x+c)$

$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)$

$(x+a)(x+b)(x-c)(x-c)$

$(x+a)(x-b)(x+c)(x-c)$

$(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)$

$(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)$

$(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)$

$(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)$

$(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)$

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)$

$(x+$

$$(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)$$
$$(x+a)(x+b)(x+b)(x-c)$$
$$(x+a)(x+b)(x-b)(x+c)$$
$$(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)$$
$$(x+a)(x+b)(x-b)(x-c)$$
$$(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)$$
$$(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$$
$$(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)$$
$$(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)$$
$$(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)$$
$$(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)$$
$$(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)$$
$$(x+a)(x+a)(x+b)(x+c)$$
$$(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)$$
$$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)$$
$$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c)$$
$$(x+a)(x+a)(x-b)(x-c)$$
$$(x+a)(x-a)(x+b)(x-c)$$
$$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)$$
$$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)$$
$$(x+a)(x-a)(x-b)(x-c)$$
$$(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)$$
$$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)$$
$$(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)$$
$$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)$$
$$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d)$$
$$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)$$
$$(x+a)(x+b)(x-c)(x-d)$$
$$(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)$$
$$(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)$$
$$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)$$
$$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)$$
$$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)$$

LII

$$(x+a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)$$
$$(x-a)\,(x+b)\,(x-c)\,(x-d)$$
$$(x-a)\,(x-b)\,(x+c)\,(x-d)$$
$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x+d)$$
$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)$$
$$(x+a)\,(x+a)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x-a)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)\,(x-a)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x+a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x-a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)\,(x-a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x-b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)\,(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)\,(x-b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x+b)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x-b)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)\,(x+b)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)\,(x-b)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b)\,(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x+b)\,(x-b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x-b)\,(x-b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x-b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})$$
$$(x-a)\,(x+b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})$$
$$(x-a)\,(x-b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x-c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)\,(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)\,(x-c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b)\,(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x+b)\,(x-c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x-b)\,(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x-b)\,(x-c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)\,(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$$

$$(x+a)(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b)(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b)(x+b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b)(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b)(x-b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x-b)(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x-b)(x-b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+b)(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+b)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x-b)(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x-b)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$

$$(x - a)\,(x - a)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x + b)\,(x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x + b)\,(x - a + a\sqrt{-1})\,(x - a - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x - b)\,(x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x + b)\,(x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x - b)\,(x - a + a\sqrt{-1})\,(x - a - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x + b)\,(x - a + a\sqrt{-1})\,(x - a - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x - b)\,(x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x - b)\,(x - a + a\sqrt{-1})\,(x - a - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x + a)\,(x + b + b\sqrt{-1})\,(x + b - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x + a)\,(x - b + b\sqrt{-1})\,(x - b - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x - a)\,(x + b + b\sqrt{-1})\,(x + b - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x - a)\,(x - b + b\sqrt{-1})\,(x - b - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x - a)\,(x + b + b\sqrt{-1})\,(x + b - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x - a)\,(x - b + b\sqrt{-1})\,(x - b - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x + b)\,(x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x + b)\,(x - a + b\sqrt{-1})\,(x - a - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x - b)\,(x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x + b)\,(x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x - b)\,(x - a + b\sqrt{-1})\,(x - a - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x + b)\,(x - a + b\sqrt{-1})\,(x - a - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x - b)\,(x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x - b)\,(x - a + b\sqrt{-1})\,(x - a - b\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x + b)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x + b)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x - b)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x + b)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$$
$$(x + a)\,(x - b)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x + b)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x - b)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$$
$$(x - a)\,(x - b)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$$
$$(x + b)\,(x + b)\,(x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1})$$
$$(x + b)\,(x + b)\,(x - a + a\sqrt{-1})\,(x - a - a\sqrt{-1})$$
$$(x + b)\,(x - b)\,(x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1})$$
$$(x + b)\,(x - b)\,(x - a + a\sqrt{-1})\,(x - a - a\sqrt{-1})$$

$(x-b)(x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b)(x-c+c)\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+c)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-c)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+c)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-c)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$

$(x+c)(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$

$+ c)\,(x + c)\,(x - a + b\sqrt{-1})\,(x - a - b\sqrt{-1})$
$+ c)\,(x - c)\,(x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1})$
$+ c)\,(x - c)\,(x - a + b\sqrt{-1})\,(x - a - b\sqrt{-1})$
$- c)\,(x - c)\,(x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1})$
$x - c)\,(x - c)\,(x - a + b\sqrt{-1})\,(x - a - b\sqrt{-1})$
$x + b)\,(x + c)\,(x + c + a\sqrt{-1})\,(x + c - a\sqrt{-1})$
$x + b)\,(x + c)\,(x - c + a\sqrt{-1})\,(x - c - a\sqrt{-1})$
$x + b)\,(x - c)\,(x + c + a\sqrt{-1})\,(x + c - a\sqrt{-1})$
$x - b)\,(x + c)\,(x + c + a\sqrt{-1})\,(x + c - a\sqrt{-1})$
$x + b)\,(x - c)\,(x - c + a\sqrt{-1})\,(x - c - a\sqrt{-1})$
$(x - b)\,(x + c)\,(x - c + a\sqrt{-1})\,(x - c - a\sqrt{-1})$
$(x - b)\,(x - c)\,(x + c + a\sqrt{-1})\,(x + c - a\sqrt{-1})$
$(x - b)\,(x - c)\,(x - c + a\sqrt{-1})\,(x - c - a\sqrt{-1})$
$(x + c)\,(x + c)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$
$(x + c)\,(x + c)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$
$(x + c)\,(x - c)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$
$(x + c)\,(x - c)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$
$(x - c)\,(x - c)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$
$(x - c)\,(x - c)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$
$(x + a)\,(x + b)\,(x + b + c\sqrt{-1})\,(x + b - c\sqrt{-1})$
$(x + a)\,(x + b)\,(x - b + c\sqrt{-1})\,(x - b - c\sqrt{-1})$
$(x + a)\,(x - b)\,(x + b + c\sqrt{-1})\,(x + b - c\sqrt{-1})$
$(x - a)\,(x + b)\,(x + b + c\sqrt{-1})\,(x + b - c\sqrt{-1})$
$(x + a)\,(x - b)\,(x - b + c\sqrt{-1})\,(x - b - c\sqrt{-1})$
$(x - a)\,(x + b)\,(x - b + c\sqrt{-1})\,(x - b - c\sqrt{-1})$
$(x - a)\,(x - b)\,(x + b + c\sqrt{-1})\,(x + b - c\sqrt{-1})$
$(x - a)\,(x - b)\,(x - b + c\sqrt{-1})\,(x - b - c\sqrt{-1})$
$(x + b)\,(x + b)\,(x + a + c\sqrt{-1})\,(x + a - c\sqrt{-1})$
$(x + b)\,(x + b)\,(x - a + c\sqrt{-1})\,(x - a - c\sqrt{-1})$
$(x + b)\,(x - b)\,(x + a + c\sqrt{-1})\,(x + a - c\sqrt{-1})$
$(x + b)\,(x - b)\,(x - a + c\sqrt{-1})\,(x - a - c\sqrt{-1})$
$(x - b)\,(x - b)\,(x + a + c\sqrt{-1})\,(x + a - c\sqrt{-1})$
$(x - b)\,(x - b)\,(x - a + c\sqrt{-1})\,(x - a - c\sqrt{-1})$
$(x + a)\,(x + b)\,(x + c + b\sqrt{-1})\,(x + c - b\sqrt{-1})$
$(x + a)\,(x + b)\,(x - c + b\sqrt{-1})\,(x - c - b\sqrt{-1})$

$(x+a)\,(x-b)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

$(x-a)\,(x+b)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

$(x+a)\,(x-b)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})$

$(x-a)\,(x+b)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})$

$(x-a)\,(x-b)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

$(x-a)\,(x-b)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})$

$(x+a)\,(x+c)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

$(x+a)\,(x+c)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1})$

$(x+a)\,(x-c)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

$(x-a)\,(x+c)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

$(x+a)\,(x-c)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1})$

$(x-a)\,(x+c)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1})$

$(x-a)\,(x-c)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

$(x-a)\,(x-c)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x+c)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x-c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x-b)\,(x+c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x-c)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})$

$(x-b)\,(x+c)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})$

$(x-b)\,(x-c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

$(x-b)\,(x-c)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x+b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

$(x+b)\,)x+b)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x-b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x-b)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1})$

$(x-b)\,(x-b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

$(x-b)\,(x-b)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x+c)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x-c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x-b)\,(x+c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

$(x+b)\,(x-c)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})$

$(x-b)\,(x+c)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})$

$(x-b)\,(x-c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

$$(x-b)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x+b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$$
$$(x-a)(x+b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$$

$(x-a)$

$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x-d+b\sqrt{-1})\ (x-d-b\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$

Ceux des formules du cinquième degré ſont,

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)$
$(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x-a)$
$(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x-a)\ (x-a)$
$(x+a)\ (x+a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)$
$(x+a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)$
$(x-a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)$
$(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)$
$(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)$
$(x+a)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x+a)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)$

$(x+b)(x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+c)(x-a+d\sqrt{-1})(x-a-d\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-c)(x-a+d\sqrt{-1})(x-a-d\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+c)(x-a+d\sqrt{-1})(x-a-d\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-c)(x-a+d\sqrt{-1})(x-a-d\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b)(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b)(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b)(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+d)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-d)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+d)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-d)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+c)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+c)(x-d+b\sqrt{-1})(x-d-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)(x-c)$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)(x-c)$
* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)$

$$(x-b)(x+d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$$
$$(x-b)(x-d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$$
$$(x-b)(x-d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$$
$$(x+c)(x+d)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+c)(x+d)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+c)(x-d)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x-c)(x+d)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+c)(x-d)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x-c)(x+d)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x-c)(x-d)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x-c)(x-d)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$$
$$(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$$
$$(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$$
$$(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$$
$$(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$$
$$(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$$
$$(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$$
$$(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$$

$(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)(x+d)$

$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-c+c\sqrt{-1})\ (x-c-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-c+c\sqrt{-1})\ (x-c-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-c+c\sqrt{-1})\ (x-c-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x-c+c\sqrt{-1})\ (x-c-c\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

$(x+b+a\sqrt{-1})$	$(x+b-a\sqrt{-1})$	$(x-b+c\sqrt{-1})$	$(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$	$(x-b-a\sqrt{-1})$	$(x+b+c\sqrt{-1})$	$(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$	$(x-b-a\sqrt{-1})$	$(x-b+c\sqrt{-1})$	$(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})$	$(x+b-a\sqrt{-1})$	$(x+c+b\sqrt{-1})$	$(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})$	$(x+b-a\sqrt{-1})$	$(x-c+b\sqrt{-1})$	$(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$	$(x-b-a\sqrt{-1})$	$(x+c+b\sqrt{-1})$	$(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$	$(x-b-a\sqrt{-1})$	$(x-c+b\sqrt{-1})$	$(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})$	$(x+a-c\sqrt{-1})$	$(x+b+b\sqrt{-1})$	$(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+a+c\sqrt{-1})$	$(x+a-c\sqrt{-1})$	$(x-b+b\sqrt{-1})$	$(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})$	$(x-a-c\sqrt{-1})$	$(x+b+b\sqrt{-1})$	$(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-a+c\sqrt{-1})$	$(x-a-c\sqrt{-1})$	$(x-b+b\sqrt{-1})$	$(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})$	$(x+c-a\sqrt{-1})$	$(x+b+b\sqrt{-1})$	$(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x+c+a\sqrt{-1})$	$(x+c-a\sqrt{-1})$	$(x-b+b\sqrt{-1})$	$(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})$	$(x-c-a\sqrt{-1})$	$(x+b+b\sqrt{-1})$	$(x+b-b\sqrt{-1})$
$(x-c+a\sqrt{-1})$	$(x-c-a\sqrt{-1})$	$(x-b+b\sqrt{-1})$	$(x-b-b\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})$	$(x+a-a\sqrt{-1})$	$(x+b+c\sqrt{-1})$	$(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})$	$(x+a-a\sqrt{-1})$	$(x-b+c\sqrt{-1})$	$(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})$	$(x-a-a\sqrt{-1})$	$(x+b+c\sqrt{-1})$	$(x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})$	$(x-a-a\sqrt{-1})$	$(x-b+c\sqrt{-1})$	$(x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})$	$(x+a-a\sqrt{-1})$	$(x+c+b\sqrt{-1})$	$(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+a\sqrt{-1})$	$(x+a-a\sqrt{-1})$	$(x-c+b\sqrt{-1})$	$(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})$	$(x-a-a\sqrt{-1})$	$(x+c+b\sqrt{-1})$	$(x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+a\sqrt{-1})$	$(x-a-a\sqrt{-1})$	$(x-c+b\sqrt{-1})$	$(x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})$	$(x+a-b\sqrt{-1})$	$(x+a+c\sqrt{-1})$	$(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})$	$(x+a-b\sqrt{-1})$	$(x-a+c\sqrt{-1})$	$(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})$	$(x-a-b\sqrt{-1})$	$(x+a+c\sqrt{-1})$	$(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})$	$(x-a-b\sqrt{-1})$	$(x-a+c\sqrt{-1})$	$(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})$	$(x+a-b\sqrt{-1})$	$(x+c+a\sqrt{-1})$	$(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x+a+b\sqrt{-1})$	$(x+a-b\sqrt{-1})$	$(x-c+a\sqrt{-1})$	$(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})$	$(x-a-b\sqrt{-1})$	$(x+c+a\sqrt{-1})$	$(x+c-a\sqrt{-1})$
$(x-a+b\sqrt{-1})$	$(x-a-b\sqrt{-1})$	$(x-c+a\sqrt{-1})$	$(x-c-a\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})$	$(x+b-a\sqrt{-1})$	$(x+a+c\sqrt{-1})$	$(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x+b+a\sqrt{-1})$	$(x+b-a\sqrt{-1})$	$(x-a+c\sqrt{-1})$	$(x-a-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$	$(x-b-a\sqrt{-1})$	$(x+a+c\sqrt{-1})$	$(x+a-c\sqrt{-1})$
$(x-b+a\sqrt{-1})$	$(x-b-a\sqrt{-1})$	$(x-a+c\sqrt{-1})$	$(x-a-c\sqrt{-1})$

$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$

$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})$

$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$

$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})$

$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-c+d\sqrt{-1})\ (x-c-d\sqrt{-1})$

$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-c+d\sqrt{-1})\ (x-c-d\sqrt{-1})$

$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

$(x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x-d+c\sqrt{-1})\ (x-d-c\sqrt{-1})$

$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

$(x-a+b\sqrt{-1})\ (x-a-b\sqrt{-1})\ (x-d+c\sqrt{-1})\ (x-d-c\sqrt{-1})$

$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-c+d\sqrt{-1})\ (x-c-d\sqrt{-1})$

$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x-c+d\sqrt{-1})\ (x-c-d\sqrt{-1})$

$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

$(x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x-d+c\sqrt{-1})\ (x-d-c\sqrt{-1})$

$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

$(x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ (x-d+c\sqrt{-1})\ (x-d-c\sqrt{-1})$

$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$

$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x-b+d\sqrt{-1})\ (x-b-d\sqrt{-1})$

$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$

$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x-b+d\sqrt{-1})\ (x-b-d\sqrt{-1})$

$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

$(x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x-d+b\sqrt{-1})\ (x-d-b\sqrt{-1})$

$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

$(x-a+c\sqrt{-1})\ (x-a-c\sqrt{-1})\ (x-d+b\sqrt{-1})\ (x-d-b\sqrt{-1})$

$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$

$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x-b+d\sqrt{-1})\ (x-b-d\sqrt{-1})$

$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$

$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x-b+d\sqrt{-1})\ (x-b-d\sqrt{-1})$

$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

$(x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x-d+b\sqrt{-1})\ (x-d-b\sqrt{-1})$

$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

$(x-c+a\sqrt{-1})$

$(x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ (x-d+b\sqrt{-1})\ (x-d-b\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-a+d\sqrt{-1})\ (x-a-d\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
$(x-d+a\sqrt{-1})\ (x-d-a\sqrt{-1})\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$

Ceux des formules du cinquième degré sont,

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)$
$(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x-a)$
$(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x-a)\ (x-a)$
$(x+a)\ (x+a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)$
$(x+a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)$
$(x-a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)\ (x-a)$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)$
$(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)$
$(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)$
$(x+a)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x+a)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)$
$(x-a)\ (x+b)\ (x-b)\ (x-b)\ (x-b)$

$(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)(x-b)$

* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x-b)$

$(x+a)(x+a)(x+a)(x-a)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x+a)(x-a)(x-b)$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x-a)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x-a)(x-b)$

$(x+a)(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)$

$(x+a)(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)$

$(x-a)(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)$

* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x-b)$

$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)(x-b)$

$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-b)$

* $(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-b)$

$(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)$

* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)$

$(x+a)(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)$

$(x+a)(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)$

$(x+a)(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)$

$(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)$

* $(x+b)(x+c)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-a})$
$(x-a)(x+c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-c)$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)(x+c)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b)(x-c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)(x+c)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-b)(x-c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x+c)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-c)$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+d)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x-d)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)(x+d)$

$(x - a)(x + b)(x + c)(x - c)(x - d)$

$(x - a)(x - b)(x + c)(x + c)(x - d)$

$(x + a)(x - b)(x - c)(x - c)(x + d)$

$(x - a)(x + b)(x - c)(x - c)(x + d)$

$(x - a)(x - b)(x + c)(x - c)(x + d)$

$(x + a)(x - b)(x - c)(x - c)(x - d)$

$(x - a)(x + b)(x - c)(x - c)(x - d)$

$(x - a)(x - b)(x + c)(x - c)(x - d)$

$(x - a)(x - b)(x - c)(x - c)(x + d)$

$(x - a)(x - b)(x - c)(x - c)(x - d)$

* $(x + a)(x + b)(x + b)(x + c)(x + d)$

$(x + a)(x + b)(x + b)(x + c)(x - d)$

$(x + a)(x + b)(x + b)(x - c)(x + d)$

$(x + a)(x + b)(x - b)(x + c)(x + d)$

$(x - a)(x + b)(x + b)(x + c)(x + d)$

$(x + a)(x + b)(x + b)(x - c)(x - d)$

$(x + a)(x + b)(x - b)(x + c)(x - d)$

$(x - a)(x + b)(x + b)(x + c)(x - d)$

$(x + a)(x + b)(x - b)(x - c)(x + d)$

$(x - a)(x + b)(x + b)(x - c)(x + d)$

$(x + a)(x - b)(x - b)(x + c)(x + d)$

$(x - a)(x + b)(x - b)(x + c)(x + d)$

$(x + a)(x + b)(x - b)(x - c)(x - d)$

$(x - a)(x + b)(x + b)(x - c)(x - d)$

$(x + a)(x - b)(x - b)(x + c)(x - d)$

$(x - a)(x + b)(x - b)(x + c)(x - d)$

$(x + a)(x - b)(x - b)(x - c)(x + d)$

$(x - a)(x + b)(x - b)(x - c)(x + d)$

$(x - a)(x - b)(x - b)(x + c)(x + d)$

$(x + a)(x - b)(x - b)(x - c)(x - d)$

$(x - a)(x + b)(x - b)(x - c)(x - d)$

$(x - a)(x - b)(x - b)(x + c)(x - d)$

$(x - a)(x - b)(x - b)(x - c)(x + d)$

$(x - a)(x - b)(x - b)(x - c)(x - d)$

* $(x + a)(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$

$(x+a)(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+a)(x+b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x-c)(x-d)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x-e)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)(x+e)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)(x+e)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d)(x+e)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)(x-e)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d)(x-e)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d)(x-e)$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d)(x-e)$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x-d)(x+e)$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)(x+e)$

$(x-a)$

$(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)(x+e)$

$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)(x+e)$

$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)(x+e)$

$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)(x+e)$

$(x+a)(x+b)(x-c)(x-d)(x-e)$

$(x+a)(x-b)(x+c)(x-d)(x-e)$

$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)(x-e)$

$(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)(x+e)$

$(x-a)(x+b)(x+c)(x-d)(x-e)$

$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d)(x-e)$

$(x-a)(x+b)(x-c)(x-d)(x+e)$

$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)(x-e)$

$(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)(x+e)$

$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)(x+e)$

$(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$

$(x-a)(x+b)(x-c)(x-d)(x-e)$

$(x-a)(x-b)(x+c)(x-d)(x-e)$

$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)(x-e)$

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x+e)$

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)$

* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-a)(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-a)(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+b)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a)(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+a)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-b)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+c)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x+c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-c)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x+b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-b)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x+b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x+b)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

$(x-b)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-a)(x+b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

$(x-a)(x-a)(x-b)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x+a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

$(x+a)(x-a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x+c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-c)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x+d\sqrt{-1})(x-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x+d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-b)(x-d)(x+c\sqrt{-1})(x-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-a})$
$(x-a)(x+c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x+c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x+d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-c)(x-d)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c)(x+d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x+c)(x-d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x+d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x+d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x+b)(x-c)(x-d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x+c)(x-d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x+d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
$(x-b)(x-c)(x-d)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x+a)(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
$(x+a)(x-a)(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
$(x-a)(x-a)(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b)(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b)(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c)(x+c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c)(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+c)(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x\pm c)(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d+d\sqrt{-1})\ (x+d-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+d)\ (x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+c)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+b)\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+b)\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+d)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+c)\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a)\ (x+d)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d+e\sqrt{-1})\ (x+d-e\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+c+e\sqrt{-1})\ (x+c-e\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+b+e\sqrt{-1})\ (x+b-e\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+a+e\sqrt{-1})\ (x+a-e\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+e+d\sqrt{-1})\ (x+e-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+e)\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+e)\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+e)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+d)\ (x+e+c\sqrt{-1})\ (x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b)\ (x+e)\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+e+b\sqrt{-1})\ (x+e-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)$

* $(x \mp a)\ (x+c)\ (x+e)\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+d)\ (x+e+a\sqrt{-1})\ (x+e-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c)\ (x+e)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+d)\ (x+e)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+a+a\sqrt{-1})\ (x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\ (x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\ (x+c\sqrt{-1})\ (x-c\sqrt{-1})\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$
* $(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+c+d\sqrt{-1})\,(x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+d+c\sqrt{-1})\,(x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+d+b\sqrt{-1})\,(x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+d\sqrt{-1})\,(x+a-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+d+a\sqrt{-1})\,(x+d-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\,(x+d\sqrt{-1})\,(x-d\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+b\sqrt{-1})\,(x-b\sqrt{-1})\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\,(x+c\sqrt{-1})\,(x-c\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+b+d\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$

* $(x+a)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+d+d\sqrt{-1})(x+d-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+d)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+a)\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+b)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+c)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+c\sqrt{-1})\ (x+c-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$

* $(x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

$* (x+d)(x+c+a\surd-1)(x+c-a\surd-1)(x+b+c\surd-1)(x+b-\surd c-1)$

$* (x+d)(x+c+a\surd-1)(x+c-a\surd-1)(x+c+b\surd-1)(x+c-b\surd-1)$

$* (x+a)(x+b+b\surd-1)(x+b-b\surd-1)(x+c+d\surd-1)(x+c-d\surd-1)$

$* (x+a)(x+b+b\surd-1)(x+b-b\surd-1)(x+d+c\surd-1)(x+d-c\surd-1)$

$* (x+a)(x+b+c\surd-1)(x+b-c\surd-1)(x+b+d\surd-1)(x+b-d\surd-1)$

$* (x+a)(x+b+c\surd-1)(x+b-c\surd-1)(x+d+b\surd-1)(x+d-b\surd-1)$

$* (x+a)(x+c+b\surd-1)(x+c-b\surd-1)(x+b+d\surd-1)(x+b-d\surd-1)$

$* (x+a)(x+c+b\surd-1)(x+c-b\surd-1)(x+d+b\surd-1)(x+d-b\surd-1)$

$* (x+b)(x+a+b\surd-1)(x+a-b\surd-1)(x+c+d\surd-1)(x+c-d\surd-1)$

$* (x+b)(x+a+b\surd-1)(x+a-b\surd-1)(x+d+c\surd-1)(x+d-c\surd-1)$

$* (x+b)(x+b+a\surd-1)(x+b-a\surd-1)(x+c+d\surd-1)(x+c-d\surd-1)$

$* (x+b)(x+b+a\surd-1)(x+b-a\surd-1)(x+d+c\surd-1)(x+d-c\surd-1)$

$* (x+b)(x+a+c\surd-1)(x+a-c\surd-1)(x+b+d\surd-1)(x+b-d\surd-1)$

$* (x+b)(x+a+c\surd-1)(x+a-c\surd-1)(x+d+b\surd-1)(x+d-b\surd-1)$

$* (x+b)(x+c+a\surd-1)(x+c-a\surd-1)(x+b+d\surd-1)(x+b-d\surd-1)$

$* (x+b)(x+c+a\surd-1)(x+c-a\surd-1)(x+d+b\surd-1)(x+d-b\surd-1)$

$* (x+b)(x+a+d\surd-1)(x+a-d\surd-1)(x+b+c\surd-1)(x+b-c\surd-1)$

$* (x+b)(x+a+d\surd-1)(x+a-d\surd-1)(x+c+b\surd-1)(x+c-b\surd-1)$

$* (x+b)(x+d+a\surd-1)(x+d-a\surd-1)(x+b+c\surd-1)(x+b-c\surd-1)$

$* (x+b)(x+d+a\surd-1)(x+d-a\surd-1)(x+c+b\surd-1)(x+c-b\surd-1)$

$* (x+c)(x+a+b\surd-1)(x+a-b\surd-1)(x+b+d\surd-1)(x+b-d\surd-1)$

$* (x+c)(x+a+b\surd-1)(x+a-b\surd-1)(x+d+b\surd-1)(x+d-b\surd-1)$

$* (x+c)(x+b+a\surd-1)(x+b-a\surd-1)(x+b+d\surd-1)(x+b-d\surd-1)$

$* (x+c)(x+b+a\surd-1)(x+b-a\surd-1)(x+d+b\surd-1)(x+d-b\surd-1)$

$* (x+c)(x+a+d\surd-1)(x+a-d\surd-1)(x+b+b\surd-1)(x+b-b\surd-1)$

$* (x+c)(x+d+a\surd-1)(x+d-a\surd-1)(x+b+b\surd-1)(x+b-b\surd-1)$

$* (x+d)(x+a+b\surd-1)(x+a-b\surd-1)(x+b+c\surd-1)(x+b-c\surd-1)$

$* (x+d)(x+a+b\surd-1)(x+a-b\surd-1)(x+c+b\surd-1)(x+c-b\surd-1)$

$* (x+d)(x+b+a\surd-1)(x+b-a\surd-1)(x+b+c\surd-1)(x+b-c\surd-1)$

$* (x+d)(x+b+a\surd-1)(x+b-a\surd-1)(x+c+b\surd-1)(x+c-b\surd-1)$

$* (x+d)(x+a+c\surd-1)(x+a-c\surd-1)(x+b+b\surd-1)(x+b-b\surd-1)$

$* (x+d)(x+c+a\surd-1)(x+c-a\surd-1)(x+b+b\surd-1)(x+b-b\surd-1)$

$* (x+a)(x+a+b\surd-1)(x+a-b\surd-1)(x+c+d\surd-1)(x+c-d\surd-1)$

$* (x+a)(x+a+b\surd-1)(x+a-b\surd-1)(x+d+c\surd-1)(x+d-c\surd-1)$

$* (x+a)(x+b+a\surd-1)(x+b-a\surd-1)(x+c+d\surd-1)(x+c-d\surd-1)$

$* (x+a)$

* $(x+d)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+e+c\sqrt{-1})\ (x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+e\sqrt{-1})\ (x+c-e\sqrt{-1})$
* $(x+d)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+e+c\sqrt{-1})\ (x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+b+e\sqrt{-1})\ (x+b-e\sqrt{-1})$
* $(x+d)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+e+b\sqrt{-1})\ (x+e-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+b+e\sqrt{-1})\ (x+b-e\sqrt{-1})$
* $(x+d)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+e+b\sqrt{-1})\ (x+e-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)\ (x+a+e\sqrt{-1})\ (x+a-e\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)\ (x+a+e\sqrt{-1})\ (x+a-e\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)\ (x+e+a\sqrt{-1})\ (x+e-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+d)\ (x+e+a\sqrt{-1})\ (x+e-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+c+d\sqrt{-1})\ (x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ (x+d+c\sqrt{-1})\ (x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+a+c\sqrt{-1})\ (x+a-c\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+b+d\sqrt{-1})\ (x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ (x+d+b\sqrt{-1})\ (x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+a+d\sqrt{-1})\ (x+a-d\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})$
* $(x+e)\ (x+d+a\sqrt{-1})\ (x+d-a\sqrt{-1})\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$

L'on trouveroit de la même manière les systêmes de facteurs des formules du sixième degré, ceux des formules du septième, &c.

* $(x+a)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})(x+e+c\sqrt{-1})(x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})(x+c+e\sqrt{-1})(x+c-e\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})(x+e+c\sqrt{-1})(x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b+e\sqrt{-1})(x+b-e\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+b+e\sqrt{-1})(x+b-e\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+e+b\sqrt{-1})(x+e-b\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+a)(x+e+b\sqrt{-1})(x+e-b\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+d+e\sqrt{-1})(x+d-e\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})(x+e+d\sqrt{-1})(x+e-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+d+e\sqrt{-1})(x+d-e\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x+e+d\sqrt{-1})(x+e-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+c+e\sqrt{-1})(x+c-e\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+e+c\sqrt{-1})(x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+c+e\sqrt{-1})(x+c-e\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+e+c\sqrt{-1})(x+e-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+e\sqrt{-1})(x+a-e\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+a+e\sqrt{-1})(x+a-e\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+e+a\sqrt{-1})(x+e-a\sqrt{-1})(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1})$
* $(x+b)(x+e+a\sqrt{-1})(x+e-a\sqrt{-1})(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+d+e\sqrt{-1})(x+d-e\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+e+d\sqrt{-1})(x+e-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+d+e\sqrt{-1})(x+d-e\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x+e+d\sqrt{-1})(x+e-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+b+e\sqrt{-1})(x+b-e\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+a+d\sqrt{-1})(x+a-d\sqrt{-1})(x+e+b\sqrt{-1})(x+e-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+b+e\sqrt{-1})(x+b-e\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1})(x+e+b\sqrt{-1})(x+e-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+a+e\sqrt{-1})(x+a-e\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+a+e\sqrt{-1})(x+a-e\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+e+a\sqrt{-1})(x+e-a\sqrt{-1})(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1})$
* $(x+c)(x+e+a\sqrt{-1})(x+e-a\sqrt{-1})(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1})$
* $(x+d)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x+c+e\sqrt{-1})(x+c-e\sqrt{-1})$

$$x^2 + mx + n = \left\{ \begin{array}{l} (x + a)\,(x + a) \\ (x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1}) \\ \ast\ast\ast \\ (x + a)\,(x + b) \\ (x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1}) \\ (x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1}) \end{array} \right.$$

$$x^2 + mx - n = (x + a)\,(x - b)$$

$$x^2 - mx + n = \left\{ \begin{array}{l} (x - a)\,(x - a) \\ (x - a + a\sqrt{-1})\,(x - a - a\sqrt{-1}) \\ \ast\ast\ast \\ (x - a)\,(x - b) \\ (x - a + b\sqrt{-1})\,(x - a - b\sqrt{-1}) \\ (x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1}) \end{array} \right.$$

$$x^2 - mx - n = (x - a)\,(x + b)$$

$$x^2 + n = (x + a\sqrt{-1})\,(x - a\sqrt{-1})$$

$$x^2 - n = (x + a)\,(x - a)$$

Pour achever cette Table, lorſqu'une formule a à côté d'elle pluſieurs ſyſtèmes de facteurs, il faut aſſigner à chacun le ſyſtème de conditions qui lui appartient.

Soit $x^2 + mx + n = (x + a)\,(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$, on aura $m = 2a$, $n = a^2$; donc $m^2 - 4n = 0$.

Soit $x^2 + mx + n = (x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1}) = x^2 + 2ax + 2a^2$, on aura $m = 2a$, $n = 2a^2$; donc $m^2 - 2n = 0$.

SECOND DEGRÉ.

On aura

$(x+a)\,(x+a) = x^2 + 2ax + a^2 =$ 1.re formule.

$(x+a)\,(x-a) = x^2 - a^2 =$ 6.e

$(x-a)\,(x-a) = x^2 - 2ax + a^2 =$ 3.e

$(x+a)\,(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab =$ 1.re

$(x+a)\,(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab =$ 2.e

$(x-a)\,(x+b) = x^2 - (a-b)x - ab =$ 4.e

$(x-a)\,(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab =$ 3.e

$(x + a\sqrt{-1})\,(x - a\sqrt{-1}) = x^2 + a^2 =$ 5.e

$(x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1}) = x^2 + 2ax + 2a^2 =$ 1.re

$(x - a + a\sqrt{-1})\,(x - a - a\sqrt{-1}) = x^2 - 2ax + 2a^2 =$ 3.e

$(x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1}) = x^2 + 2ax + (a^2 + b^2) =$ 1.re

$(x - a + b\sqrt{-1})\,(x - a - b\sqrt{-1}) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) =$ 3.e

$(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1}) = x^2 + 2bx + (a^2 + b^2) =$ 1.re

$(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1}) = x^2 - 2bx + (a^2 + b^2) =$ 3.e

D'où l'on tirera la Table ſuivante.

correſpondant de la première ; on aura donc enfin la Table qui ſuit.

$$x^2 + mx + n = \begin{cases} (x+a)\,(x+a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m^2 - 4n = 0 \\ (x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1}) \ldots & m^2 - 2n = 0 \\ (x+a)\,(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m^2 - 4n > 0 \\ (x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1}) \ldots & m^2 - 4n < 0,\ m^2 - 2n > 0 \\ (x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1}) \ldots & m^2 - 2n < 0 \end{cases}$$

$$x^2 + mx - n = (x+a)\,(x-b)$$

$$x^2 - mx + n = \begin{cases} (x-a)\,(x-a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m^2 - 4n = 0 \\ (x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1}) \ldots & m^2 - 2n = 0 \\ (x-a)\,(x-b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & m^2 - 4n > 0 \\ (x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1}) \ldots & m^2 - 4n < 0,\ m^2 - 2n > 0 \\ (x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1}) \ldots & m^2 - 2n < 0 \end{cases}$$

$$x^2 - mx - n = (x-a)\,(x+b)$$

$$x^2 + n = (x+a\sqrt{-1})\,(x-a\sqrt{-1})$$

$$x^2 - n = (x+a)\,(x-a)$$

Troisième Degré.

On aura

$(x+a)\,(x+a)\,(x+a) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 =$ 1.ere formule.

$(x+a)\,(x+a)\,(x-a) = x^3 + ax^2 - a^2x - a^3 =$ 5.e

$(x+a)\,(x-a)\,(x-a) = x^3 - ax^2 - a^2x + a^3 =$ 7.e

Soit $x^2 + mx + n = (x + a)(x + b)$, si l'on suppose $b = a$, on aura $m^2 - 4n = 0$; donc, tant que b sera moindre que a, la fonction $m^2 - 4n$ sera plus grande ou moindre que 0. Pour savoir lequel des deux, je suppose $a = 2$, $b = 1$, j'aurai $m = 3$, $n = 2$, & en substituant dans la fonction $m^2 - 4n$, j'aurai $3^2 - 2^2.2 > 0$; par conséquent, la condition pour ce système-ci sera $m^2 - 4n > 0$.

Soit $x^2 + mx + n = (x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$, 1.° b devenant $= 0$, la fonction $m^2 - 4n$ devient $= 0$; donc, tant que b sera plus grand que 0, cette fonction sera plus grande ou moindre que 0, & il est évident que c'est moindre que 0 qu'elle est; car nous venons de trouver que lorsqu'elle est plus grande que 0, la formule appartient au système précédent : on aura donc pour ce système-ci $m^2 - 4n < 0$.

2.° b devenant $= a$, la fonction $m^2 - 2n$ devient $= 0$; donc, tant que b sera moindre que a, cette fonction sera plus grande ou moindre que 0, & il est évident que c'est plus grande que 0 qu'elle sera; sans quoi, la condition précédente seroit vaine: le système de conditions pour ce système de facteurs-ci est donc $m^2 - 4n < 0$, $m^2 - 2n > 0$.

Soit $x^2 + mx + n = (x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$, b devenant $= a$, la fonction $m^2 - 2n$ devient $= 0$; donc, tant que b est moindre que a, cette fonction est plus grande ou moindre que 0, & il est aisé de voir, que pour distinguer ce système-ci du précédent, il faut que $m^2 - 2n$ soit < 0.

Les conditions pour chaque système de facteurs de la troisième formule, sont les mêmes que celles pour le système

$(x + a)(x + b)(x - c) = x^3 + (a + b - c)x^2 +$
$(ab - ac - bc)x - abc =$ 2.e ou 5.e ou 10.^{e}

$(x + a)(x - b)(x + c) = x^3 + (a - b + c)x^2 -$
$(ab - ac + bc)x - abc =$ 5.^{e}

$(x - a)(x + b)(x + c) = x^3 + (-a + b + c)x^2 -$
$(ab + ac - bc)x - abc =$ 5.e ou 8.e ou 10.^{e}

$(x + a)(x - b)(x - c) = x^3 + (a - b - c)x^2 -$
$(ab + ac - bc)x + abc =$ 3.^{e} ou 7.^{e} ou 15.^{e}

$(x - a)(x + b)(x - c) = x^3 - (a - b + c)x^2 -$
$(ab - ac + bc)x + abc =$ 7.^{e}

$(x - a)(x - b)(x + c) = x^3 - (a + b - c)x^2 +$
$(ab - ac - bc)x + abc =$ 4.^{e} ou 7.^{e} ou 11.^{e}

$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 +$
$(ab + ac + bc)x - abc =$ 6.^{e}

$(x + a)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1}) = x^3 +$
$ax^2 + a^2x + a^3 =$ 1.re

$(x - a)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1}) = x^3 -$
$ax^2 + a^2x - a^3 =$ 6.^{e}

$(x + a)(x + b\sqrt{-1})(x - b\sqrt{-1}) = x^3 +$
$ax^2 + b^2x + ab^2 =$ 1.re

$(x - a)(x + b\sqrt{-1})(x - b\sqrt{-1}) = x^3 -$
$ax^2 + b^2x - ab^2 =$ 6.^{e}

$(x + b)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1}) = x^3 +$
$bx^2 + a^2x + a^2b =$ 1.re

$(x - b)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1}) = x^3 -$
$bx^2 + a^2x - a^2b =$ 6.^{e}

$(x + a)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1}) =$
$x^3 + 3ax^2 + 4a^2x + 2a^3 =$ 1.re

$(x-a)(x-a)(x-a) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 =$ 6.e

$(x+a)(x+b)(x+b) = x^3 + (a+2b)x^2 + (2ab+b^2)x + ab^2 =$ 1.re

$(x+a)(x+b)(x-b) = x^3 + ax^2 - b^2x - ab^2 =$ 5.e

$(x-a)(x+b)(x+b) = x^3 + (-a+2b)x^2 - (2ab-b^2)x - ab^2 =$ 5.e ou 8.e ou 16.e

$(x+a)(x-b)(x-b) = x^3 + (a-2b)x^2 - (2ab-b^2)x + ab^2 =$ 3.e ou 7.e ou 15.e

$(x-a)(x+b)(x-b) = x^3 - ax^2 - b^2x + ab^2 =$ 7.e

$(x-a)(x-b)(x-b) = x^3 - (a+2b)x^2 + (2ab+b^2)x - ab^2 =$ 6.e

$(x+a)(x+a)(x+b) = x^3 + (2a+b)x^2 + (a^2+2ab)x + ab^2 =$ 1.ere

$(x+a)(x+a)(x-b) = x^3 + (2a-b)x^2 + (a^2-2ab)x - a^2b =$ 2.e ou 5.e ou 10.e

$(x+a)(x-a)(x+b) = x^3 + bx^2 - a^2x - a^2b =$ 5.e

$(x+a)(x-a)(x-b) = x^3 - bx^2 - a^2x + a^2b =$ 7.e

$(x-a)(x-a)(x+b) = x^3 - (2a-b)x^2 + (a^2-2ab)x + a^2b =$ 4.e ou 7.e ou 11.e

$(x-a)(x-a)(x-b) = x^3 - (2a+b)x^2 + (a^2+2ab)x - a^2b =$ 6.e

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc =$ 1.ere

$(x+a)$

$(x+a)(x+b)(x-c) = x^3 + (a+b-c)x^2 + (ab-ac-bc)x - abc$ = 2.^{e} ou 5.^{e} ou 10.^{e}

$(x+a)(x-b)(x+c) = x^3 + (a-b+c)x^2 - (ab-ac+bc)x - abc$ = 5.^{e}

$(x-a)(x+b)(x+c) = x^3 + (-a+b+c)x^2 - (ab+ac-bc)x - abc$ = 5.^{e} ou 8.^{e} ou 10.^{e}

$(x+a)(x-b)(x-c) = x^3 + (a-b-c)x^2 - (ab+ac-bc)x + abc$ = 3.^{e} ou 7.^{e} ou 15.^{e}

$(x-a)(x+b)(x-c) = x^3 - (a-b+c)x^2 - (ab-ac+bc)x + abc$ = 7.^{e}

$(x-a)(x-b)(x+c) = x^3 - (a+b-c)x^2 + (ab-ac-bc)x + abc$ = 4.^{e} ou 7.^{e} ou 11.^{e}

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$ = 6.^{e}

$(x+a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$ = 1.re

$(x-a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3$ = 6.^{e}

$(x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1}) = x^3 + ax^2 + b^2x + ab^2$ = 1.re

$(x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1}) = x^3 - ax^2 + b^2x - ab^2$ = 6.^{e}

$(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) = x^3 + bx^2 + a^2x + a^2b$ = 1.re

$(x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) = x^3 - bx^2 + a^2x - a^2b$ = 6.^{e}

$(x+a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) = x^3 + 3ax^2 + 4a^2x + 2a^3$ = 1.re

$(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) = x^3 - ax^2 + 2a^3 =$ 11.e

$(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) = x^3 + ax^2 - 2a^3 =$ 10.e

$(x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) = x^3 - 3ax^2 + 4a^2x - 2a^3 =$ 6.e

$(x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1}) = x^3 + (a+2b)x^2 + (2ab+2b^2)x + 2ab^2 =$ 1.re

$(x+a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) = x^3 + (a-2b)x^2 - (2ab-2b^2)x + 2ab^2 =$ 3.e ou 7.e ou 15.e

$(x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1} = x^3 + (-a+2b)x^2 - (2ab-2b^2)x - 2ab^2 =$ 5.e ou 8.e ou 16.e

$(x-a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) = x^3 - (a+2b)x^2 + (2ab+2b^2)x - 2ab^2 =$ 6.e

$(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) = x^3 + (2a+b)x^2 + (a^2+2ab+b^2)x + b(a^2+b^2) =$ 1.re

$(x+b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) = x^3 - (2a-b)x^2 + (a^2-2ab+b^2)x + b(a^2+b^2) =$ 4.e

$(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) = x^3 + (2a-b)x^2 + (a^2-2ab+b^2)x - b(a^2+b^2) =$ 2.e

$(x-b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) = x^3 - (2a+b)x^2 + (a^2+2ab+b^2)x - b(a^2+b^2) =$ 6.e

$$(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) = x^3 + 3bx^2 + (a^2+3b^2)x + b(a^2+b^2) = 1.^{ere}$$

$$(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) = x^3 - bx^2 + (a^2-b^2)x + b(a^2+b^2) = 4.^e$$

$$(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) = x^3 + bx^2 + (a^2-b^2)x - b(a^2+b^2) = 2.^e$$

$$(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) = x^3 - 3bx^2 + (a^2+3b^2)x - b(a^2+b^2) = 6.^e$$

$$(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) = x^3 + 3ax^2 + (3a^2+b^2)x + a(a^2+b^2) = 1.^{ere}$$

$$(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) = x^3 - ax^2 - (a^2-b^2)x + a(a^2+b^2) = 7.^e$$

$$(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) = x^3 + ax^2 - (a^2-b^2)x - a(a^2+b^2) = 5.^e$$

$$(x-a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) = x^3 - 3ax^2 + (3a^2+b^2)x - a(a^2+b^2) = 6.^e$$

$$(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) = x^3 + (2b+a)x^2 + (a+b)^2x + a(a^2+b^2) = 1.^{ere}$$

$$(x+a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) = x^3 + (a-2b)x^2 + (a-b)^2x + a(a^2+b^2) = 1.^{ere} \text{ ou } 4.^e \text{ ou } 13.^e$$

$$(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) = x^3 + (2b-a)x^2 + (a-b)^2x - a(a^2+b^2) = 2.^e \text{ ou } 6.^e \text{ ou } 14.^e$$

$$(x-a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) = x^3 - (a+2b)x^2 + (a+b)^2x - a(a^2+b^2) = 6.^e$$

$(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) = x^3+(2a+b)x^2+(2a^2+2ab)x+2a^2b =$ 1.ere

$(x+b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) = x^3-(2a-b)x^2+(2a^2-2ab)x+2a^2b =$ 4.e

$(x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) = x^3+(2a-b)x^2+(2a^2-2ab)x-2a^2b =$ 2.e

$(x-b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) = x^3-(2a+b)x^2+(2a^2+2ab)x-2a^2b =$ 6.e

$(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) = x^3+(a+2b)x^2+(2ab+b^2+c^2)x+a(b^2+c^2) =$ 1.ere

$(x+a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) = x^3+(a-2b)x^2-(2ab-b^2-c^2)x+a(b^2+c^2) =$ 3.e ou 7.e ou 15.e

$(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) = x^3+(-a+2b)x^2-(2ab-b^2-c^2)x-a(b^2+c^2) =$ 5.e ou 8.e ou 16.e

$(x-a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) = x^3-(a+2b)x^2+(2ab+b^2+c^2)x-a(b^2+c^2) =$ 6.e

$(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) = x^3+(a+2c)x^2+(2ac+b^2+c^2)x+a(b^2+c^2) =$ 1.ere

$(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) =$

$x^3 + (a - 2c)x^2 + (-2ac + b^2 + c^2)x + a(b^2 + c^2) =$ 1.ere ou 3.e ou 9.e ou 4.e ou 7.e ou 11.e ou 13.e ou 15.e ou 17.e

$(x - a)(x + c + b\sqrt{-1})(x + c - b\sqrt{-1}) = x^3 + (-a + 2c)x^2 + (-2ac + b^2 + c^2)x - a(b^2 + c^2) =$ 2.e ou 5.e ou 10.e ou 6.e ou 8.e ou 12.e ou 14.e ou 16.e ou 18.e

$(x - a)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1}) = x^3 - (a + 2c)x^2 + (2ac + b^2 + c^2)x - a(b^2 + c^2) =$ 6.e

$(x + b)(x + a + c\sqrt{-1})(x + a - c\sqrt{-1}) = x^3 + (2a + b)x^2 + (2ab + b^2 + c^2)x + b(a^2 + c^2) =$ 1.ere

$(x + b)(x - a + c\sqrt{-1})(x - a - c\sqrt{-1}) = x^3 - (2a - b)x^2 + (a^2 - 2ab + c^2)x + b(a^2 + c^2) =$ 4.e ou 7.e ou 11.e

$(x - b)(x + a + c\sqrt{-1})(x + a - c\sqrt{-1}) = x^3 + (2a - b)x^2 + (a^2 - 2ab + c^2)x - b(a^2 + c^2) =$ 2.e ou 5.e ou 10.e

$(x - b)(x - a + c\sqrt{-1})(x - a - c\sqrt{-1}) = x^3 - (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab + c^2)x - b(a^2 + c^2) =$ 6.e

$(x + b)(x + c + a\sqrt{-1})(x + c - a\sqrt{-1}) = x^3 + (2c + b)x^2 + (a^2 + 2bc + c^2)x + b(a^2 + c^2) =$ 1.ere

$(x + b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1}) = x^3 + (b - 2c)x^2 + (a^2 - 2bc + c^2)x + b(a^2 + c^2) =$ 1.ere ou 4.e ou 13.e

$(x - b)(x + c + a\sqrt{-1})(x + c - a\sqrt{-1}) =$
$x^3 + (-b + 2c)x^2 + (a^2 - 2bc + c^2)x -$
$b(a^2 + c^2) =$ 2.^{e} ou 6.^{e} ou 14.^{e}

$(x - b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1}) =$
$x^3 - (b + 2c)x^2 + (a^2 + 2bc + c^2)x -$
$b(a^2 + c^2) =$ 6.^{e}

$(x + c)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1}) =$
$x^3 + (2a + c)x^2 + (a^2 + 2ac + b^2)x +$
$c(a^2 + b^2) =$ 1.ere

$(x + c)(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1}) =$
$x^3 - (2a - c)x^2 + (a^2 - 2ac + b^2)x +$
$c(a^2 + b^2) =$ 4.^{e}

$(x - c)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1}) =$
$x^3 + (2a - c)x^2 + (a^2 - 2ac + b^2)x -$
$c(a^2 + b^2) =$ 2.^{e}

$(x - c)(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1}) =$
$x^3 - (2a + c)x^2 + (a^2 + 2ac + b^2)x -$
$c(a^2 + b^2) =$ 6.^{e}

$(x + c)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1}) =$
$x^3 + (2b + c)x^2 + (a^2 + 2bc + b^2)x +$
$c(a^2 + b^2) =$ 1.ere

$(x + c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1}) =$
$x^3 - (2b - c)x^2 + (a^2 - 2bc + b^2)x +$
$c(a^2 + b^2) =$ 4.^{e}

$(x - c)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1}) =$
$x^3 + (2b - c)x^2 + (a^2 - 2bc + b^2)x -$
$c(a^2 + b^2) =$ 2.^{e}

$$(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) = x^3-(2b+c)x^2+(a^2+2bc+b^2)x-c(a^2+b^2) = 6.^e$$

Par conséquent, on aura la Table qui suit.

$$x^3+mx^2+nx+p=\left\{\begin{array}{l}
(x+a)(x+a)(x+a)\\
(x+a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})\\
(x+a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})\\
(x+a)(x+b)(x+b)\\
(x+a)(x+a)(x+b)\\
(x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})\\
(x+b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})\\
(x+a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})\\
(x+b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})\\
(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})\\
(x+a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\\
(x+a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})\\
(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\\
(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})\\
\\
(x+a)(x+b)(x+c)\\
(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})\\
(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})\\
(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})\\
(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})\\
(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})\\
(x+b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})\\
(x+c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})\\
(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})
\end{array}\right.$$

$$x^3+mx^2+nx-p=\left\{\begin{array}{l}
(x+a)\,(x+a)\,(x-b)\\
(x-b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\\
(x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\\
(x-b)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\\
(x-b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})\\
\\
(x+a)\,(x+b)\,(x-c)\\
(x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})\\
(x-b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1})\\
(x-b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1})\\
(x-c)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\\
(x-c)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})
\end{array}\right.$$

$$x^3+mx^2-nx+p=\left\{\begin{array}{l}
(x+a)\,(x-b)\,(x-b)\\
(x+a)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1})\\
\\
(x+a)\,(x-b)\,(x-c)\\
(x+a)\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1})\\
(x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})
\end{array}\right.$$

$$x^3-mx^2+nx+p=\left\{\begin{array}{l}
(x-a)\,(x-a)\,(x+b)\\
(x+b)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})\\
(x+a)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\\
(x+b)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})\\
(x+b)\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1})\\
\\
(x-a)\,(x-b)\,(x+c)\\
(x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})\\
(x+b)\,(x-a+c\sqrt{-1})\,(x-a-c\sqrt{-1})\\
(x+b)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1})\\
(x+c)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1})\\
(x+c)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1})
\end{array}\right.$$

x^3+

$$x^3 + mx^2 - nx - p = \left\{ \begin{array}{l} (x+a)(x+a)(x-a) \\ (x+a)(x+b)(x-b) \\ (x+a)(x-a)(x+b) \\ (x-a)(x+b)(x+b) \\ (x+a)(x+a)(x-b) \\ (x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) \\ \text{✠} \\ (x+a)(x+b)(x-c) \\ (x+a)(x-b)(x+c) \\ (x-a)(x+b)(x+c) \\ (x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1}) \end{array} \right.$$

$$x^3 - mx^2 + nx - p = \left\{ \begin{array}{l} (x-a)(x-a)(x-a) \\ (x-a)(x+a\sqrt{-1})(x+a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-b)(x-b) \\ (x-a)(x-a)(x-b) \\ (x-a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ \text{✠} \\ (x-a)(x-b)(x-c) \\ (x-a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1}) \\ (x-c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ (x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \end{array} \right.$$

$$x^3 - mx^2 - nx + p = \left\{ \begin{array}{l} (x+a)\,(x-a)\,(x-a) \\ (x+a)\,(x-b)\,(x-b) \\ (x+b)\,(x-a)\,(x-a) \\ (x-a)\,(x-b)\,(x+b) \\ (x+a)\,(x-a)\,(x-b) \\ (x+a)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)\,(x-a+b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1}), \\ (x+a)\,(x-b)\,(x-c) \\ (x-a)\,(x+b)\,(x-c) \\ (x-a)\,(x-b)\,(x+c) \\ (x+a)\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)\,(x-a+c\sqrt{-1})\,(x-a-c\sqrt{-1}). \end{array} \right.$$

$$x^3 - mx^2 - nx - p = \left\{ \begin{array}{l} (x-a)\,(x+b)\,(x+b) \\ (x-a)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1}), \\ (x-a)(x+b)\,(x+c) \\ (x-a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) \end{array} \right.$$

$$x^3 + mx^2 + p = (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}).$$

$$x^3 + mx^2 - p = \left\{ \begin{array}{l} (x-a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)\,(x+a)\,(x-b) \\ (x+a)\,(x+b)\,(x-c) \\ (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1}). \end{array} \right.$$

$$x^3 - mx^2 + p = \begin{cases} (x+a)\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)\,(x-a)\,(x+b) \\ \text{ou} \\ (x-a)\,(x-b)\,(x+c) \\ (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)\,(x-a+c\sqrt{-1})\,(x-a-c\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 - mx^2 - p = (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$$

$$x^3 + nx + p = \begin{cases} (x+a)\,(x-b+a\sqrt{-1})\,(x-b-a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)\,(x-c+a\sqrt{-1})\,(x-c-a\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 - nx + p = \begin{cases} (x+a)\,(x-b)\,(x-b) \\ (x+a)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x+a)\,(x-b)\,(x-c) \\ (x+a)\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 + nx - p = \begin{cases} (x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)\,(x+c+a\sqrt{-1})\,(x+c-a\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 - nx - p = \begin{cases} (x-a)\,(x+b)\,(x+b) \\ (x-a)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x-a)\,(x+b)\,(x+c) \\ (x-a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^3 + p = (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})$$

$$x^3 - p = (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$$

Il faut assigner à chaque système de facteurs le système de conditions qui lui appartient.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + a)(x + a)$, on aura $3a = m$, $3a^2 = n$ & $a^3 = p$; donc $m^2 - 3n = 0$, & $m^3 - 27p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$, on aura $a = m$, $a^2 = n$, & $a^3 = p$; donc $m^2 - n = 0$, $m^3 - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{+1})$, on aura $3a = m$, $4a^2 = n$, & $2a^3 = p$; donc $4m^2 - 9n = 0$, $2m^3 - 27p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + b)(x + b)$, on aura $a + 2b = m$, $2ab + b^2 = n$ & $ab^2 = p$; donc $a = m - 2b$; donc $2mb - 3b^2 = n$, & $mb^2 - 2b^3 = p$; donc $b^2 = \frac{2mb - n}{3}$ & $b^2 = \frac{p}{m - 2b}$; donc $\frac{2mb - n}{3} = \frac{p}{m - 2b}$; donc $b^2 = \frac{2m^2b + 2nb - mn - 3p}{4m}$; donc $\frac{2mb - n}{3} = \frac{2m^2b + 2nb - mn - 3p}{4m}$; donc $b = \frac{mn - 9p}{2(m^2 - 3n)}$; mais $b = \frac{n}{2m - 3b}$; donc $\frac{mn - 9p}{2(m^2 - 3n)} = \frac{n}{2m - 3b}$; donc $b = \frac{2(-3mp + n^2)}{mn - 9p}$; donc $4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + a)(x + b)$, on aura $4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 = 0$, comme pour le système précédent.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + b\sqrt{-1})(x - b\sqrt{-1})$; donc $a = m$, $b^2 = n$, & $ab^2 = p$; donc $mn - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^3 + nx + p = (x + b)(x + a\sqrt{-1})$ $(x - a\sqrt{-1})$, on aura $mn - p = 0$, comme pour le ſyſtème précédent.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)$ $(x + b + b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})$, on aura $a + 2b = m$, $2ab + b^2 = n$, & $2ab^2 = p$; donc $a = m - 2b$; donc $2mb - 2b^2 = n$, & $2mb^2 - 4b^3 = p$; donc $b^2 = \frac{2mb - n}{2}$, & $b^2 = \frac{p}{2m - 4b}$; donc $2mb - n = \frac{p}{m - 2b}$; donc $b^2 = \frac{2m^2b + 2nb - mn - p}{4m}$; donc $2mb - n = \frac{2m^2b + 2nb - mn - p}{2m}$; donc $b = \frac{mn - p}{2(m^2 - n)}$; mais $b = \frac{n}{2m - 2b}$; donc $\frac{mn - p}{m^2 - n} = \frac{n}{m - b}$; donc $b = \frac{-mp + n^2}{mn - p}$; donc enfin $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + b)(x + a + a\sqrt{-1})$ $(x + a - a\sqrt{-1})$, on aura $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$, comme pour le ſyſtème précédent.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + b)(x + a + b\sqrt{-1})$ $(x + a - b\sqrt{-1})$, on aura $2a + b = m$, $a + b = n^{\frac{1}{2}}$ & $b(a^2 + b^2) = p$; donc $a = m - n^{\frac{1}{2}}$ & $b = 2n^{\frac{1}{2}} - m$; donc $(2n^{\frac{1}{2}} - m)(2m^2 - 6mn^{\frac{1}{2}} + 5n) = p$, ou $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x + b + a\sqrt{-1})$ $(x + b - a\sqrt{-1})$, on aura $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$, comme pour le ſyſtème précédent.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)(x - b + a\sqrt{-1})$ $(x - b - a\sqrt{-1})$, on aura $a - 2b = m$, $a - b = n^{\frac{1}{2}}$

& $a(a^2 + b^2) = p$; donc $b = n^{\frac{1}{2}} - m$ & $a = 2n^{\frac{1}{2}} - m$; donc $100\,n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17\,mn + p)^2 = 0$, comme pour les deux ſyſtèmes précédens.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + b)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$, on aura $3\,b = m$, $a^2 + 3\,b^2 = n$ & $b(a^2 + b^2) = p$; donc $2m^3 - 9\,mn + 27\,p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + a)\,(x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1})$, on aura $2\,m^3 - 9\,mn + 27\,p = 0$, comme pour le ſyſtème précédent.

Les deux ſyſtèmes $\left\{\begin{matrix} (x+a)\;(x+b)\;(x+b) \\ (x+a)\;(x+a)\;(x+b) \end{matrix}\right\}$ ſont diſtingués de tous ceux de leur formule par la condition $4\,(m^2 - 3\,n)\,(-3\,mp + n^2) - (mn - 9\,p)^2 = 0$; mais il faut les diſtinguer l'un de l'autre, c'eſt-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de m, de n & de p, la plus ſimple poſſible, qui ſoit toûjours plus grande que 0 dans l'un, & toûjours moindre que 0 dans l'autre.

Cette fonction ſera $= 0$, dans le cas $(x + a)\,(x + a)\,(x + a)$ commun aux deux ſyſtèmes.

La ſuite des fonctions de m, de n & de p, parmi leſquelles doit néceſſairement ſe trouver celle dont il s'agit, eſt

$Am^2 + Bn$,

$Am^3 + Bmn + Cp$,

$Am^4 + Bm^2n + Cmp + Dn^2$,

$Am^5 + Bm^3n + Cm^2p + Dmn^2 + Enp$,

$Am^6 + Bm^4n + Cm^3p + Dm^2n^2 + Emnp + Fn^3 + Gp^2$,

&c.

Soit $am^2 + Bn$ la fonction qu'il faut trouver, ſi on y ſubſtitue $3\,a$ au lieu de m, & $3\,a^2$ au lieu de n, elle doit être $= 0$; on aura donc $3\,A + B = 0$.

Si on y substitue $a + 2b$ au lieu de m, & $2ab + b^2$ au lieu de n, ou, en faisant $a = b + \beta$, si on y substitue $3b + \beta$ au lieu de m, & $3b^2 + 2\beta b$ au lieu de n, elle doit être plus grande que o; on aura donc

$$\begin{array}{lll} +9Ab^2 & +6A\beta b & +A\beta^2 > 0; \\ +3B & +2B & \end{array}$$

donc $A > 0$.

Si on y substitue $2a + b$ au lieu de m, & $a^2 + 2ab$ au lieu de n, ou, en faisant $a = b + \beta$, si on y substitue $3b + 2\beta$ au lieu de m, & $3b^2 + 4\beta b + \beta^2$, au lieu de n, elle doit être moindre que o; on aura donc

$$\begin{array}{lll} +9Ab^2 & +12A\beta b & +4A\beta^2 < 0; \\ +3B & +4B & +B \end{array}$$

donc $4A + B < 0$, ou (en mettant pour B sa valeur $-3A$) $4A - 3A < 0$, ou $A < 0$; par conséquent, la fonction $Am^2 + Bn$ ne contient pas celle que nous cherchons.

Essayons la suivante $Am^3 + Bmn + Cp$.

En y substituant $3a$ au lieu de m, $3a^2$ au lieu de n, & a^3 au lieu de p, elle doit être $=$ o; on aura donc $27A + 9B + C = 0$.

En y substituant $3b + \beta$ au lieu de m, $3b^2 + 2\beta b$ au lieu de n, & $b^3 + \beta b^2$ au lieu de p, elle doit être plus grande que o; on aura donc

$$\begin{array}{llll} +27Ab^3 & +27A\beta b^2 & +9A\beta^2 b & +A\beta^3 > 0; \\ +9B & +9b & +2B & \\ +C & +C & & \end{array}$$

donc $A > 0$, & $9A + 2B > 0$.

En y substituant $3b + 2\beta$ au lieu de m, $3b^2 + 4\beta b + \beta^2$ au lieu de n, & $b^3 + 2\beta b^2 + \beta^2 b$ au

lieu de p, elle doit être moindre que o; on aura donc

$$\begin{array}{llll} +27Ab^3 & +54A\mathfrak{C}b^2 & +36A\mathfrak{C}^2b & +8A\mathfrak{C}^3 < 0; \\ +9B & +18B & +11B & +2B \\ +C & +2C & +C & \end{array}$$

donc $8A + 2B < 0$, & $36A + 11B + C < 0$, ou (en mettant pour C sa valeur $-27A - 9B$) $9A + 2B < 0$.

De ce que $9A + 2B$ est > 0 & < 0, je conclus que $9A + 2B = 0$, ou que $B = -\frac{9}{2}A$. Soit $A = 2$, on aura $B = -9$, $C = 27$, & toutes les conditions seront remplies. Par conséquent, la condition pour le système $(x+a)(x+b)(x+b)$ est $2m^3 - 9mn + 27p > 0$; celle pour le système $(x+a)(x+a)(x+b)$ est $2m^3 - 9mn + 27p < 0$.

Les deux systèmes $\left\{\begin{array}{l}(x+a)\ (x+b\sqrt{-1})\ (x-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)\ (x+a\sqrt{-1})\ (x-a\sqrt{-1})\end{array}\right\}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $mn - p = 0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre, c'est-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de m, de n & de p, qui soit $= 0$ dans le cas $(x+a)(x+a\sqrt{-1})(x-a\sqrt{-1})$ commun aux deux systèmes, qui soit plus grande que o dans le premier, & moindre que o dans le second.

Soit $Am^2 + Bn$ cette fonction; en y substituant a au lieu de m, & a^2 au lieu de n, elle sera $= 0$; on aura donc $A + B = 0$.

En y substituant a ou $b + \mathfrak{C}$ au lieu de m, & b^2 au lieu de n, elle sera plus grande que o; on aura donc

$$\begin{array}{lll} +Ab^2 & +2A\mathfrak{C}b & +A\mathfrak{C}^2 > 0; \text{ donc } A > 0. \\ +B & & \end{array}$$

En

En y substituant b au lieu de m, & a^2 ou $b^2 + 2\beta b + \beta^2$ au lieu de n, elle sera moindre que 0 ; on aura donc

$$\begin{array}{l} + Ab^2 + 2B\beta b + B\beta^2 < 0 \text{ ; donc } B < 0. \\ + B \end{array}$$

Soit $A = 1$, on aura $B = -1$, & toutes les conditions seront remplies ; par conséquent, la condition pour le premier système est $m^2 - n > 0$; celle pour le second est $m^2 - n < 0$.

Les deux systèmes $\left\{ \begin{array}{l} (x+a)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1}) \end{array} \right.$ sont distingués de tous ceux de leur formule, par la condition $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre, c'est-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de m, de n & de p, la plus simple possible, qui soit plus grande que 0 dans le premier, & moindre que 0 dans le second ; cette fonction sera $= 0$ dans le cas $(x+a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$ commun aux deux systèmes.

Je suppose que $Am^2 + Bn$ est la fonction dont il s'agit. En y substituant $3a$ au lieu de m, & $4a^2$ au lieu de n, elle sera $= 0$; on aura donc $9A + 4B = 0$.

En y substituant $a + 2b$ ou $3b + \beta$ au lieu de m, $2ab + 2b^2$ ou $4b^2 + 2\beta b$ au lieu de n, elle sera plus grande que 0 ; on aura donc

$$\begin{array}{l} + 9Ab^2 + 6A\beta b + A\beta^2 > 0 \text{ ;} \\ + 4B \quad\;\; + 2B \end{array}$$

donc $A > 0$, $3A + B > 0$.

En y substituant $2a + b$ ou $3b + 2\beta$ au lieu de m, $2a^2 + 2ab$ ou $4b^2 + 6\beta b + 2\beta^2$ au lieu de n, elle sera moindre que 0 ; on aura donc

$$\begin{array}{l} + 9Ab^2 + 12A\beta b + 4A\beta^2 < 0 \text{ ; donc } 2A + B < 0. \\ + 4B \quad\;\; + 6B \quad\;\;\; + 2B \end{array}$$

Soit $A = 4$, on aura $B = -9$, & toutes les conditions feront remplies; par conféquent, la condition pour le premier fyftème eft $4m^2 - 9n > 0$; celle pour le fecond eft $4m^2 - 9n < 0$.

$$\text{Les trois fyftèmes} \begin{cases} (x+b)\ (x+a+b\sqrt{-1})\ (x+a-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$$

font diftingués de tous ceux de leur formule, par la condition $100n(m^2+n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$; mais il faut les diftinguer entr'eux.

Les deux premiers ont un cas commun $(x+a)$ $(x+a+a\sqrt{-1})$ $(x+a-a\sqrt{-1})$, & dès-lors on peut les diftinguer l'un de l'autre par la méthode précédente.

Soit $Am^2 + Bn$ la fonction qui eft plus grande que 0 dans le premier, & moindre que 0 dans le fecond; en y fubftituant $3a$ au lieu de m, & $4a^2$ au lieu de n, j'aurai $9A + 4B = 0$.

En y fubftituant $3b + 2\mathfrak{C}$ au lieu de m, & $4b^2 + 4\mathfrak{C}b + \mathfrak{C}^2$ au lieu de n, j'aurai $\begin{matrix} +9Ab^2 & +12A\mathfrak{C}b & +4A\mathfrak{C}^2 \\ +4B & +4B & +B \end{matrix} > 0$; donc $4A + B > 0$, & $3A + B > 0$.

En y fubftituant $3b + \mathfrak{C}$ au lieu de m, & $4b^2 + 4\mathfrak{C}b + \mathfrak{C}^2$ au lieu de n, j'aurai $\begin{matrix} +9Ab^2 & +6A\mathfrak{C}b & +A\mathfrak{C}^2 \\ +4B & +4B & +B \end{matrix} < 0$; donc $A + B < 0$, & $3A + 2B < 0$.

Soit $A = 4$, on aura $B = -9$, & toutes les conditions feront remplies.

Par conféquent, pour le premier fyftème, on aura $4m^2 - 9n > 0$, & pour le fecond, on aura $4m^2 - 9n < 0$.

Les deux derniers ont un cas commun $(x + a)$ $(x + a\sqrt{-1})$ $(x - a\sqrt{-1})$, & peuvent par conséquent être distingués l'un de l'autre.

Soit $Am^2 + Bn$ la fonction qui est plus grande que o dans le premier, & moindre que o dans le second; en y substituant a au lieu de m, & a^2 au lieu de n, on aura $A + B = 0$.

En y substituant $3b + \beta$ au lieu de m, & $4b^2 + 4\beta b + \beta^2$ au lieu de n, on aura

$$\begin{array}{llll} + 9Ab^2 & + 6A\beta b & + A\beta^2 & > 0; \\ + 4B & + 4B & + B & \end{array}$$

donc $9A + 4B > 0$, & $3A + 2B > 0$.

En y substituant $-b + \beta$ au lieu de m, & β^2 au lieu de n, ou, en faisant $\beta = b + \gamma$, en y substituant γ au lieu de m, & $b^2 + 2\gamma b + \gamma^2$ au lieu de n, on aura

$$\begin{array}{llll} + A\gamma^2 & + 2B\gamma b & + Bb^2 & < 0; \\ + B & & & \end{array}$$

donc $B < 0$.

Soit $B = -1$, on aura $A = 1$, & toutes les conditions seront remplies.

Par conséquent, pour ce système-ci,

$$(x + a)\ (x + b + a\sqrt{-1})\ (x + b - a\sqrt{-1}),$$

on aura $m^2 - n > 0$; & pour celui-ci,

$$(x + a)\ (x - b + a\sqrt{-1})\ (x - b - a\sqrt{-1}),$$

on aura $m^2 - n < 0$.

Les deux systèmes $\left\{ \begin{array}{l} (x + b)\ (x + b + a\sqrt{-1})\ (x + b - a\sqrt{-1}) \\ (x + a)\ (x + a + b\sqrt{-1})\ (x + a - b\sqrt{-1}) \end{array} \right.$ sont distingués de tous les autres par la condition $2m^3 - 9mn + 27p = 0$. Il faut les distinguer l'un de l'autre; je trouve $4m^2 - 9n < 0$ pour le premier, & $4m^2 - 9n > 0$ pour le second.

En rassemblant tout ce que nous venons de trouver, on aura la Table qui suit.

Le ſyſtème $(x+a)(x+b)(x+c)$ peut devenir $(x+a)(x+b)(x+b)$ en faiſant $c=b$; auquel cas, on auroit $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0$, & $2m^3-9mn+27p>0$.

Il peut devenir $(x+a)(x+a)(x+b)$ en faiſant $a=b$; auquel cas, on auroit $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0$, & $2m^3-9mn+27p<0$.

Donc tant que c ſera $<b$ & $a>b$, cette fonction-ci $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2$ ſera plus grande ou moindre que 0. Je ne ſais pas lequel des deux; mais je le ſaurai bien-tôt, & celle-ci $2m^3-9mn+27p$ ſera tantôt plus grande & tantôt moindre que 0.

Soit $c=1$, $b=2$, $a=3$, on aura $m=2.3$, $n=11$, $p=2.3$; & en ſubſtituant dans la fonction $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2$, on aura $2^2(2^2.3^2-3.11)(-3.2.3.2.3+(11)^2)-(2.3.11-3^2.2.3)^2$, ou $2^2.3(2^2.3-11)(-2^2.3^3+(11)^2)-2^2.3^2(11-3^2)^2$, ou $2^2.3(13-3.2^2)>0$.

La condition pour ce ſyſtème-ci $(x+a)(x+b)(x+c)$ ſera donc $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2>0$.

Le ſyſtème $(x+a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+a)(x+b)(x+b)$ en faiſant $c=0$; auquel cas, on auroit $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0$, & $2m^3-9mn+27p>0$; donc, tant que c ſera plus grand que 0, la fonction $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2$ ſera plus grande ou moindre que 0; & il eſt évident que c'eſt moindre que 0 qu'elle ſera, puiſque lorſqu'elle eſt plus grande que 0, la formule appartient au ſyſtème précédent; ainſi

on aura $4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 < 0$.

2.° Il peut devenir $(x + a)(x + b + b\sqrt{-1})$ $(x + b - b\sqrt{-1})$ en faisant $c = b$; auquel cas, on auroit $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$, & $4m^2 - 9n > 0$; donc, tant que c sera moindre que b, cette fonction-ci $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2$ sera plus grande ou moindre que o. Pour savoir lequel des deux, soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 3$, on aura $m = 7$, $n = 17$, $p = 3.5$; & en substituant dans la fonction, on aura $2(7^2 - 17)(-7.3.5 + (17)^2) - (7.17 - 3.5)^2$ ou $2.2^5.2^3.23 - 2^6.(13)^2$, ou $2^6(2^3.23 - (13)^2) > 0$; ainsi on aura $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 > 0$.

3.° Il peut devenir $(x + a)(x + a + b\sqrt{-1})$ $(x + a - b\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $2m^3 - 9mn + 27p = 0$, & $4m^2 - 9n > 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, la fonction $2m^3 - 9mn + 27p$ sera plus grande ou moindre que o; nous avons déjà trouvé $2m^3 - 9mu + 27p > 0$.

Le système de conditions du système de facteurs $(x + a)(x + b + c\sqrt{-1})(x + b - c\sqrt{-1})$ est donc $4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 < 0$, $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - 9p)^2 > 0$, $2m^3 - 9mn + 27p > 0$, $4m^2 - 9n > 0$.

Le système $(x + a)(x + c + b\sqrt{-1})(x + c - b\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x + b\sqrt{-1})(x - b\sqrt{-1})$ en faisant $c = 0$; auquel cas, on auroit $mn - p = 0$, & $m^2 - n > 0$; donc, tant que c sera plus grand que o, cette fonction-ci $mn - p$ sera plus grande ou moindre que o.

Pour savoir lequel des deux, soit $c = 1$, $b = 2$,

$a = 3$, on aura $m = 5$, $n = 11$, $p = 3 \cdot 5$; & ſubſtituant dans la fonction, on aura $5 \cdot 11 - 3 \cdot 5 > 0$; par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $mn - p > 0$.

2.° Il peut devenir $(x + a)(x + b + b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$, & $4m^2 - 9n > 0$; donc tant que c ſera moindre que b, cette fonction-ci $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2$ ſera plus grande ou moindre que 0.

Pour ſavoir lequel des deux, j'y ſubſtitue les valeurs précédentes de m, de n & de p; j'aurai $2(5^2 - 11)(-3 \cdot 5^2 + (11)^2) - (5 \cdot 11 - 3 \cdot 5)^2$, ou $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 23 - 5^2 \cdot 2^6$, ou $2^3(7 \cdot 23 - 2^3 \cdot 5^2) < 0$; par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 < 0$.

3.° Il peut devenir $(x + a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$ en faiſant $a = b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$, $4m^2 - 9n < 0$, $m^2 - n > 0$; donc tant que a ſera moindre que b, cette fonction-ci $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2$ ſera plus grande ou moindre que 0.

J'y ſubſtitue les valeurs précédentes de m, de n & de p; j'aurai $2^2 \cdot 5^2 \cdot 11(5^2 + 11)^2 - (2 \cdot 5^3 + 17 \cdot 5 \cdot 11 + 3 \cdot 5)^2$,
ou $5^2(2^2 \cdot 11 \cdot 2^4 \cdot 3^4 - 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2)$,
ou $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2(3^2 \cdot 11 - 2^2 \cdot 5^2) < 0$; par conſéquent, une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 < 0$.

Le système de conditions du système de facteurs $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$ est donc $mn-p>0$, $2(m^2-n)(-mp+n^2)-(mn-p)^2<0$, $100\,n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2<0$, $m^2-n>0$.

Le système $(x+a)(x+c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+a)(x+b\sqrt{-1})(x-b\sqrt{-1})$ en faisant $c=0$; auquel cas, on auroit $mn-p=0$ & $m^2-n>0$. Donc, tant que c sera plus grand que 0, cette fonction-ci $mn-p$ sera plus grande ou moindre que 0.

Pour savoir lequel des deux, soit $c=3$, $b=6$; $a=7$, on aura $m=1$, $n=3$, $p=3^2.5.7$; & en substituant ces valeurs dans la fonction, on aura $3-3^2.5.7<0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $mn-p<0$.

2.° Il peut devenir $(x+a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ en faisant $a=b$; auquel cas, on auroit $100\,n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2=0$, & $m^2-n<0$. Donc, tant que a sera plus grand que b, cette fonction-ci $100\,n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

J'y substitue pour m, n & p les valeurs précédentes, & je trouve $2^2.5^2.3(1+3)^2-(2+17.3+3^2.5.7)^2$, ou $2^2.5^2.3.2^4-2^8.(23)^2$, ou $2^6(3.5^2-2^2.(23)^2)<0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $100\,n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2<0$.

Le système de conditions du système de facteurs $(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ est donc $mn-p<0$, $100\,n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2<0$.

Le

Le système $(x+b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+b)(x+a)(x+a)$ en faisant $c=0$; auquel cas, on auroit $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2=0$, & $2m^3-9mn+27p<0$; donc, tant que c sera plus grand que o, la fonction $4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2$ sera plus grande ou moindre que o; nous savons qu'elle sera moindre que o; car lorsqu'elle est plus grande, la formule appartient au système $(x+a)(x+b)(x+c)$.

Une des conditions de ce système-ci est donc
$4(m^2-3n)(-3mp+n^2)-(mn-9p)^2<0$.

2.° Il peut devenir $(x+b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faisant $c=b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2=0$, & $4m^2-9n>0$. Donc, tant que c sera moindre que b, cette fonction-ci $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)^2$ sera plus grande ou moindre que o.

Pour savoir lequel des deux, soit $c=1$, $b=2$, $a=3$, on aura $m=2^3$, $n=2.11$, $p=2^2.5$; & en substituant ces valeurs dans la fonction, on aura $2^2.5^2.2.11(2^6+2.11)^2-(2.2^9+17.2^3.2.11+2^2.5)^2$, ou $2^5.5^2.11(43)^2-2^4(2^8+2^2.11.17+5)^2$, ou $2^4(2.5^2.11.(43)^2-(1009)^2)<0$;
par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn+p)<0$.

3.° Il peut devenir $(x+a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faisant $a=b$; auquel cas, on auroit $2m^3-9mn+27p=0$, & $4m^2-9n>0$.

$2^2(2^5 - 2.3^2.7 + 3^3.5) > 0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $2m^3 - 9mn + 27p > 0$.

3.° Il peut devenir $(x + a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 = 0$, $4m^2 - 9n < 0$, $m^2 - n > 0$; donc tant que a sera plus grand que b, la fonction $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

Substituons-y les valeurs précédentes de m, de n & de p, & nous aurons

$$2^2.5^2.2.7(2^4 + 2.7)^2 - (2.2^6 + 17.2^2.2.7 + 2^2.5)^2,$$
$$\text{ou } 2^5.5^2.7.3^2.5^2 - 2^4.5^4.(11)^2,$$
$$\text{ou } 2^4.5^4(2.3^2.7 - (11)^2) > 0;$$

par conséquent, une des conditions de ce système est $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$.

Le système de conditions du système de facteurs $(x + b)(x + c + a\sqrt{-1})(x + c - a\sqrt{-1})$ est donc $mn - p > 0$, $2m^3 - 9mn + 27p > 0$, $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$, $4m^2 - 9n < 0$.

Le système $(x + b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + b)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$ en faisant $c = 0$; auquel cas, on auroit $mn - p = 0$ & $m^2 - n < 0$. Donc, tant que c sera plus grand que 0, cette fonction-ci $mn - p$ sera plus grande ou moindre que 0.

Soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 3$, on aura $m = 7$, $n = 19$, $p = 13$; & en substituant dans la fonction, on aura

$$2^2.5^2.19\,(7^2 + 19)^2 - (2.7^3 + 17.7.19 + 13)^2,$$

$$\text{ou } 2^6.5^2.(17)^2.19 - 2^8.5^2.(37)^2,$$

$$\text{ou } 2^6.5^2((17)^2.19 - 2^2.(37)^2) > 0;$$

par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$.

2.° Il peut devenir $(x + b)\,(x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $2(m^2 - n)\,(-mp + n^2) - (mn - p)^2 = 0$, & $4m^2 - 9n < 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, la fonction $2(m^2 - n)\,(-mp + n^2) - (mn - p)^2$ sera plus grande ou moindre que 0.

Substituons-y pour m, n, p, les valeurs précédentes, nous aurons $2(7^2 - 19)\,(-7.17 + (19)^2) - (7.19 - 13)^2$,

$$\text{ou } 2.2.3.5.2.(11)^2 - 2^6.3^2.5^2,$$

$$\text{ou } 2^3.5\,(3.(11)^2 - 2^3.3^2.5) > 0;$$

par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $2(m^2 - n)\,(-mp + n^2) - (mn - p)^2 > 0$.

Le système de conditions du système de facteurs $(x + c)\,(x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1})$ est donc $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0$, $2(m^2 - n)\,(-mp + n^2) - (mn - p)^2 > 0$.

1.° Le système $(x + c)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + b)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})$ en faisant $c = b$; auquel cas, on auroit $2m^3 - 9mn + 27p = 0$, & $4m^2 - 9n < 0$;

$- 9mn + 27p > 0.$

$- 9mn + 27p < 0.$

$- 9n > 0.$

$- 9n < 0.$

$-9n > 0.$

$-9n < 0, \; m^2 - n > 0.$

$\cdot n < 0.$

$(m^2 - n)(n^2 - mp) - (mn - p)^2 > 0, \; 2m^3 - 9mn + 27p > 0, \; 4m^2 - 9n > 0.$

$p)^2 < 0, \; 100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 < 0, \; m^2 - n > 0.$

$+ p)^2 < 0.$

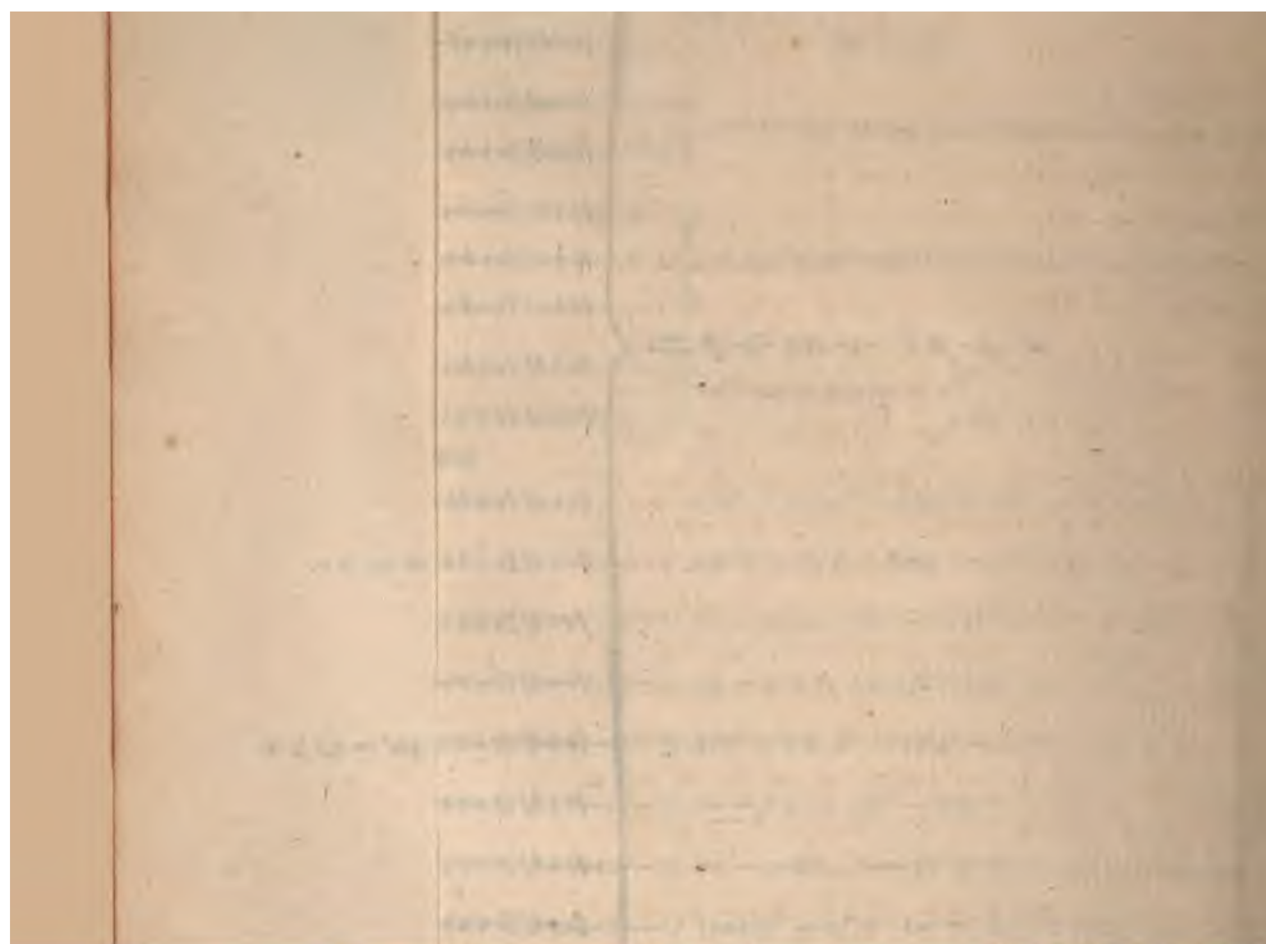
$100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 < 0, \; 2m^3 - 9mn + 27p < 0, \; 4m^2 - 9n > 0.$

$m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0, \; 4m^2 - 9n < 0.$

$+ p)^2 > 0, \; m^2 - n < 0.$

$m^2 - n)(n^2 - mp) - (mn - p)^2 > 0.$

$- (mn - p)^2 < 0, \; 4m^2 - 9n < 0.$



Qu'il s'agisse, par exemple, de trouver les trois facteurs de $x^3 + x^2 + 3x + 5$, l'on aura $m = 1$, $n = 3$, $p = 5$, & l'on trouvera

$$4(m^2 - 3n)(-3mp + n^2) - (mn - 9p)^2 < 0,$$
$$2(m^2 - n)(-mp + n^2) - (mn - p)^2 < 0,$$
$$100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0 \; *,$$
$$2m^3 - 9mn + 27p > 0,$$
$$mn - p < 0 \; *,$$
$$m^2 - n < 0 \; *,$$
$$4m^2 - 9n < 0.$$

D'où l'on conclura que $x^3 + x^2 + 3x + 5 = (x + b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx - p = (x + a)(x + a)(x - b)$, on aura $m = 2a - b$, $n = a^2 - 2ab$, $p = a^2 b$; & en chassant a & b, on aura $4(m^2 - 3n)(3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx - p = (x - b)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$, on aura $2a - b = m$, $a - b = n^{\frac{1}{2}}$, $b(a^2 + b^2) = p$; & en chassant a & b, on aura $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx - p = (x - a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$, on aura $2b - a = m$, $a - b = n^{\frac{1}{2}}$, $a(a^2 + b^2) = p$; donc $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 = 0$, comme pour le système précédent.

Soit $x^3 + mx^2 + nx - p = (x - b)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$, on aura $b = m$, $a^2 - b^2 = n$, $b(a^2 + b^2) = p$; donc $2m^3 + mn - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 + nx - p = (x - b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$, on aura $2a - b = m$, $2a^2 - 2ab = n$, $2a^2 b = p$; donc $2(m^2 - n)(mp + n^2) - (mn + p)^2 = 0$.

Les deux ſyſtèmes $\left\{\begin{matrix}(x-b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})\\(x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})\end{matrix}\right.$ ſont diſtingués de tous ceux de leur formule, par la condition $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0$; mais il faut les diſtinguer l'un de l'autre. Ils peuvent devenir $(x-a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1})$, auquel cas on auroit $2m^3-p=0$; par conſéquent, la fonction $2m^3-p$ doit être >0 dans l'un des deux ſyſtèmes, & <0 dans l'autre.

Soit dans le premier ſyſtème $b=1$, $a=2$, on aura $m=3$, $p=5$; & en ſubſtituant dans la fonction, on aura $2\cdot 3^3-5>0$; on aura donc pour ce ſyſtème-ci,

$(x-b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$,

$2m^3-p>0$;

& pour celui-ci,

$(x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$,

on aura $2m^3-p<0$.

Dans le premier ſyſtème

$(x-b)\,(x+a+b\sqrt{-1})\,(x+a-b\sqrt{-1})$,

$m=2a-b$, $p=b(a^2+b^2)$, ou en faiſant $a=b+\beta$, $m=b+2\beta$, $p=2b^3+2b^2\beta+b\beta^2$; en ſubſtituant ces valeurs de m & de p dans la fonction $2m^3-p$, on aura $+2b^3+12b^2\beta+24b\beta^2+16\beta^3>0$.

$\quad -2 \qquad -2 \qquad\quad -1$

Dans le ſecond ſyſtème

$(x-a)\,(x+b+a\sqrt{-1})\,(x+b-a\sqrt{-1})$,

$m=2b-a$, $p=a(a^2+b^2)$. Soit $a=b+\beta$, on aura $m=b-\beta$, $p=(b+\beta)(2b^2+2b\beta+\beta^2)$. Soit $b=\beta+\gamma$, on aura $m=\gamma$, $p=(2\beta+\gamma)(5\beta^2+6\beta\gamma+2\gamma^2)$; & en ſubſtituant dans la fonction $2m^3-p$, on aura $+2\gamma^3-10\beta^3+17\beta^2\gamma-10\beta\gamma^2<0$.

$\quad -2$

En

En rassemblant tout ce que nous venons de trouver, nous aurons

$$x^3+mx^2+nx-p=\begin{cases}(x+a)(x+a)(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4(m^2-3n)(3mp+n^2)-(mn+9p)^2=0;\\ \left.\begin{array}{l}(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})\\ (x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\end{array}\right\}\ 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0\begin{cases}2m^3-p>0;\\ 2m^3-p<0;\end{cases}\\ (x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\ \ 2m^3+mn-p=0;\\ (x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})\ \ 2(m^2-n)(mp+n^2)-(mn+p)^2=0;\end{cases}$$

Le systême $(x + a)(x + b)(x - c)$ peut devenir celui-ci $(x + a)(x + a)(x - b)$ en faisant $a = b$, & dans ce cas, on auroit la fonction $4(m^2 - 3n)(3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 = 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, cette fonction sera plus grande ou moindre que 0. Pour savoir lequel des deux, il suffit d'en faire un seul essai.

L'on a $m = a + b - c$, $n = ab - ac - bc$, $p = abc$. Soit $c = 3$, $b = 4$, $a = 17$, on aura $m = 2.3^2$, $n = 5$, $p = 2^2.3.17$, & en substituant dans la fonction, on aura

$$2^2(2^2.3^4 - 3.5)(3.2.3^2.2^2.3.17 + 5^2) - (2.3^2.5 + 3^2.2^2.3.17)^2,$$

ou $$2^2.3(2^2.3^3 - 5)(2^3.3^4.17 + 5^2) - 2^2.3^4(5 + 2.3.17)^2,$$

ou $2^2.3[(103)(11041) - 27(107)^2] > 0$;
par conséquent, la condition pour ce systême-ci est $4(m^2 - 3n)(3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 > 0$.

Le calcul seroit beaucoup plus long, si l'on vouloit trouver la même chose, sans donner des valeurs particulières aux lettres a, b, c.

L'on feroit $a = b + \beta$, $b = c + \gamma$; on auroit $a = c + \beta + \gamma$, & en substituant ces valeurs, on auroit $m = c + \beta + 2\gamma$, $n = -c^2 + \beta\gamma + \gamma^2$, $p = c(c + \gamma)(c + \beta + \gamma)$.

L'on feroit $\gamma^2 + \beta\gamma = c^2 + \delta$, & on auroit $\beta = \frac{c^2 - \gamma^2 + \delta}{\gamma}$; donc $m = \frac{c^2 + c\gamma + \gamma^2 + \delta}{\gamma}$, $n = \delta$, $p = \frac{c.(c + \gamma)(c^2 + c\gamma + \delta)}{\gamma}$, & en substituant ces valeurs dans la fonction $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (mn + 9p)^2$, l'on trouveroit qu'elle est > 0.

Le ſyſtème $(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})$ peut devenir celui-ci,

$(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})$, en faiſant $a=b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0$, & $2m^3-p<0$; donc, tant que a ſera plus grand que b, cette fonction-ci, $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2$ ſera plus ou moins grande que o ; il s'agit de ſavoir lequel des deux.

L'on a $m=2c-a$, $n=b^2+c^2-2ac$, $p=a(b^2+c^2)$. Soit $a=b+\alpha$, $b=c+\beta$, $2c=a+\gamma$, on aura $c=\alpha+\beta+\gamma$, $b=\alpha+2\beta+\gamma$, $a=2\alpha+2\beta+\gamma$; & en ſubſtituant pour a, b, c ces valeurs, on aura $m=\gamma$, $n=-2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\gamma$, $p=(2\alpha+2\beta+\gamma)(2\alpha^2+6\alpha\beta+5\beta^2+4\alpha\gamma+6\beta\gamma+2\gamma^2)$. Soit $\alpha=1$, $\gamma=1$, $\beta=4$; donc $c=6$, $b=10$, $a=11$; donc $m=1$, $n=4$, $p=1496$. Je ſubſtitue pour m, n, p ces valeurs dans la fonction $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2$, & je trouve $2^2.5^2.2^2.5^2-(2+2^2.17-2^3.187)^2<0$; par conſéquent, le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci eſt $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2<0$, $2m^3-p<0$.

1.° Le ſyſtème $(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x+a)(x-b)$ en faiſant $c=0$, & on auroit la fonction $4(m^2-3n)(3mp+n^2)-(mn+9p)^2=0$; donc, tant que c ſera >0, cette fonction ſera plus ou moins grande que o ; & il eſt évident que c'eſt moindre que o qu'elle ſera, car nous avons trouvé que lorſqu'elle eſt plus grande que o, la formule appartient

à ce systême-ci, $(x + a)(x + b)(x - c)$; on aura donc $4(m^2 - 3n)(3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 < 0$.

2.° Il peut devenir $(x - b)(x + a + b\sqrt{-1})$ $(x + a - b\sqrt{-1})$ en faisant $b = c$, & on auroit $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 = 0$, $2m^3 - p > 0$; donc, tant que b sera plus grand que c, la fonction $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2$ sera plus ou moins grande que o. L'on a $m = 2a - b$, $n = a^2 - 2ab + c^2$, $p = b.(a^2 + c^2)$. Soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 4$, on aura $m = 6$, $n = 1$, $p = 2.17$; & en substituant dans la fonction, on aura

$$2^2.5^2(37)^2 - (2.2^3.3^3 + 17.2.^23 - 2.17)^2,$$

ou $2^2[(185)^2 - (250)^2] < 0$.

Le systême de conditions pour le systême de facteurs $(x - b)(x + a + c\sqrt{-1})(x + a - c\sqrt{-1})$ est donc $4(m^2 - 3n)(3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 < 0$, $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 < 0$, $2m^3 - p > 0$.

1.° Le systême $(x - b)(x + c + a\sqrt{-1})(x + c - a\sqrt{-1})$ peut devenir $(x - a)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 = 0$, & $2m^3 - p < 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, la fonction $100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2$ sera plus grande ou moindre que o. L'on a $m = 2c - b$, $n = a^2 - 2bc + c^2$, $p = b.(a^2 + c^2)$. Soit $c = 2$, $b = 3$, $a = 4$; donc $m = 1$, $n = 2^3$, $p = 2^2.3.5$. En substituant dans la fonction, on aura

$$2^2.5^2.2^3.3^4 - (2 + 2^3.17 - 2^2.3.5)^2,$$

ou $2^2(2^3.3^4.5^2 - 3^4) > 0$;

par conséquent, une des conditions de ce système-ci est
$100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2>0$.

2.° Il peut devenir $(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})$ $(x+b-a\sqrt{-1})$, en faisant $c=b$; auquel cas, on auroit $2m^3+mn-p=0$; par conséquent, tant que b sera plus grand que c, la fonction $2m^3+mn-p$ sera plus grande ou moindre que o. Substituons-y pour m, n, p les valeurs précédentes, & nous trouverons que c'est <0 qu'elle est; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $2m^3+mn-p<0$, & cette condition rend inutile celle-ci, $2m^3-p<0$, que nous avions trouvée dans le premier cas.

Le système de conditions est donc pour ce système-ci
$100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2>0$,
$2m^3+mn-p<0$.

1.° Le système $(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faisant $c=b$; auquel cas, on auroit $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0$, & $2m^3-p>0$; donc, tant que c sera moindre que b, la fonction $100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2$ sera plus grande ou moindre que o. L'on a $m=2a-c$, $n=a^2-2ac+b^2$, $p=c.(a^2+b^2)$. Soit $c=1$, $b=2$, $a=3$; donc $m=5$, $n=7$, $p=13$. En substituant ces valeurs dans la fonction, on aura

$$2^2.5^2.7.(2^5)^2-(2.5^3+17.5.7-13)^2,$$
ou $2^{12}.5^2.7-2^{12}.(13)^2>0$;

par conséquent, une des conditions de ce système-ci est
$100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2>0$.

2.° Il peut devenir $(x - b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$, en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit cette fonction-ci, $2(m^2 - n)(mp + n^2) - (mn + p)^2 = 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, cette même fonction sera plus ou moins grande que o. Substituons-y pour m, n, p les valeurs précédentes, & nous aurons $2(5^2 - 7)(5 \cdot 13 + 7^2) - (5 \cdot 7 + 13)^2$, ou $2^3 \cdot 3^2 \cdot 57 - 2^6 \cdot 3^2 > 0$.

Les conditions pour ce système-ci sont donc
$100\,n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn - p)^2 > 0$,
$2(m^2 - n)(mp + n^2) - (mn + p)^2 > 0$,
$2m^3 - p > 0$.

1.° Le système $(x - c)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$ peut devenir $(x - b)(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})$ en faisant $c = b$; auquel cas, on auroit la fonction $2m^3 + mn - p = 0$; donc, tant que c sera moindre que b, cette fonction sera plus grande ou moindre que o. L'on a $m = 2b - c$, $n = a^2 - 2bc + b^2$, $p = c(a^2 + b^2)$. Soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 3$; donc $m = 3$, $n = 3^2$, $p = 13$; en substituant ces valeurs dans la fonction, l'on trouvera un reste > 0; d'où l'on conclura qu'une des conditions de ce système-ci est $2m^3 + mn - p > 0$.

2.° Il peut devenir $(x - b)(x + a + a\sqrt{-1})(x + a - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$, & dans ce cas, on auroit la fonction $2(m^2 - n)(mp + n^2) - (mn + p)^2 = 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, cette fonction sera plus ou moins grande que o. Substituons-y les valeurs précédentes de m, de n & de p, nous aurons un reste < 0; d'où nous conclurons qu'une des conditions de ce système-ci est $2(m^2 - n)(mp + n^2) - (mn + p)^2 < 0$.

Au moyen de tout ce que nous venons de trouver, nous aurons

$$
x^3+mx^2+nx-p=\left\{\begin{array}{l}
(x+a)(x+a)(x-b)\ldots\ldots\ldots\ 4(m^2-3n)(n^2+3mp)-(mn+9p)^2=0;\\[4pt]
\left.\begin{array}{l}(x-b)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})\\(x-a)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\end{array}\right\}100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2=0.\left\{\begin{array}{l}2m^3-p>0,\\2m^3-p<0.\end{array}\right.\\[4pt]
(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\ \ 2m^3+mn-p=0.\\[4pt]
(x-b)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})\ \ 2(m^2-n)(n^2+mp)-(mn+p)^2=0.\\[4pt]
(x+a)(x+b)(x-c)\ldots\ldots\ldots\ 4(m^2-3n)(n^2+3mp)-(mn+9p)^2>0.\\[4pt]
(x-a)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1})\left\{\begin{array}{l}100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2<0,\\2m^3-p<0.\end{array}\right.\\[4pt]
(x-b)(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})\left\{\begin{array}{l}4(m^2-3n)(n^2+3mp)-(mn+9p)^2<0.\\100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2<0,\\2m^3-p>0.\end{array}\right.\\[4pt]
(x-b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})\left\{\begin{array}{l}100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2>0;\\2m^3+mn-p<0.\end{array}\right.\\[4pt]
(x-c)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})\left\{\begin{array}{l}100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2>0;\\2(m^2-n)(n^2+mp)-(mn+p)^2>0,\\2m^3-p>0.\end{array}\right.\\[4pt]
(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})\left\{\begin{array}{l}2m^3+mn-p>0,\\2(m^2-n)(n^2+mp)-(mn+p)^2<0.\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Soit $x^3 + mx^2 - nx + p = (x + a)(x - b)(x - b)$, on aura $4(m^2 + 3n)(-3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx + p = (x + a)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$, on aura $2(m^2 + n)(-mp + n^2) - (mn + p)^2 = 0$.

Ce ſyſtème-ci $(x + a)(x - b)(x - c)$ peut devenir celui-ci $(x + a)(x - b)(x - b)$ en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit la fonction $4(m^2 + 3n)(-3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 = 0$; donc, tant que c ſera moins grand que b, cette fonction ſera plus ou moins grande que 0. Je trouve que c'eſt plus grande que 0 qu'elle ſera; on aura donc pour ce ſyſtème-ci $4(m^2 + 3n)(-3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 > 0$.

1.° Le ſyſtème $(x + a)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ peut ſe changer en celui-ci $(x + a)(x - b)(x - b)$, en faiſant $c = 0$; auquel cas, on auroit la fonction $4(m^2 + 3n)(-3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 = 0$; donc, tant que c ſera plus grand que 0, cette fonction ſera plus ou moins grande que 0; & il eſt évident que c'eſt moins grande que 0 qu'elle ſera, puiſque lorſqu'elle eſt plus grande que 0, la formule appartient au ſyſtème précédent; ainſi on aura $4(m^2 + 3n)(-3mp + n^2) - (mn + 9p)^2 < 0$.

2.° Il peut devenir $(x + a)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$, & dans ce cas, on auroit la fonction $2(m^2 + 3n)(-mp + n^2) - (mn + p)^2 = 0$; donc, tant que c ſera moindre que b, cette fonction ſera plus ou moins grande que 0. Je trouve que c'eſt plus grande que 0 qu'elle ſera, & que par conſéquent la ſeconde condition de ce ſyſtème-ci eſt $2(m^2 + 3n)(-mp + n^2) - (mn + p)^2 > 0$.

Le

Le syſtème $(x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1})$ en faiſant $c=b$; & dans ce cas, on auroit la fonction $2(m^2-3n)\,(-mp+n^2)-(mn+p)^2=0$; donc, tant que c ſera $< b$, cette même fonction ſera plus ou moins grande que o; & il eſt évident que pour diſtinguer ce ſyſtème-ci du précédent, c'eſt moins grande que o qu'elle doit être, & que par conſéquent la condition pour ce ſyſtème-ci eſt $2(m^2-3n)\,(-mp+n^2)-(mn+p)^2<0$.

En raſſemblant tout ce qui concerne la formule x^3+mx^2-nx+p, on aura

$$+mx^2-nx+p=\left\{\begin{array}{ll}
(x+a)\,(x-b)\,(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots & 4(m^2+3n)\,(-3mp+n^2)-(mn+9p)^2=0, \\
(x+a)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1}) & 2(m^2+n)\,(-mp+n^2)-(mn+p)^2=0; \\
(x+a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots\ldots\ldots & 4(m^2+3n)\,(-3mp+n^2)-(mn+9p)^2>0; \\
(x+a)\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l} 4(m^2+3n)\,(-3mp+n^2)-(mn+9p)^2<0, \\ 2(m^2+n)\,(-mp+n^2)-(mn+p)^2>0; \end{array}\right. \\
(x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) & 2(m^2+n)\,(-mp+n^2)-(mn+p)^2<0;
\end{array}\right.$$

Les ſyſtèmes de conditions des ſyſtèmes de facteurs de la formule x^3-mx^2+nx+p, ſont les mêmes que ceux des ſyſtèmes correſpondans de la formule x^3+mx^2+nx-p; ainſi on aura la Table ſuivante.

$$x^3 - mx^2 + nx + p = \begin{cases}
(x-a)(x-a)(x+b) \ldots\ldots & 4(m^2-3n)(n^2+3mp)-(mn+9p)^2 = 0. \\
\left.\begin{array}{l}(x+b)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})\end{array}\right\} & 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2 = 0. \left\{\begin{array}{l}2m^3-p > 0. \\ 2m^3-p < 0.\end{array}\right. \\
(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) & 2m^3+mn-p = 0. \\
(x+b)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) & 2(m^2-n)(n^2+mp)-(mn+p)^2 = 0. \\
(x-a)(x-b)(x+c) \ldots\ldots & 4(m^2-3n)(n^2+3mp)-(mn+9p)^2 > 0. \\
(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l}100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2 < 0, \\ 2m^3-p < 0.\end{array}\right. \\
(x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l}4(m^2-3n)(n^2+3mp)+(mn+9p)^2 < 0. \\ 100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2 < 0, \\ 2m^3-p > 0.\end{array}\right. \\
(x+b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l}100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2 > 0, \\ 2m^3+mn-p < 0.\end{array}\right. \\
(x+c)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l}100n(m^2+n)^2-(2m^3+17mn-p)^2 > 0, \\ 2(m^2-n)(n^2+mp)-(mn+p)^2 > 0, \\ 2m^3-p > 0.\end{array}\right. \\
(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) & \left\{\begin{array}{l}2m^3+mn-p > 0, \\ 2(m^2-n)(n^2+mp)-(mn+p)^2 < 0.\end{array}\right.
\end{cases}$$

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x+a)(x+a)(x-a)$, on aura $m^2 - n = 0$, & $m^3 - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x+a)(x+b)(x-b)$, on aura $mn - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x+a)(x-a)(x+b)$, on aura, ainsi que dans le cas précédent, $mn - p = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x-a)(x+b)(x+b)$, on aura $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p) = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x+a)(x+a)(x-b)$, on aura, comme dans le cas précédent, $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x-a)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})$, on aura $2(m^2+n)(mp+n^2) - (-mn+p)^2 = 0$.

Soit $x^3 + mx^2 - nx - p = (x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$, on aura $2m^3 - mn - p = 0$.

Les deux systêmes $(x+a)(x+b)(x-b)$ & $(x+a)(x-a)(x+b)$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $mn - p = 0$; mais il faut les distinguer entr'eux, c'est-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de m, de n & de p, qui soit plus grande que o dans le premier, moindre que o dans le second, & qui soit $= 0$ dans le cas $(x+a)(x+a)(x-a)$ commun aux deux systêmes.

Soit $Am^2 + Bn$ la fonction dont il s'agit; en y substituant a au lieu de m, & a^2 au lieu de n, on aura $A + B = 0$.

En y substituant a au lieu de m, & b^2 au lieu de n, ou, en faisant $a = b + \alpha$, en y substituant $b^2 + 2b\alpha + \alpha^2$ au lieu de m, & b^2 au lieu de n, on aura

$$\begin{matrix} +A \\ +B \end{matrix} b^2 + 2Ab\alpha + \alpha^2 > 0 \text{; donc } A > 0.$$

En y substituant b au lieu de m, & a^2 au lieu de n, ou, en faisant $a = b + \alpha$, en y substituant b au lieu de m, & $b^2 + 2b\alpha + \alpha^2$ au lieu de n, on aura

$$\begin{array}{l} + Ab^2 + 2Bb\alpha + B\alpha^2 < 0; \text{ donc } B < 0. \\ + Bb^2 \end{array}$$

Soit $A = 1$, on aura $B = -1$; les conditions seront remplies, & on aura pour le premier système $m^2 - n > 0$, & pour le second, $m^2 - n < 0$.

Les deux systèmes $(x - a)(x + b)(x + b)$ & $(x + a)(x + a)(x - b)$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 = 0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre. Soit $Am^2 + Bn$ la fonction qui est > 0 dans le premier, < 0 dans le second, & $= 0$ dans le cas $(x + a)(x + a)(x - a)$ commun aux deux systèmes. En substituant dans cette fonction a au lieu de m, & a^2 au lieu de n, on aura $A + B = 0$.

En y substituant $2b - a$ au lieu de m, & $2ab - b^2$ au lieu de n, ou, en faisant $a = b + \alpha$, en y substituant $b - \alpha$ au lieu de m, & $b^2 + 2b\alpha$ au lieu de n, ou, en faisant encore $b = \alpha + \beta$, en y substituant β au lieu de m, $3\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2$ au lieu de n, on aura

$$\begin{array}{l} + Ab^2 + 4B\alpha\beta + 3B\alpha^2 > 0; \text{ donc } B > 0. \\ + B \end{array}$$

En y substituant $2a - b$ au lieu de m, & $2ab - a^2$ au lieu de n, ou, en faisant $a = b + \alpha$, en y substituant $b + 2\alpha$ au lieu de m, & $(b + \alpha).(b - \alpha)$ au lieu de n, ou, en faisant $b = \alpha + \beta$, en y substituant $3\alpha + \beta$ au lieu de m, & $(2\alpha + \beta).\beta$ au lieu

de n, on aura $\begin{matrix} + A\beta^2 & + 6A\alpha\beta & + 9A\alpha^2 \\ + B & + 2B & \end{matrix} < 0$;
donc $3A + B < 0$, $A < 0$.

Soit $B = 1$, on aura $A = -1$, & toutes les conditions feront remplies ; on aura donc pour le premier fyftème $m^2 - n < 0$, & pour le fecond, $m^2 - n > 0$.

1.° Le fyftème $(x + a)(x + b)(x - c)$ peut devenir $(x + a)(x + a)(x - b)$ en faifant $a = b$, auquel cas, on auroit $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 = 0$; & $m^2 - n > 0$; donc, tant que a fera plus grand que b, cette fonction-ci $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2$ fera plus grande ou moindre que o.

Soit $c = 3$, $b = 4$, $a = 6$, on aura $m = 7$, $n = 2 . 3$, $p = 2^3 . 3^2$, & en fubftituant dans la fonction, on aura

$$2^2(7^2 + 2.3^2)(3.7.2^3.3^2 + 2^2.3^2) - (2^3.3^4 - 2.3.7)^2,$$

ou $$2^2.2^2.3^2(7^2 + 2.3^2)(2.3.7 + 1) - 2^2.3^2(2^2.3^3 - 7)^2,$$

ou $$2^2.3^2[2^2(67)(43) - (101)^2] > 0;$$

par conféquent, dans ce fyftème-ci, on aura toûjours $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 > 0$.

2.° Il peut devenir $(x + a)(x + b)(x - b)$ en faifant $c = b$; auquel cas, on auroit $mn - p = 0$, & $m^2 - n > 0$; donc, tant que c fera moindre que b, la fonction $mn - p$ fera plus grande ou moindre que o. En y fubftituant les valeurs précédentes de m, de n & de p, on aura $2.3.7 - 2^3.3^2$, ou $2.3(7 - 2^2.3) < 0$; par conféquent, dans ce fyftème-ci on aura toûjours $mn - p < 0$, & fon fyftème de conditions fera $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 > 0$, $mn - p < 0$, $m^2 - n > 0$.

Le ſyſtème $(x+a)(x-b)(x+c)$ peut devenir $(x+a)(x+b)(x-b)$ en faiſant $c=b$; il peut devenir $(x+a)(x-a)(x+b)$ en faiſant $a=b$; d'où il ſuit que la fonction m^2-n ſera tantôt plus grande & tantôt moindre que o, & que la fonction $mn-p$ ſera plus grande ou moindre que o; il eſt évident que c'eſt plus grande que o qu'elle ſera, ſans quoi, les nombres m, n, p pourroient ſatisfaire en même temps au ſyſtème qui précède & à celui-ci; or il faut que les ſyſtèmes de conditions d'une formule quelconque, ſoient tels que, quels que ſoient les nombres $m, n, p, q, r, s, t,$ *&c.* ils ſatisfaſſent toûjours à l'un d'eux, & qu'ils ne ſatisfaſſent jamais qu'à un ſeul; on aura donc toûjours dans ce ſyſtème-ci $mn-p>0$.

1.° Le ſyſtème $(x-a)(x+b)(x+c)$ peut devenir $(x-a)(x+b)(x+b)$ en faiſant $c=b$; auquel cas, on auroit $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2=0$, & $m^2-n<0$.

Donc, tant que c ſera moindre que b, cette fonction-ci $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2$ ſera plus grande ou moindre que o. L'on a $m=-a+b+c$, $n=ab+ac-bc$, $p=abc$. Soit $c=2$, $b=3$, $a=4$; donc $m=1$, $n=2.7$, $p=2^3.3$; en ſubſtituant ces valeurs dans la fonction, on aura $2^2(1+2.3.7)(2^3.3^2+2^2.7^2)-(3^2.2^3.3-2.7)^2$, ou $2^2(43.268-(101)^2)>0$; on aura donc toûjours dans ce ſyſtème-ci $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2>0$.

2.° Il peut devenir $(x+a)(x-a)(x+b)$ en faiſant $a=b$; auquel cas, on auroit $mn-p=0$, & $m^2-n<0$.

Le syſtème de conditions pour ce syſtème de facteurs-ci, eſt donc $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2>0$, $mn-p<0$, $m^2-n<0$.

1.° Le syſtème $(x-a)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$ peut devenir $(x-a)(x+b)(x+b)$ en faiſant $c=0$; on auroit $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2=0$, & $m^2-n<0$; donc, tant que c ſera plus grand que 0, la fonction $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2$ ſera plus grande ou moindre que 0. L'on a $m=2b-a$, $n=2ab-b^2-c^2$, $p=a(b^2+c^2)$.

Soit $c=1$, $b=2$, $a=3$, donc $m=1$, $n=7$, $p=3.5$; & en ſubſtituant dans la fonction, on aura

$$2^2(1+3.7)(3^2.5+7^2)-(3^3.5-7)^2,$$

ou $2^2.22.94-(128)^2$,

ou $2^4(11.47-2^{10})<0$;

par conſéquent, dans ce ſyſtème-ci on aura toûjours $4(m^2+3n)(3mp+n^2)-(-mn+9p)^2<0$.

2.° Il peut devenir $(x-a)(x+b+b\sqrt{-1})$ $(x+b-b\sqrt{-1})$ en faiſant $c=b$; auquel cas, on auroit la fonction $2(m^2+n)(mp+n^2)-(-mn+p)^2=0$; donc tant que c ſera moindre que b, cette fonction ſera plus grande ou moindre que 0.

Subſtituons-y les valeurs précédentes de m, de n & de p, nous aurons $2(1+7)(3.5+7^2)-(3.5-7)^2$, ou $2^2.2^3.2^6-2^6>0$; par conſéquent, dans ce ſyſtème-ci on aura toûjours $2(m^2+n)(mp+n^2)-(-mn+p)^2>0$.

3.° Il peut devenir $(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})$ $(x+a-b\sqrt{-1})$ en faiſant $a=b$; & dans ce cas, on auroit la fonction $2m^3-mn-p=0$; donc, tant

donc, tant que c sera plus grand que o, cette fonction-ci $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2$ sera toûjours plus grande ou toûjours moindre que o.

L'on a $m = 2a - b$, $n = 2ab - a^2 - c^2$, $p = b(a^2 + c^2)$. Soit $a = b + \alpha$, $b = c + \beta$, $2ab - a^2 - c^2 = \delta$. En substituant pour a & b leurs valeurs dans la dernière équation, j'aurai $2c\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \delta$. Soit $c = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$, j'aurai $\delta = 2$, $b = 2$, $a = 3$; donc $m = 2^2$, $n = 2$, $p = 2^2.5$. En substituant dans la fonction, j'aurai

$2^2(2^4 + 3.2)(3.2^2.2^2.5 + 2^2) - 3^2.2^2.5 - 2^3)^2$,

ou $2^4(2.11.61 - (43)^2) < 0$;

par conséquent, dans ce systême-ci, on aura toûjours $4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 < 0$.

2.° Il peut devenir $(x - a)(x + a + b\sqrt{-1})(x + a - b\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit la fonction $2m^3 - mn - p = 0$; donc, tant que a sera plus grand que b, cette fonction sera toûjours plus grande ou toûjours moindre que o.

Mettons-y les valeurs de m, de n & de p, qui précèdent, nous aurons $2^7 - 2^3 - 2^2.5$, ou $2^2(2^5 - 2 - 5) > 0$; par conséquent, dans ce systême-ci, on aura toûjours $2m^3 - mn - p > 0$.

Son systême de conditions sera donc

$4(m^2 + 3n)(3mp + n^2) - (-mn + 9p)^2 < 0$,

$2m^3 - mn - p > 0$, $m^2 - n > 0$.

En mettant à côté de chaque systême de facteurs de la formule $x^3 + mx^2 - nx - p$, le systême de conditions qui lui appartient, on aura

$+ 27p > 0;$

$+ 27p < 0.$

$0.$

$0.$

.

$, m^2 - n > 0.$

$) (n^2 - mp) - (mn - p)^2 > 0, \quad 2m^3 - 9mn + 27p > 0, \quad 4m^2 - 9n > 0.$

$100n(m^2 + n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 < 0.$

$< 0.$

$+ n)^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 < 0, \quad 2m^3 - 9mn + 27p < 0, \quad 4m^2 - 9n > 0;$

$> 0, \quad m^2 - n < 0.$

$^2 - (2m^3 + 17mn + p)^2 > 0, \quad 4m^2 - 9n < 0;$

$) (n^2 - mp) - (mn - p)^2 > 0.$

$- p)^2 < 0, \quad 4m^2 - 9n < 0.$

$x^3 - mx^2 - nx + p =$

Factors	Conditions
$(x+a)(x-a)(x-a)$	$m^2 - n = 0,\ m^3 - p = 0.$
$(x+a)(x-b)(x-b)$	$4(m^2+3n)(n^2+3mp) - (-mn+9p)^2 = 0.$ $m^2 - n < 0.$
$(x+b)(x-a)(x-a)$	$4(m^2+3n)(n^2+3mp) - (-mn+9p)^2 = 0.$ $m^2 - n > 0.$
$(x-a)(x-b)(x+b)$	$mn - p = 0.$ $m^2 - n > 0.$
$(x+a)(x-a)(x-b)$	$mn - p = 0.$ $m^2 - n < 0.$
$(x+a)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$	$2(m^2+n)(n^2+mp) - (-mn+p)^2 = 0.$
$(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$	$2m^3 - mn - p = 0.$
$(x+a)(x-b)(x-c)$	$4(m^2+3n)(n^2+3mp) - (-mn+9p)^2 > 0,$ $mn - p < 0,\ m^2 - n < 0.$
$(x-a)(x+b)(x-c)$	$mn - p > 0.$
$(x-a)(x-b)(x+c)$	$4(m^2+3n)(n^2+3mp) - (-mn+9p)^2 > 0,$ $mn - p < 0,\ m^2 - n > 0.$
$(x+a)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$	$4(m^2-3n)(n^2+3mp) - (-mn+9p)^2 < 0,$ $2(m^2+n)(n^2+mp) - (-mn+p)^2 > 0,$ $2m^3 - mn - p < 0,\ m^2 - n < 0.$
$(x+a)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$	$2(m^2+n)(n^2+mp) - (-mn+p)^2 < 0.$
$(x+b)(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1})$	$4(m^2+3n)(n^2+3mp) - (-mn+9p)^2 < 0,$ $2m^3 - mn - p > 0,\ m^2 - n > 0.$

$$x^3+mx^2-nx+p=\begin{cases}(x+a)\,(x-b)\,(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2=0.\\ (x+a)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1}) & 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2=0.\\ (x+a)\,(x-b)\,(x-c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2>0.\\ (x+a)\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1}) & \begin{cases}4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2<0,\\ 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2>0.\end{cases}\\ (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) & 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2<0.\end{cases}$$

$$x^3-mx^2-nx-p=\begin{cases}(x-a)\,(x+b)\,(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2=0.\\ (x-a)\,(x+b+b\sqrt{-1})\,(x+b-b\sqrt{-1}) & 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2=0.\\ (x-a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2>0.\\ (x-a)\,(x+b+c\sqrt{-1})\,(x+b-c\sqrt{-1}) & \begin{cases}4(m^2+3n)(n^2-3mp)-(mn+9p)^2<0.\\ 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2>0.\end{cases}\\ (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) & 2(m^2+n)(n^2-mp)-(mn+p)^2<0.\end{cases}$$

$$x^3+mx^2+p=\ (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1})$$

$$x^3+mx^2-p=\begin{cases}(x-a)\,(x+a+a\sqrt{-1})\,(x+a-a\sqrt{-1}) & 2m^3-p=0.\\ (x+a)\,(x+a)\,(x-b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4m^3-27p=0.\\ (x+a)\,(x+b)\,(x-c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4m^3-27p>0.\\ (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1}) & 2m^3-p<0.\\ (x-b)\,(x+a+c\sqrt{-1})\,(x+a-c\sqrt{-1}) & 4m^3-27p<0,\ 2m^3-p>0.\end{cases}$$

$$x^3-mx^2+p=\begin{cases}(x+a)\,(x-a+a\sqrt{-1})\,(x-a-a\sqrt{-1}) & 2m^3-p=0.\\ (x-a)\,(x-a)\,(x+b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4m^3-27p=0.\\ (x-a)\,(x-b)\,(x+c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4m^3-27p>0.\\ (x+a)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) & 2m^3-p<0.\\ (x+b)\,(x-a+c\sqrt{-1})\,(x-a-c\sqrt{-1}) & 4m^3-27p<0,\ 2m^3-p>0.\end{cases}$$

$$x^3-mx^2-p=\ (x-a)\,(x+c+b\sqrt{-1})\,(x+c-b\sqrt{-1})$$

$$x^3+nx+p=\begin{cases}(x+a)\ (x-b+a\sqrt{-1})\ (x-b-a\sqrt{-1})\ldots 100n^3-p^2=0.\\ (x+a)\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})\ldots 100n^3-p^2<0.\\ (x+b)\ (x-c+a\sqrt{-1})\ (x-c-a\sqrt{-1})\ldots 100n^3-p^2>0.\end{cases}$$

$$x^3-nx+p=\begin{cases}(x+a)\ (x-b)\ (x-b)\ldots\ldots 4n^3-27p^2=0.\\ (x+a)\ (x-b+b\sqrt{-1})\ (x-b-b\sqrt{-1})\ldots 2n^3-p^2=0.\\ (x+a)\ (x-b)\ (x-c)\ldots\ldots 4n^3-27p^2<0.\\ (x+a)\ (x-b+c\sqrt{-1})\ (x-b-c\sqrt{-1})\begin{cases}4n^3-27p^2<0,\\ 2n^3-p^2>0.\end{cases}\\ (x+a)\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})\ldots 2n^3-p^2<0.\end{cases}$$

$$x^3+nx-p=\begin{cases}(x-a)\ (x+b+a\sqrt{-1})\ (x+b-a\sqrt{-1})\ldots 100n^3-p^2=0.\\ (x-a)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})\ldots 100n^3-p^2<0.\\ (x-b)\ (x+c+a\sqrt{-1})\ (x+c-a\sqrt{-1})\ldots 100n^3-p^2>0.\end{cases}$$

$$x^3-nx-p=\begin{cases}(x-a)\ (x+b)\ (x+b)\ldots\ldots 4n^3-27p^2=0.\\ (x-a)\ (x+b+b\sqrt{-1})\ (x+b-b\sqrt{-1})\ldots 2n^3-p^2=0.\\ (x-a)\ (x+b)\ (x+c)\ldots\ldots 4n^3-27p^2>0.\\ (x-a)\ (x+b+c\sqrt{-1})\ (x+b-c\sqrt{-1})\begin{cases}4n^3-27p^2<0,\\ 2n^3-p^2>0.\end{cases}\\ (x-a)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})\ldots 2n^3-p^2<0.\end{cases}$$

$$x^3+p=(x+a)\ (x-c+b\sqrt{-1})\ (x-c-b\sqrt{-1})$$

$$x^3-p=(x-a)\ (x+c+b\sqrt{-1})\ (x+c-b\sqrt{-1})$$

QUATRIÈME DEGRÉ.

$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a) = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 =$ 1.ere formule.

$(x+a)(x+a)(x+a)(x-a) = x^4 + 2ax^3 - 2a^3x - a^4 =$ 29.me

$(x+a)(x+a)(x-a)(x-a) = x^4 - 2a^2x^2 - a^4 =$ 48.me

Comme mon dessein n'est pas d'épuiser cette méthode-ci, mais seulement de la faire entendre, je vais me borner aux équations dans lesquelles $m = 0$; on aura

$$x^4 + nx^2 + px + q = \left\{\begin{array}{l} (x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1})(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ \quad \ldots \\ (x+a)(x+d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x+d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \end{array}\right.$$

$$x^4 + nx^2 + px - q = \left\{\begin{array}{l} (x+a)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x-c)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ \quad \ldots \\ (x+a)(x-c)(x-d+b\sqrt{-1})(x-d-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x-c)(x-d+a\sqrt{-1})(x-d-a\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x-d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \end{array}\right.$$

$$x^4 + nx^2 - px + q = \left\{ \begin{array}{l} (x-b)(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) \\ \\ (x-a)(x-d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x-d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1}) \\ (x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1})(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \end{array} \right.$$

$$x^4 - nx^2 + px + q = \left\{ \begin{array}{l} (x+a)(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-b)(x+c) \\ (x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) \\ \\ (x+a)(x-b)(x-c)(x+d) \\ (x+a)(x+c)(x-b+d\sqrt{-1})(x-b-d\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x+d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1}) \\ (x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) \end{array} \right.$$

$$x^4 + nx^2 - px - q = \begin{cases} (x-a)(x+b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+b)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x+c)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1}) \\ \ast\ast\ast \\ (x-a)(x+c)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x+c)(x+d+a\sqrt{-1})(x+d-a\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x+d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4 - nx^2 + px - q = \begin{cases} (x+a)(x-b)(x-b)(x-b) \\ (x+a)(x-b)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-b)(x-c) \\ (x+a)(x-b)(x-c)(x-c) \\ (x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ \ast\ast\ast \\ (x+a)(x-b)(x-c)(x-d) \\ (x+a)(x-b)(x-c+d\sqrt{-1})(x-c-d\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-b+d\sqrt{-1})(x-b-d\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-d+b\sqrt{-1})(x-d-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-d)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$x^4 -$

$$x^4 - nx^2 - px + q = \begin{cases} (x-a)(x-a)(x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+b)(x+b)(x-c) \\ (x-a)(x-a)(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x-b)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-c)(x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-c)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1}) \\ (x+a+a\sqrt{-1})(x+a-a\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ \\ (x-a)(x+b)(x+c)(x-d) \\ (x-a)(x-c)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x-d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-b)(x-d)(x+c+a\sqrt{-1})(x+c-a\sqrt{-1}) \\ (x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})(x-a+c\sqrt{-1})(x-a-c\sqrt{-1}) \\ (x+b+a\sqrt{-1})(x+b-a\sqrt{-1})(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4 - nx^2 - px - q = \begin{cases} (x-a)(x+b)(x+b)(x+b) \\ (x-a)(x+b)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+b)(x+b)(x+c) \\ (x-a)(x+b)(x+c)(x+c) \\ (x-a)(x+b)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+c)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+c)(x+b+b\sqrt{-1})(x+b-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+b)(x+c+c\sqrt{-1})(x+c-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+c)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+b)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \\ \\ (x-a)(x+b)(x+c)(x+d) \\ (x-a)(x+b)(x+c+d\sqrt{-1})(x+c-d\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+b)(x+d+c\sqrt{-1})(x+d-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+c)(x+b+d\sqrt{-1})(x+b-d\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+c)(x+d+b\sqrt{-1})(x+d-b\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+d)(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1}) \\ (x-a)(x+d)(x+c+b\sqrt{-1})(x+c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$$

$$x^4 + nx^2 + q = \left\{\begin{array}{l}(x + a\sqrt{-1})\,(x - a\sqrt{-1})\,(x + a\sqrt{-1})\,(x - a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x + a\sqrt{-1})\,(x - a\sqrt{-1})\,(x + b\sqrt{-1})\,(x - b\sqrt{-1}) \\ (x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})\end{array}\right.$$

$$x^4 + nx^2 - q = (x + b)\,(x - b)\,(x + a\sqrt{-1})\,(x - a\sqrt{-1})$$

$$x^4 - nx^2 + q = \left\{\begin{array}{l}(x + a)\,(x + a)\,(x - a)\,(x - a) \\ \text{ou} \\ (x + a)\,(x - a)\,(x + b)\,(x - b) \\ (x + a + b\sqrt{-1})\,(x + a - b\sqrt{-1})\,(x - a + b\sqrt{-1})\,(x - a - b\sqrt{-1})\end{array}\right.$$

$$x^4 - nx^2 - q = (x + a)\,(x - a)\,(x + b\sqrt{-1})\,(x - b\sqrt{-1})$$

$$x^4 + px + q = \left\{\begin{array}{l}(x + b)\,(x + b)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1}) \\ (x + a)\,(x + c)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x + a)\,(x + d)\,(x - c + b\sqrt{-1})\,(x - c - b\sqrt{-1}) \\ (x + b)\,(x + d)\,(x - c + a\sqrt{-1})\,(x - c - a\sqrt{-1}) \\ (x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})\,(x + b + c\sqrt{-1})\,(x + b - c\sqrt{-1})\end{array}\right.$$

$$x^4 + px - q = \left\{\begin{array}{l}(x + a)\,(x - c)\,(x - c + b\sqrt{-1})\,(x - c - b\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x + a)\,(x - c)\,(x - d + b\sqrt{-1})\,(x - d - b\sqrt{-1}) \\ (x + a)\,(x - d)\,(x - c + b\sqrt{-1})\,(x - c - b\sqrt{-1})\end{array}\right.$$

$$x^4 - px + q = \left\{\begin{array}{l}(x - b)\,(x - b)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1}) \\ (x - a)\,(x - c)\,(x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x - a)\,(x - d)\,(x + c + b\sqrt{-1})\,(x + c - b\sqrt{-1}) \\ (x - b)\,(x - d)\,(x + c + a\sqrt{-1})\,(x + c - a\sqrt{-1}) \\ (x + b + a\sqrt{-1})\,(x + b - a\sqrt{-1})\,(x - b + c\sqrt{-1})\,(x - b - c\sqrt{-1})\end{array}\right.$$

$$x^4 - px - q = \left\{\begin{array}{l}(x - a)\,(x + c)\,(x + c + b\sqrt{-1})\,(x + c - b\sqrt{-1}) \\ \text{ou} \\ (x - a)\,(x + c)\,(x + d + b\sqrt{-1})\,(x + d - b\sqrt{-1}) \\ (x - a)\,(x + d)\,(x + c + b\sqrt{-1})\,(x + c - b\sqrt{-1})\end{array}\right.$$

$$x^4 + q = \ldots\ (x + a + a\sqrt{-1})\,(x + a - a\sqrt{-1})\,(x - a + a\sqrt{-1})\,(x - a - a\sqrt{-1})$$

$$x^4 - q = \ldots\ (x + a)\,(x - a)\,(x + a\sqrt{-1})\,(x - a\sqrt{-1})$$

I.

Soit $x^4 + nx^2 + px + q = (x + b)(x + b)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$; donc $a^2 - 2b^2 = n$, $2a^2b = p$, & $b^2(a^2 + b^2) = q$; donc $a^2 = n + 2b^2$, $2nb + 2^2b^3 = p$, $nb^2 + 3b^4 = q$; donc $2^4n^4q - 2^2n^3p^2 - 2^7n^2q^2 + 2^4.3^2np^2q - 3^3p^4 + 2^8q^3 = 0$.

Soit $x^4 + nx^2 + px + q = (x + a)(x + c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$; donc $a + c - 2b = 0$, $a^2 + b^2 - 2ab + ac - 2bc = n$, $(a + c)(a^2 + b^2) - 2abc = p$, $ac.(a^2 + b^2) = q$; donc $c = 2b - a$, $2ab - 3b^2 = n$, $4a^2b - 4ab^2 + 2b^3 = p$, $a(2b - a)(a^2 + b^2) = q$; donc $a = \frac{n + 3b^2}{2b}$, $5b^4 + 4nb^2 + n^2 = pb$, $(3b^4 - 2nb^2 - n^2)(13b^4 + 2.3nb^2 + n^2) = 2^4qb^4$; donc $b^4 = \frac{-2^2nb^2 + pb - n^2}{5}$,

$$2^5.5.11npb^3 + (2^4.11n^3 - 2^6.5^2nq - 3.5.13p^2)b^2 + 2^2p(3.13n^2 + 2^2.5^2q)b + 2^2n^2(41n^2 - 2^2.5^2q) = 0;$$

donc $2^8.5^4n^{12} + 2^{12}.5^2.7n^{10}q + 2^9.3^2.5^2n^9p^2 + 2^{13}.3.241n^8q^2 + 2^{11}.8453n^7p^2q - 2^5.3.26231n^6p^4 + 2^{16}.5^2.7n^6q^3 + 2^{13}.5.923n^5p^2q^2 + 2^{16}.5^4n^4q^4 - 2^9.38389n^4p^4q - 2^{15}.5^4n^3p^2q^3 + 2^5.186157n^3p^6 + 2^9.5^2.431n^2p^4q^2 + 2^7.3^2.5.13.31np^6q - 3^3.(13)^3p^8 + 2^{12}.5^4p^4q^3 = 0$.

Soit $x^4 + nx^2 + px + q = (x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})(x + b + b\sqrt{-1})(x + b - b\sqrt{-1})$; donc $a^2 - b^2 = n$, $2a^2b - 2b^3 = p$, $2b^2(a^2 + b^2) = q$; donc $a^2 = b^2 + n$, $2nb = p$, $2b^2(2b^2 + n) = q$; donc $b = \frac{p}{2n}$; donc $2^2n^4q - 2n^3p^2 - p^4 = 0$.

Le ſyſtème $(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$ $(x + b + c\sqrt{-1})\,(x + b - c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + b)\,(x + b)\,(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$ en faiſant $c = 0$; auquel cas, on auroit la fonction $2^4 n^4 q$ — &c. $= 0$; donc, tant que c ſera > 0, cette fonction ſera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0.

Soit $c = 1$, $b = 2$, $a = 3$, on aura $n = 2$, $p = 2^5$, $q = 5 \cdot 13$; & en ſubſtituant dans la fonction, on aura un reſte poſitif; d'où l'on conclura qu'une des conditions de ce ſyſtème-ci eſt $2^4 n^4 q$ — &c. > 0.

Il peut devenir 2.° $(x + b + b\sqrt{-1})\,(x + b - b\sqrt{-1})$ $(x - b + a\sqrt{-1})\,(x - b - a\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit la fonction $2^2 n^4 q$ — &c. $= 0$; donc, tant que c ſera moindre que b, cette fonction ſera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0.

En y ſubſtituant pour n, p, q, les valeurs précédentes, on aura un reſte négatif, & l'on conclura que la ſeconde condition pour ce ſyſtème-ci eſt $2^2 n^4 q$ — &c. < 0.

Le ſyſtème $(x - c + a\sqrt{-1})\,(x - c - a\sqrt{-1})$ $(x + c + b\sqrt{-1})\,(x + c - b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + b + b\sqrt{-1})\,(x + b - b\sqrt{-1})\,(x - b + a\sqrt{-1})$ $(x - b - a\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit la fonction $2^2 n^4 q$ — &c. $= 0$; donc, tant que c ſera moindre que b, cette fonction ſera toûjours plus grande ou toûjours moindre que 0; & il eſt évident que c'eſt plus grande que 0 qu'elle ſera, ſans quoi, les nombres qui ſatisferoient au ſyſtème précédent, ſatisferoient auſſi à celui-ci; la condition pour ce ſyſtème-ci eſt donc $2^2 n^4 q$ — &c. > 0.

I I.

Soit $x^4 + nx^2 + px - q = (x+a)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$, on aura $2^2(13)^2 n^3 - 3^2 p^2 = 0$, $2 \cdot 5 n^2 - 3q = 0$.

Soit $x^4 + nx^2 + px - q = \begin{cases}(x+a)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})\end{cases}$ en changeant le ſigne de q dans l'équation que nous avons trouvée pour le ſecond ſyſtème de la première formule, on aura $2^8 \cdot 5^4 n^{12} - 2^{12} \cdot 5^2 \cdot 7 n^{10} q + 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 n^9 p^2 + 2^{13} \cdot 3 \cdot 241 n^8 q^2 - 2^{11} \cdot 8453 n^7 p^2 q - 2^5 \cdot 3 \cdot 26231 n^6 p^4 - 2^{16} \cdot 5^2 \cdot 7 n^6 q^3 + 2^{13} \cdot 5 \cdot 923 n^5 p^2 q^2 + 2^{16} \cdot 5^4 n^4 q^4 + 2^9 \cdot 38389 n^4 p^4 q + 2^{15} \cdot 5^4 n^3 p^2 q^3 + 2^5 \cdot 186157 n^3 p^6 + 2^9 \cdot 5^2 \cdot 431 n^2 p^4 q^2 - 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31 n p^6 q - 3^3 (13)^3 p^8 - 2^{12} \cdot 5^4 p^4 q^3 = 0$.

Soit $x^4 + nx^2 + px - q = \begin{cases}(x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x-c)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})\end{cases}$ on aura $2^4 3^4 n^4 q - 2^2 \cdot 3^5 n^3 p^2 + 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 n^2 q^2 - 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot n p^2 q - 3^3 \cdot 7^3 p^4 + 2^8 \cdot 5^4 q^3 = 0$.

Les deux ſyſtèmes $\begin{cases}(x+a)(x-b)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})\end{cases}$ ſont diſtingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^8 \cdot 5^4 n^{12} -$ &c. $= 0$; mais il faut les diſtinguer l'un de l'autre, c'eſt-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de n, de p & de q la plus ſimple poſſible, qui ſoit toûjours plus grande que o dans l'un, & toûjours moindre que o dans l'autre. Cette fonction ſera $= 0$ dans le cas $(x+a)(x-b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ commun à ces deux ſyſtèmes.

La ſuite des fonctions parmi leſquelles doit ſe trouver celle dont il s'agit, eſt $An^2 + Bq$, $An^3 + Bnq + Cp^2$, $An^4 + Bn^2q + Cnp^2 + Dq^2$, $An^5 + Bn^3q + Cn^2p^2 + Dnq^2 + Ep^2q$, $An^6 + Bn^4q + Cn^3p^2 + Dn^2q^2 + Enp^2q + Fp^4 + Gq^3$, &c.

Essayons d'abord cette fonction-ci $2.5n^2 - 3q$ qui a déjà la dernière des trois conditions que doit avoir celle que nous cherchons.

Dans le premier système, on a $a - b - 2c = 0$, $2bc + c^2 = n$, $2abc + (a - b)(a^2 + c^2) = p$, $ab.(a^2 + c^2) = q$. Soit $b = c + \beta$, on aura $n = 3c^2 + 2c\beta$, $q = 2.3.5c^4 + 2.29c^3\beta + 37c^2\beta^2 + 2.5c\beta^3 + \beta^4$; & en substituant dans la fonction $2.5n^2 - 3q$, on aura

$$\begin{array}{lllll} -2.3^2.5c^4 & -2.3.29c^3\beta & -3.37c^2\beta^2 & -2.3.5c\beta^3 & -3\beta^4 < 0. \\ +2.3^2.5 & +2^3.3.5 & +2^3.5 & & \end{array}$$

Dans le second système, on a $a - 2b - c = 0$, $2bc + b^2 = n$, $2abc + (a - c)(a^2 + b^2) = p$, $ac(a^2 + b^2) = q$.

Soit encore $b = c + \beta$, on aura $n = 3c^2 + 2^2c\beta + \beta^2$, $q = 2.3.5c^4 + 2.31c^3\beta + 43c^2\beta^2 + 2.5c\beta^3$; & en substituant dans la fonction, on aura

$$\begin{array}{lllll} +2.3^2.5c^4 & & & & \\ -2.3^2.5 & & & & \\ & +2^4.3.5c^3\beta & +2^2.5.11c^2\beta^2 & +2^4.5c\beta^3 & +2.5\beta^4 > 0. \\ & -2.3.31 & -3.43 & -2.3.5 & \end{array}$$

Par conséquent, la condition pour ce système-ci $(x + a)(x - b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$ est $2.5n^2 - 3q < 0$; celle pour celui-ci $(x + a)(x - c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ est $2.5n^2 - 3q > 0$.

Les deux systèmes $\begin{cases} (x + a)(x - c)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1}) \\ (x + b)(x - c)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1}) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^4.3^4n^4q$ — &c. $= 0$.

Il s'agit de les distinguer l'un de l'autre: essayons encore cette fonction-ci $2.5n^2 - 3q$.

Dans le premier système, on a $a - 3c = 0$,

auquel cas, on auroit $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c. $=$ o, & $2 . 5 n^2 - 3 q < 0$; donc, tant que a ſera plus grand que b, la fonction $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c. ſera plus grande ou moindre que o.

Soit $d = 7$, $c = 8$, $b = 18$, $a = 22$, on aura $n = 1$, $p = 3956$, $q = 65648$. Subſtituez ces valeurs, & vous ſaurez ſi c'eſt plus grande ou moindre que o qu'eſt la fonction $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c.

Il peut devenir 2.° $(x + a)(x - c)(x - c + b\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ en faiſant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^4 . 3^4 n^4 q$ — &c. $=$ o, & $2 . 5 n^2 - 3 q < 0$; donc, tant que d ſera moindre que c, la fonction $2^4 . 3^4 n^4 q$ — &c. ſera plus grande ou moindre que o. Subſtituez-y les valeurs précédentes de n, de p & de q, & vous ſaurez à quoi vous en tenir; vous aurez donc pour ce ſyſtème-ci $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c. $>< 0$, $2^4 . 3^4 n^4 q$ — &c. $>< 0$, $2 . 5 n^2 - 3 q < 0$.

Le ſyſtème $(x + a)(x - d)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x - c)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1}$ en faiſant $a = b$; auquel cas, on auroit $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c. $=$ o, & $2 . 5 n^2 - 3 q > 0$.

Il peut devenir 2.° $(x + a)(x - c)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1})$ en faiſant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^4 . 3^4 n^4 q$ — &c. $=$ o, & $2 . 5 n^2 - 3 q < 0$.

Le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci ſera donc $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c. $>< 0$, $2^4 . 3^4 n^4 q$ — &c. $>< 0$.

Le ſyſtème $(x + b)(x - c)(x - d + a\sqrt{-1})(x - d - a\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x - b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$ en faiſant

$a = b$; auquel cas, on auroit $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c. $= 0$; & $2 . 5 n^2 - 3q < 0$.

Il peut devenir 2.° $(x + b)(x - c)(x - c + a\sqrt{-1})$ $(x - c - a\sqrt{-1})$ en faisant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^4 . 3^4 n^4 q$ — &c. $= 0$, & $2 . 5 n^2 - 3q > 0$.

Le système de conditions pour ce système de facteurs-ci est donc $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c. $>< 0$, $2^4 . 3^4 n^4 q$ — &c. $>< 0$.

Le système $(x + b)(x - d)(x - c + a\sqrt{-1})$ $(x - c - a\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x - c)$ $(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c. $= 0$, & $2 . 5 n^2 - 3q < 0$.

Il peut devenir 2.° $(x + b)(x - c)(x - c + a\sqrt{-1})$ $(x - c - a\sqrt{-1})$ en faisant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^4 . 3^4 n^4 q$ — &c. $= 0$, & $2 . 5 n^2 - 3q > 0$.

Le système de conditions pour ce système de facteurs-ci est donc $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c. $>< 0$, $2^4 . 3^4 n^4 q$ — &c. $>< 0$, $2 . 5 n^2 - 3q > 0$.

III.

Les systèmes de conditions des systèmes de facteurs de la formule $x^4 + nx^2 - px + q$ sont les mêmes que ceux des systèmes correspondans de la formule $x^4 + nx^2 + px + q$.

IV.

Soit $x^4 - nx^2 + px + q = (x+a)(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$
on aura $4n^3 - p^2 = 0$, $2n^2 - q = 0$.

Soit $x^4 - nx^2 + px + q = \begin{cases} (x+a)(x-b)(x-b)(x+c) \\ (x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$
on aura $2^4 n^4 q + 2^2 n^3 p^2 - 2^7 n^2 q^2 - 2^4 . 3^2 n p^2 q - 3^3 p^4 + 2^8 q^3 = 0$.

Soit $x^4 - nx^2 + px + q = \begin{cases} (x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \end{cases}$ en changeant le ſigne de n dans l'équation que nous avons trouvée pour le ſecond ſyſtème de la première formule, on aura $2^8 . 5^4 n^{12} + 2^{12} . 5^2 . 7 n^{10} q - 2^9 . 3^2 . 5^2 n^9 p^2 + 2^{13} . 3 . 241 n^8 q^2 - 2^{11} . 8453 n^7 p^2 q - 2^5 . 3 . 26231 n^6 p^4 + 2^{16} . 5^2 . 7 n^6 q^3 - 2^{13} . 5 . 923 n^5 p^2 q^2 + 2^{16} . 5^4 n^4 q^4 - 2^9 . 38389 n^4 p^4 q + 2^{15} . 5^4 n^3 p^2 q^3 - 2^5 . 186157 n^3 p^6 + 2^9 . 5^2 . 431 n^2 p^4 q^2 - 2^7 . 3^2 . 5 . 13 . 31 n p^6 q - 3^3 (13)^3 p^8 + 2^{12} . 5^4 p^4 q^3 = 0.$

Soit $x^4 - nx^2 + px + q = \begin{cases} (x+a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1}) \end{cases}$ on aura $2^2 n^4 q + 2 n^3 p^2 - p^4 = 0.$

Les trois ſyſtèmes $\begin{cases} (x+a)(x-b)(x-b)(x+c) \\ (x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1}) \\ (x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1}) \end{cases}$ ſont diſtingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^4 n^4 q + \&c. = 0$; mais il faut les diſtinguer entr'eux.

Les deux premiers ont un cas commun $(x+a)(x+a)(x-a)(x-a)$, dans lequel on auroit la fonction $n^2 - 4q = 0$; par conſéquent, cette fonction doit être toûjours plus grande que o dans l'un, & toûjours moindre que o dans l'autre. Je trouve $n^2 - 4q > 0$ pour le ſyſtème $(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$, & par conſéquent $n^2 - 4q < 0$ pour le ſyſtème $(x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$.

Les deux derniers ont un cas commun qui eſt $(x+a)(x+a)(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$, dans lequel la fonction, qui eſt toûjours plus grande que o dans l'un, & toûjours moindre que o dans l'autre, devient $= 0$; la fonction $2n^2 - q$ a cette dernière propriété.

Essayons si elle n'auroit pas aussi les deux autres; je trouve $2n^2 - q > 0$ pour le système $(x + a)(x + a)(x - a + b\sqrt{-1})(x - a - b\sqrt{-1})$, & $2n^2 - q < 0$ pour le système $(x + b)(x + b)(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$.

Les deux systèmes $\left\{\begin{array}{l}(x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})\\(x+a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})\end{array}\right.$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^8 . 5^4 n^{12} + \&c. = 0$. Il s'agit de les distinguer l'un de l'autre, c'est-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de n, de p & de q, qui soit toûjours plus grande que o dans l'un, & toûjours moindre que o dans l'autre; cette fonction deviendra $= 0$, les deux systèmes devenant $(x + a)(x + a)(x - a + a\sqrt{-1})(x - a - \sqrt{-1})$.

Essayons d'abord la fonction $2n^2 - q$, qui a déjà la dernière des trois conditions que doit avoir celle que nous cherchons.

Dans le premier système, on a $a + c - 2b = 0$, $2bc - b^2 = n$, $-2abc + (a + c)(a^2 + b^2) = p$, $ac(a^2 + b^2) = q$; donc $a = 2b - c$. Soit $b = c + \beta$, $2c = b + \gamma$, on aura $c = \beta + \gamma$, $b = 2\beta + \gamma$; $a = 3\beta + \gamma$; donc $n = 2\beta\gamma + \gamma^2$, $q = 3.13\beta^4 + 2.41\beta^3\gamma + 59\beta^2\gamma^2 + 2.3^2\beta\gamma^3 + 2\gamma^4$; & en substituant dans la fonction $2n^2 - q$, on aura

$$-3.13\beta^4 - 2.41\beta^3\gamma \begin{array}{c}-59\\+2^3\end{array}\beta^2\gamma^2 \begin{array}{c}-2.3^2\\+2^3\end{array}\beta\gamma^3 \begin{array}{c}-2\\+2\end{array}\gamma^4 < 0.$$

Dans le second système, on a $a + c - 2b = 0$, $2ab - b^2 = n$, $-2abc + (a + c)(b^2 + c^2) = p$, $ac(b^2 + c^2) = q$. Soit $b = \alpha + c$, $a = 2\alpha + c$, on aura $n = 3\alpha^2 + 2^2\alpha c + c^2$,

$$q = 2\alpha^3 c + 5\alpha^2 c^2 + 2.3\alpha c^3 + 2c^4;$$

& en ſubſtituant dans la fonction $2n^2 - q$, on aura

$$\substack{2\cdot 3^2 \\ -2}\,a^4 + \substack{2^4\cdot 3 \\ -5}\,a^3c + 2^2\cdot 11\,a^2c^2 + \substack{2^4 \\ -2\cdot 3}\,ac^3 + \substack{2 \\ -2}\,c^4 > 0.$$

Par conſéquent, la condition pour le ſyſtème $(x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ eſt $2n^2 - q < 0$; celle pour le ſyſtème $(x+a)(x+c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$ eſt $2n^2 - q > 0$.

Les deux ſyſtèmes $\left\{\begin{array}{l}(x+a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})\end{array}\right.$ ſont diſtingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^2n^4q + 2n^3p^2 - p^4 = 0$. Il s'agit de les diſtinguer l'un de l'autre.

Je trouve $2n^2 - q > 0$ pour le ſyſtème $(x+a)(x+c)$ $(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$, & $2n^2 - q < 0$ pour le ſyſtème $(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})$ $(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$.

1.° Le ſyſtème $(x+a)(x-b)(x-c)(x+d)$ peut devenir $(x+a)(x-b)(x-b)(x+c)$ en faiſant $c = b$; auquel cas, on auroit $2^4n^4q +$ &c. $= 0$, & $n^2 - 4q > 0$; par conſéquent le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci eſt $2^4n^4q +$ &c. $>< 0$, $n^2 - 4q > 0$.

2.° Le ſyſtème $(x+a)(x+c)(x-b+d\sqrt{-1})$ $(x-b-d\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+a)(x-b)$ $(x-b)(x+c)$ en faiſant $d = 0$; auquel cas, on auroit $2^4n^4q +$ &c. $= 0$, & $n^2 - 4q > 0$; la première condition pour ce ſyſtème-ci ſera donc $2^4n^4q +$ &c. $>< 0$.

Il peut devenir 2.° $(x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})$ $(x-a-b\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b = a$; auquel cas,

on auroit $2^4 n^4 q + \&c. = 0$; ce qui donne la même condition que la précédente, & $n^2 - 4q < 0$, $2n^2 - q > 0$.

Il peut devenir 3.° $(x + a)(x + c)(x - b + c\sqrt{-1})$ $(x - b - c\sqrt{-1})$ en faisant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^8 . 5^4 n^{12} + \&c. = 0$, & $2n^2 - q > 0$.

Le système de conditions du système $(x + a)(x + c)$ $(x - b + d\sqrt{-1})(x - b - d\sqrt{-1})$ est donc $2^4 n^4 q + \&c. >< 0$, $2^8 . 5^4 n^{12} + \&c. >< 0$, $2n^2 - q > 0$. Nous mettons toûjours ce signe-ci $><$ au lieu du vrai, que l'on déterminera par une seule expérience.

3.° Le système $(x + a)(x + d)(x - b + c\sqrt{-1})$ $(x - b - c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x + c)$ $(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ en faisant $d = c$; auquel cas, on auroit $2^8 . 5^4 n^{12} + \&c. = 0$, & $2n^2 - q > 0$; par conséquent, une des conditions de ce système-ci est $2^8 . 5^4 n^{12} + \&c. >< 0$.

Il peut devenir 2.° $(x + a)(x + c)(x - b + b\sqrt{-1})$ $(x - b - b\sqrt{-1})$ en faisant $c = b$; auquel cas, on auroit $2^2 n^4 q + 2n^3 p^2 - p^4 = 0$, & $2n^2 - q > 0$.

Le système de conditions du système $(x + a)(x + d)$ $(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$ est donc $2^8 . 5^4 n^{12} + \&c. >< 0$, $2^2 n^4 q + 2n^3 p^2 - p^4 >< 0$, $2n^2 - q > 0$.

4.° Le système $(x + a)(x + d)(x - c + b\sqrt{-1})$ $(x - c - b\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x + a)(x + c)$ $(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ en faisant $a = b$; auquel cas, on auroit $2^8 . 5^4 n^{12} + \&c. = 0$, & $2n^2 - q < 0$; une des conditions de ce système-ci est donc $2^8 . 5^4 n^{12} + \&c. >< 0$.

Il peut devenir 2.° $(x+a)(x+c)(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$ en faisant $c=b$; auquel cas, on auroit $2^2n^4q+2n^3p^2-p^4 = 0$, & $2n^2-q>0$.

Le système de conditions du système $(x+a)(x+d)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ est donc $2^8.5^4n^{12}+$ &c. $><0$, $2^2n^4q+2n^3p^2-p^4><0$.

5.° Le système $(x+b)(x+d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ en faisant $d=c=b$; auquel cas, on auroit 2^4n^4q+ &c. $=0$, & $2n^2-q<0$; une des conditions de ce système-ci est donc 2^4n^4q+ &c. $><0$.

Il peut devenir 2.° $(x+a)(x+c)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ en faisant $a=b$; auquel cas, on auroit $2^8.5^4n^{12}+$ &c. $=0$, & $2n^2-q<0$.

Le système de conditions du système $(x+b)(x+d)(x-c+a\sqrt{-1})(x-c-a\sqrt{-1})$ est donc 2^4n^4q+ &c. $><0$, $2^8.5^4n^{12}+$ &c. $><0$, $2n^2-q<0$.

6.° Le système $(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ peut devenir 1.° $(x+a)(x+a)(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})$ en faisant $c=0$; auquel cas, on auroit 2^4n^4q+ &c. $=0$, & $n^2-4q<0$, $2n^2-q>0$.

Il peut devenir 2.° $(x-a+a\sqrt{-1})(x-a-a\sqrt{-1})(x+a+b\sqrt{-1})(x+a-b\sqrt{-1})$ en faisant $a=b$; auquel cas, on auroit $2^2n^4q+2n^3p^2-p^4=0$, & $2n^2-q<0$.

Le système de conditions du système $(x-a+b\sqrt{-1})(x-a-b\sqrt{-1})(x+a+c\sqrt{-1})(x+a-c\sqrt{-1})$ est donc 2^4n^4q+ &c. $><0$, $2^2n^4q+2n^3p^2-p^4><0$, $n^2-4q<0$.

Soit $x^4 - nx^2 + px - q = \begin{cases} (x+a)\,(x-c)\,(x-b+b\sqrt{-1})\,(x-b-b\sqrt{-1}) \\ (x+a)\,(x-b)\,(x-c+c\sqrt{-1})\,(x-c-c\sqrt{-1}) \end{cases}$

on aura $2^2 n^4 q - 2n^3 p^2 + p^4 = 0$.

Soit $x^4 - nx^2 + px - q = \begin{cases} (x+a)\,(x-c)\,(x-b+c\sqrt{-1})\,(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)\,(x-b)\,(x-c+b\sqrt{-1})\,(x-c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$

on aura $2^8.5^4 n^{12} - 2^{12}.5^2.7 n^{10} q - 2^9.3^2.5^2 n^9 p^2 + 2^{13}.3.241 n^8 q^2 + 2^{11}.8453 n^7 p^2 q - 2^5.3.26231 n^6 p^4 - 2^{16}.5^2.7 n^6 q^3 - 2^{13}.5.923 n^5 p^2 q^2 + 2^{16}.5^4 n^4 q^4 + 2^9.38389 n^4 p^4 q - 2^{15}.5^4 n^3 p^2 q^3 - 2^5.186157 n^3 p^6 + 2^9.5^2.431 n^2 p^4 q^2 + 2^7.3^2.5.13.31 n p^6 q - 3^3(13)^3 p^8 - 2^{12}.5^4 p^4 q^3 = 0$.

Les deux systêmes $\begin{cases} (x+a)\,(x-b)\,(x-b)\,(x-c) \\ (x+a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-c) \end{cases}$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^4 n^4 q$ — &c. $= 0$; mais il faut les distinguer l'un de l'autre, c'est-à-dire, qu'il faut trouver une fonction de n, de p & de q, la plus simple possible, qui soit toûjours plus grande que o dans l'un, & toûjours moindre que o dans l'autre. Cette fonction sera $= 0$ dans le cas $(x+a)\,(x-b)\,(x-b)\,(x-b)$ commun aux deux systêmes.

Dans le premier systême, on a $a - 2b - c = 0$, $ac + 2b.(a-c) - b^2 = n$, $2abc + b^2.(a-c) = p$, $ab^2c = q$; donc $a = 2b + c$, $3b^2 + 2bc + c^2 = n$, $2bc.(2b+c) + 2b^3 = p$, $b^2c.(2b+c) = q$. Je fais $b = c + \beta$, j'aurai $n = 2.3c^2 + 2^2 c\beta + 3\beta^2$,

$p = 2^3 c^3 + 2^4 c^2 \beta + 2.5 c \beta^2 + 2\beta^3$,

$q = 3c^4 + 2^3 c^3 \beta + 7 c^2 \beta^2 + 2 c \beta^3$.

Dans le second systême, on a $a - b - 2c = 0$, $ab + 2c.(a-b) - c^2 = n$, $2abc + c^2(a-b) = p$, $abc^2 = q$; donc $a = b + 2c$, $n = b^2 + 2bc + 3c^2$, $p = 2bc(b+2c) + 2c^3$, $q = bc^2.(b+2c)$.

à c, la fonction $An^3 + Bnq + Cp^2$ doit être $= 0$; donc $2^2 . 3^3 A + 3^2 B + 2^5 C = 0$; donc $B = \frac{-2^2 . 3^3 A - 2^5 C}{3^2}$.

En substituant cette valeur de B par-tout, & en remplissant les conditions, on aura 1.° $3^3 A + 2C < 0$, $3^2 . 17 A + 2 . 7 C < 0$, $3^3 . 7^2 A + 2 . 73 C < 0$, $2 . 3^3 A + 7C < 0$, $3^3 A + 2^2 C < 0$.

2.° On aura $3^3 A + 2C > 0$, $3^2 . 7 A + 2C > 0$; $3^5 A + 2C > 0$, $A > 0$.

De ce que $3^3 A + 2C$ est en même temps < 0 & > 0, il suit que $3^3 A + 2C = 0$.

Soit $A = 2$, on aura $C = -3^3$, $B = 2^3 . 3^2$, & toutes les conditions seront remplies ; par conséquent pour ce système-ci $(x + a)(x - b)(x - b)(x - c)$ on aura $2n^3 + 2^3 . 3^2 nq - 3^3 p^2 < 0$, & pour celui-ci $(x + a)(x - b)(x - c)(x - c)$ on aura $2n^3 + 2^3 . 3^2 nq - 3^3 p^2 > 0$.

Les deux systèmes $\left\{ \begin{array}{l} (x + a)(x - b)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1}) \\ (x + a)(x - c)(x - c + b\sqrt{-1})(x - c - b\sqrt{-1}) \end{array} \right.$ sont distingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^4 . 3^4 n^4 q +$ &c. $= 0$. Il faut les distinguer l'un de l'autre ; la fonction qui sera toûjours plus grande que 0 dans l'un, & toûjours moindre que 0 dans l'autre, sera $= 0$ dans le cas $(x + a)(x - b)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$ commun aux deux systèmes. Cette fonction-ci $2 . 3n^2 - 5^2 q$ a la dernière de ces trois propriétés. Essayons d'abord si elle n'auroit pas aussi les deux autres.

Dans le premier système, on a $n = 2 . 3 . b^2 - c^2$, $q = 3b^4 + 3b^2c^2$. Soit $b^2 = c^2 + \beta^2$, on aura $n = 5c^2 \pm 2 . 3\beta^2$, $q = 2 . 3c^4 \pm 3^2 c^2 \beta^2 + 3\beta^4$;

Dans le ſecond ſyſtème, on a $a - b - 2c = 0$; $n = b^2 + 2bc + 2c^2$, $p = 2c(b^2 + 2bc + 2c^2)$, $q = 2bc^2(b + 2c)$; & en faiſant $b = c + \beta$, on aura $n = 5c^2 + 2^2c\beta + \beta^2$, $p = 2.5c^3 + 2^3c^2\beta + 2c\beta^2$, $q = 2.3c^4 + 2^3c^3\beta + 2c^2\beta^2$.

Il eſt aiſé de voir que la fonction $2.3n^2 - 5^2q$, qui a la dernière des trois propriétés que doit avoir celle que nous cherchons, ne ſauroit avoir les deux autres; parce qu'en y ſubſtituant les valeurs de n & de q, le coëfficient de la plus haute puiſſance de β ſera poſitif dans les deux cas; la fonction qui ſuit celle-là, & qu'il faut eſſayer, eſt $An^3 + Bnq + Cp^2$; en y ſubſtituant pour n, p, q, leurs valeurs, dans le premier cas, on aura
$$\begin{array}{l} + 5^3Ac^6 \\ + 2.3.5B \\ + 2^2.5^2C \end{array}$$
$$\begin{array}{lll} + 2.3^2.5^2Ac^5\beta & + 2.3.5.23Ac^4\beta^2 & + 2^6.3^2Ac^3\beta^3 \\ + 2^2.29B & + 2.89B & + 2^3.17B \\ + 2^3.5.11C & + 2^2.201C & + 2^4.7^2C \end{array}$$
$$\begin{array}{lll} + 2^2.3.23Ac^2\beta^4 & + 2^3.3^3Ac\beta^5 & + 2^3A\beta^6 < 0. \\ + 2^2.13B & + 2^3B & + 2^4C \\ + 2^4.3^3C & + 2^7C & \end{array}$$

Dans le ſecond cas, on aura
$$\begin{array}{ll} + 5^3Ac^6 & + 2^2.3.5^2Ac^5\beta \\ + 2.3.5B & + 2^6B \\ + 2^2.5^2C & + 2^5.5C \end{array}$$
$$\begin{array}{lll} + 3^2.5.7Ac^4\beta^2 & + 2^3.23Ac^3\beta^3 & + 3^2.7Ac^2\beta^4 \\ + 2^4.3B & + 2^4B & + 2B \\ + 2^3.13C & + 2^5C & + 2^2C \end{array}$$
$$+ 2^2.3Ac\beta^5 + A\beta^6 > 0.$$

β étant $= 0$, la fonction $An^3 + Bnq + Cp^2$ eſt $= 0$

A étant un nombre poſitif, ces quatre conditions-ci $7A + 2^3 . 31C < 0$, $89A + 2^2 . 97C < 0$, $29A + 2^2 . 19C < 0$, $A + 2C < 0$, exigent que C ſoit un nombre négatif, & les ſix autres ſont en même temps remplies; il ne s'agit donc plus que de trouver pour C un nombre qui ſatisfaſſe aux quatre conditions $A + \frac{2^3 . 31}{7} C < 0$, $A + \frac{2^2 . 97}{89} C < 0$, $A + \frac{2^2 . 19}{29} C < 0$, $A + 2C < 0$.

$A + 2C$ eſt celle de ces conditions où le coëfficient de C eſt le moindre; par conſéquent, en faiſant $A + 2C = 0$, les trois autres ſe trouveront remplies.

Soit $A = 2$, on aura $C = -1$;

donc $B = \frac{-5^2 . 2 + 2^2 . 5}{2 . 3} = \frac{2 . 5 (2 - 5)}{2 . 3} = -5$.

On aura donc pour ce ſyſtème-ci

$(x + a)(x - c)(x - b + b\sqrt{-1})(x - b - b\sqrt{-1})$,

$2n^3 - 5nq - p^2 < 0$;

& pour celui-ci

$(x + a)(x - b)(x - b + c\sqrt{-1})(x - b - c\sqrt{-1})$,

$2n^3 - 5nq - p^2 > 0$.

Les deux ſyſtèmes $\begin{cases} (x+a)(x-c)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1}) \\ (x+a)(x-b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1}) \end{cases}$ ſont diſtingués de tous ceux de leur formule par la condition $2^8 . 5^4 n^{12}$ — &c. $= 0$. Il faut les diſtinguer l'un de l'autre; je trouve $2 . 3n^2 - 5^2 q > 0$ pour le premier, & $2 . 3n^2 - 5^2 q < 0$ pour le ſecond.

1.er Le ſyſtème $(x + a)(x - b)(x - c)(x - d)$ peut devenir $(x + a)(x - b)(x - b)(x - c)$ en faiſant $c = b$; par conſéquent, on aura $2^4 n^4 q$ = &c. $\gtrless 0$, $2n^3 + 2^3 . 3^2 nq - 3^3 p^2 \lessgtr 0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)$ en faiſant $d = c$; par conſéquent, on aura $2^4 n^4 q - \&c. >< 0$, $2n^3 + 2^3 . 3^2 n^2 - 3^3 p^2 > 0$.

Le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème-ci eſt donc $2^4 n^4 q - \&c. >< 0$.

2.me Le ſyſtème $(x+a)(x-b)(x-c+d\sqrt{-1})(x-c-d\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c)(x-c)$ en faiſant $d = 0$; par conſéquent, on aura $2^4 n^4 q - \&c. >< 0$, $2n^3 + 2^3 . 3^2 nq - 3^3 p^2 > 0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})(x-b-c\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$; par conſéquent, on aura $2^4 . 3^4 n^4 q + \&c. >< 0$, $2 . 3n^2 - 5^2 q > 0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$ en faiſant $d = c$; par conſéquent, on aura $2^2 n^4 q - 2n^3 p^2 + p^4 >< 0$, $2n^3 - 5nq - p^2 > 0$.

Le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci eſt donc $2^4 . n^4 q - \&c. >< 0$, $2^4 . 3^4 n^4 q + \&c. >< 0$, $2^2 n^4 q - 2n^3 p^2 + p^4 >< 0$, $2n^3 + 2^3 . 3^2 nq - 3^3 p^2 > 0$, $2 . 3n^2 - 5^2 q > 0$, $2n^3 - 5nq - p^2 > 0$.

3.me Le ſyſtème $(x+a)(x-b)(x-d+c\sqrt{-1})(x-d-c\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c+c\sqrt{-1})(x-c-c\sqrt{-1})$ en faiſant $d = c$; par conſéquent, on aura $2^2 n^4 q - 2n^3 p^2 + p^4 >< 0$, $2n^3 - 5nq - p^2 > 0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ en faiſant $c = b$; par conſéquent, on aura $2^8 . 5^4 n^{12} - \&c. >< 0$, $2 . 3n^2 - 5^2 q < 0$.

Le ſyſtème de conditions pour ce ſyſtème de facteurs-ci eſt donc $2^2 n^4 q - 2n^3 p + p^4 >< 0$, $2^8 . 5^4 n^{12} - \&c. >< 0$, $2n^3 - 5nq - p^2 > 0$, $2 . 3n^2 - 5^2 q < 0$.

4.me

4.me Le système $(x+a)(x-c)(x-b+d\sqrt{-1})$ $(x-b-d\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x-b)$ $(x-b)(x-c)$ en faisant $d=0$; par conséquent, on aura 2^4n^4q — &c. $><0$, $2n^3+2^3.3^2nq-3^3p^2<0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-b+c\sqrt{-1})$ $(x-b-c\sqrt{-1})$ en faisant $c=b$; par conséquent, on aura $2^4.3^4n^4q$ + &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q>0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-c)(x-b+c\sqrt{-1})$ $(x-b-c\sqrt{-1})$ en faisant $d=c$; par conséquent, on aura $2^8.5^4n^{12}$ — &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q>0$.

Le système de conditions de ce système de facteurs-ci est donc 2^4n^4q — &c. $><0$, $2^4.3^4n^4q$ + &c. $><0$, $2^8.5^4n^{12}$ — &c. $><0$, $2n^3+2^3.3^2nq-3^3p^2<0$, $2.3n^2-5^2q>0$.

5.me Le système $(x+a)(x-c)(x-d+b\sqrt{-1})$ $(x-d-b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x-c)$ $(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ en faisant $d=c$; par conséquent, on aura $2^4.3^4n^4q$ + &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q<0$.

Il peut devenir $(x+a)(x-b)(x-c+b\sqrt{-1})$ $(x-c-b\sqrt{-1})$ en faisant $c=b$; par conséquent, on aura $2^8.5^4n^{12}$ — &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q<0$.

Le système de conditions pour ce système de facteurs-ci est donc $2^4.3^4n^4q$ + &c. $><0$, $2^8.5^4n^{12}$ — &c. $><0$, $2.3n^2-5^2q<0$.

6.me Le système $(x+a)(x-d)(x-b+c\sqrt{-1})$ $(x-b-c\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x-c)$ $(x-b+b\sqrt{-1})(x-b-b\sqrt{-1})$ en faisant

IX.

Soit $x^4 + nx^2 + q = (x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$, on aura $n^2 - 4q = 0$.

Le syſtème $(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})(x + b\sqrt{-1})(x - b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$ en faiſant $b = a$; par conſéquent, on aura la fonction $n^2 - 4q >< 0$.

Soit $b = 1$, & $a = 2$, on aura $n = 5$, $q = 2^2$; & en ſubſtituant dans la fonction, on aura $5^2 - 2^2.2^2 > 0$; la condition pour ce ſyſtème-ci eſt donc $n^2 - 4q > 0$.

Le ſyſtème $(x + b + a\sqrt{-1})(x + b - a\sqrt{-1})(x - b + a\sqrt{-1})(x - b - a\sqrt{-1})$ peut devenir $(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$ en faiſant $b = 0$; par conſéquent, on aura la fonction $n^2 - 4q >< 0$; & il eſt évident que c'eſt moindre que 0 qu'elle eſt, puiſque lorſqu'elle eſt plus grande que 0, la formule appartient au ſyſtème précédent; la condition pour ce ſyſtème-ci eſt donc $n^2 - 4q < 0$.

X.

La formule $x^4 + nx^2 - q$ appartient toûjours à ce ſyſtème-ci $(x + b)(x - b)(x + a\sqrt{-1})(x - a\sqrt{-1})$, quels que ſoient les nombres n & q.

XI.

Soit $x^4 - nx^2 + q = (x + a)(x + a)(x - a)(x - a)$ on aura $n^2 - 4q = 0$.

Le ſyſtème $(x + a)(x - a)(x + b)(x - b)$ peut devenir $(x + a)(x - a)(x + a)(x - a)$ en faiſant $b = a$; par conſéquent, on aura $n^2 - 4q >< 0$. Je trouve $n^2 - 4q > 0$.

Le système $(x+b)(x+d)(x-c+a\sqrt{-1})$ $(x-c-a\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+b)(x+b)$ $(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ en faisant $d=c=b$; par conséquent, on aura $3^3p^4-2^8q^3 >< 0$.

Il peut devenir $(x+a)(x+e)(x-b+a\sqrt{-1})$ $(x-b-a\sqrt{-1})$ en faisant $a=b$; par conséquent, on aura $3^3.(13)^3p^4-2^{12}.5^4q^3 >< 0$. Mais lorsque la fonction $3^3.(13)^3p^4-2^{12}.5^4q^3$ est >0, la formule appartient au système précédent; donc pour celui-ci on aura $3^3.(13)^3p^4-2^{12}.5^4q^3<0$; & pour que cette condition-ci ne soit pas vaine, dans le cas précédent on aura $3^3p^4-2^8q^3>0$; car si $3^3p^4-2^8q^3$ étoit <0, à plus forte raison $3^3.(13)^3p^4-2^{12}.5^4q^3$ seroit <0.

Le système $(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$ $(x+b+c\sqrt{-1})(x+b-c\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+b)(x+b)(x-b+a\sqrt{-1})(x-b-a\sqrt{-1})$; par conséquent, on aura $3^3p^4-2^8q^3 >< 0$, & il est évident que c'est le signe $<$ qu'il faut prendre; car si $3^3p^4-2^8q^3$ étoit >0, ceci $3^3.(13)^3p^4-2^{12}.5^4q^3$ étant nécessairement <0, ce système-ci ne seroit pas distingué du précédent.

XIV.

Soit $x^4+px-q=(x+a)(x-c)(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ on aura $3^3.7^3p^4-2^8.5^4q^3=0$.

Le système $(x+a)(x-c)(x-d+b\sqrt{-1})$ $(x-d-b\sqrt{-1})$ peut devenir $(x+a)(x-c)$ $(x-c+b\sqrt{-1})(x-c-b\sqrt{-1})$ en faisant $d=c$; par conséquent on aura $3^3.7^3p^4-2^8.5^4q^3 >< 0$.

Soit $d=2.3$, $c=11$, $b=19$, $a=23$;

CONCLUSION.

Lorſque l'on aura une équation à réſoudre, l'on cherchera dans la Table la formule de cette équation; l'on trouvera à côté de cette formule tous les ſyſtèmes de facteurs qui peuvent la produire, & vis-à-vis chaque ſyſtème de facteurs, le ſyſtème de conditions qui lui convient; les coëfficiens de l'équation donnée ſatisferont toûjours à l'un de ces ſyſtèmes de conditions, & ne ſatisferont jamais qu'à un ſeul; l'on aura donc pour cette équation le ſeul ſyſtème de facteurs qui puiſſe la produire; il ne s'agira plus que de déterminer les nombres a, b, c, d, e, &c. de ce ſyſtème; ce qui s'exécutera par la méthode ſuivante.

Étant données deux équations entre deux nombres réels poſitifs m *&* n, & *ſachant que* m *eſt plus grand que* n; *trouver ces deux nombres.*

Je fais $m = \alpha R$, $n = \beta R$, & je ſubſtitue ces valeurs dans les deux équations entre m & n; j'en aurai deux autres entre α, β & R, d'où chaſſant R, j'aurai une équation entre α & β. Je mets dans cette équation $x\varphi + y$ au lieu de α, & $z\varphi + u$ au lieu de β; j'aurai $c1\varphi^{\varepsilon} + c2\varphi^{\varepsilon-1} + c3\varphi^{\varepsilon-2} + c4\varphi^{\varepsilon-3} + c5\varphi^{\varepsilon-4} + c6\varphi^{\varepsilon-5} +$ &c. $= 0$, (ε déſignant un nombre entier poſitif, & $c1$, $c2$, $c3$, $c4$, $c5$, &c. déſignant des fonctions de x, y, z, u.)

Pour faciliter extrêmement ces ſubſtitutions, il faudra avoir une Table des puiſſances de $x\varphi + y$ & de $z\varphi + u$, & de leurs produits; au moyen de quoi, on n'aura à chaque fois qu'une ſimple addition à faire.

Première Opération.

$x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 1$; l'on aura une équation où il n'y aura que φ d'inconnue, dont je suppose tous les termes d'un côté & 0 de l'autre, & le coëfficient de la plus haute puissance de φ positif.

Soit A un nombre entier positif, tel que si je fais $\varphi = A$, le premier membre de cette équation soit < 0, & que si je fais $\varphi = A + 1$, ou $= A + 2$, ou $= A + 3$, ou $= A + 4$, &c. à l'infini, il soit > 0, je dis qu'il faudra faire $\varphi = A$.

On aura $\alpha = A$, $\beta = 1$; donc $m = AR$, $n = R$. Je laisse R au lieu de sa valeur, qu'on aura en mettant dans l'expression de R pour α & β les valeurs qui sont ici.

Seconde Opération.

$x = A$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 0$; l'on aura une nouvelle équation où il n'y aura que φ d'inconnue, & l'on trouvera pour φ le nombre entier positif B, comme on a trouvé A dans l'opération précédente.

Donc $\alpha = AB + 1$, $\beta = B$; donc $m = (AB + 1)R$, $n = BR$. Je laisse toûjours R au lieu de sa valeur, qu'on aura en mettant dans l'expression de R pour α & β les valeurs qui sont ici.

Continuez de la même manière autant que vous voudrez, & faites à chaque fois $x =$ le dernier α, $y =$ l'avant-dernier, $z =$ le dernier β, $u =$ l'avant-dernier.

Suivant cette règle, vous aurez

Troisième Opération.

$x = AB + 1$, $y = A$, $z = B$, $u = 1$; d'où résultera

résultera une troisième équation où il n'y aura que φ d'inconnue, & vous trouverez pour φ le nombre entier positif C, comme vous avez trouvé A & B.

Donc $\alpha = (AB + 1)C + A$, $\beta = BC + 1$; donc $m = [(AB + 1)C + A]R$, $n = (BC + 1)R$.

Au reste, si les nombres m & n ont une mesure commune, on les déterminera exactement par cette méthode, & s'ils n'ont pas de commune mesure, on approchera toûjours de plus en plus de leurs valeurs; par conséquent, si deux quelconques des nombres $a, b, c, d, e,$ &c. sont commensurables entr'eux, on aura la résolution parfaite de l'équation proposée; & s'ils sont incommensurables, pris deux à deux de toutes les manières possibles, on en aura la résolution aussi approchée qu'on voudra.

Voilà tout ce qu'on pouvoit desirer sur les équations; mais l'affaire est d'exécuter les Tables que nous proposons: il faudroit pour cela que l'on prit ceci à cœur, comme on a pris autrefois les logarithmes.

EXEMPLE I.

Trouver les deux facteurs de $x^2 - 7x + 5$; au moyen de la Table, l'on trouvera $x^2 - 7x + 5 = (x - a)(x - b)$; donc $a + b = 7$, $ab = 5$.

Je fais $a = \alpha R$, $b = \beta R$; j'aurai $(\alpha + \beta)R = 7$, $\alpha\beta R^2 = 5$; donc $R = \frac{7}{\alpha + \beta}$, $R = \frac{5}{\alpha\beta R}$; donc $7\alpha\beta R = 5\alpha + 5\beta$; donc $R = \frac{5\alpha + 5\beta}{7\alpha\beta}$; donc $\frac{7}{\alpha + \beta} = \frac{5\alpha + 5\beta}{7\alpha\beta}$; donc $5\alpha^2 - 39\alpha\beta + 5\beta^2 = 0$. Je fais $\alpha = x\varphi + y$, $\beta = z\varphi + u$; & en

substituant, j'aurai $(5x^2 - 39xz + 5z^2)\varphi^2 + (10xy - 39yz - 39xu + 10zu)\varphi + (5y^2 - 39yu + 5u^2) = 0$.

PREMIÈRE OPÉRATION.

$x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 1$; on aura $5\varphi^2 - 39\varphi + 1 = 0$ & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 7$. Donc $\alpha = 7$, $\beta = 1$.

SECONDE OPÉRATION.

$x = 7$, $y = 1$, $z = 1$, $u = 0$; on aura $23\varphi^2 - 31\varphi - 5 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 1$. Donc $\alpha = 8$, $\beta = 1$.

TROISIÈME OPÉRATION.

$x = 8$, $y = 7$, $z = 1$, $u = 1$; on aura $13\varphi^2 - 15\varphi - 23 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 2$. Donc $\alpha = 23$, $\beta = 3$.

QUATRIÈME OPÉRATION.

$x = 23$, $y = 8$, $z = 3$, $u = 1$; on aura $\varphi^2 - 37\varphi - 13 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 37$. Donc $\alpha = 859$, $\beta = 112$.

CINQUIÈME OPÉRATION.

$x = 859$, $y = 23$, $z = 112$, $u = 3$; on aura $13\varphi^2 - 37\varphi - 1 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 2$. Donc $\alpha = 1741$, $\beta = 227$.

SIXIÈME OPÉRATION.

$x = 1741$, $y = 859$, $z = 227$, $u = 112$; on aura $18\varphi^2 - 15\varphi - 13 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 1$. Donc $\alpha = 2600$, $\beta = 339$, &c.

EXEMPLE II.

Trouver les trois facteurs de $x^3 + x^2 + 3x + 5$; par le moyen de la Table, on aura $x^3 + x^2 + 3x + 5 = x + b)(x - c + a\sqrt{-1})(x - c - a\sqrt{-1})$; donc $b - 2c = 1$, $a^2 - 2bc + c^2 = 3$, $b.(a^2 + c^2) = 5$; l'on peut chasser de ces trois équations a, ou b, ou c, & avoir deux équations entre b & c, ou entre a & c, ou entre a & b. Je chasse, par exemple, a; j'aurai $b - 2c = 1$, $3b + 2b^2c = 5$.

Je fais $b = \alpha R$, $c = \beta R$; j'aurai $(\alpha - 2\beta)R = 1$, $3\alpha R + 2\alpha^2\beta R^3 = 5$; donc $R = \frac{1}{\alpha - 2\beta}$, $R = \frac{5}{3\alpha + 2\alpha^2\beta R^2}$; donc $3\alpha + 2\alpha^2\beta R^2 = 5\alpha - 10\beta$; donc $R = \frac{\alpha - 5\beta}{\alpha^2\beta R}$, donc $\frac{1}{\alpha - 2\beta} = \frac{\alpha - 5\beta}{\alpha^2\beta R}$; donc $R = \frac{\alpha^2 - 7\alpha\beta + 10\beta^2}{\alpha^2\beta}$; donc $\frac{\alpha^2 - 7\alpha\beta + 10\beta^2}{\alpha^2\beta} = \frac{1}{\alpha - 2\beta}$; donc enfin $\alpha^3 - 10\alpha^2\beta + 24\alpha\beta^2 - 20\beta^3 = 0$.

Je fais $\alpha = x\varphi + y$, $\beta = z\varphi + u$; & en substituant, j'aurai $(x^3 - 10x^2z + 24xz^2 - 20z^3)\varphi^3 + (3x^2y - 20xyz - 10x^2u + 48xzu + 24yz^2 - 60z^2u)\varphi^2 + (3xy^2 - 10y^2z - 20xyu + 24xu^2 + 48yzu - 60zu^2)\varphi + (y^3 - 10y^2u + 24yu^2 - 20u^3) = 0$.

PREMIÈRE OPÉRATION.

$x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 1$; on aura $\varphi^3 - 10\varphi^2 + 24\varphi - 20 = 0$, & l'on trouvera qu'il faut faire $\varphi = 6$. Donc $\alpha = 6$, $\beta = 1$.





